Δευτέρα, 9 Ιουλίου, 2018

Πρόβλημα 1. Έστω Γ ο περιγεγραμμένος κύκλος του οξυγώνιου τριγώνου ABC. Τα σημεία D και E ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα AB και AC, αντίστοιχα, έτσι ώστε $AD = AE$. Οι μεσοκάθετες των τμημάτων BD και CE τέμνουν τα μικρά τόξα AB και AC του κύκλου Γ στα σημεία F και G, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες DE και FG είναι παράλληλες (ή ταυτίζονται).

Πρόβλημα 2. Να βρείτε όλους τους ακεραίους αριθμούς $n \geq 3$ για τους οποίους υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, τέτοιοι ώστε $a_{n+1} = a_1$ και $a_{n+2} = a_2$, και

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Πρόβλημα 3. Ένα τρίγωνο *αντι - Πασκάλ* είναι μια ισόπλευρη τριγωνική παράταξη αριθμών έτσι ώστε, εκτός από τους αριθμούς της τελευταίας γραμμής, κάθε αριθμός ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο αριθμών που βρίσκονται αμέσως κάτω από αυτόν. Για παράδειγμα, η παρακάτω παράταξη αριθμών είναι ένα αντι-Πασκάλ τρίγωνο με τέσσερις γραμμές οι οποίες περιέχουν κάθε ακέραιο από το 1 μέχρι το 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Υπάρχει ένα αντι-Πασκάλ τρίγωνο με 2018 γραμμές οι οποίες περιέχουν κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 μέχρι το $1 + 2 + \cdots + 2018$;

Language: Greek

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τρίτη, 10 Ιουλίου, 2018

Πρόβλημα 4. Μια *θέση* είναι οποιοδήποτε σημείο (x, y) στο επίπεδο έτσι ώστε οι αριθμοί x και y να είναι και οι δύο θετικοί ακέραιοι μικρότεροι ή ίσοι του 20.

Αρχικά, κάθε μία από τις 400 θέσεις είναι μη κατειλημμένη. Η Άμυ και ο Μπεν με τη σειρά τοποθετούν πέτρες, με την Άμυ να αρχίζει πρώτη. Όταν είναι η σειρά της, η Άμυ τοποθετεί μια νέα κόκκινη πέτρα σε μια μη κατειλημμένη θέση έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε θέσεων που είναι κατειλημμένες με κόκκινη πέτρα να μην ισούται με $\sqrt{5}$. Στην σειρά του, ο Μπεν τοποθετεί μια νέα μπλε πέτρα σε οποιαδήποτε μη κατειλημμένη θέση. (Μια θέση κατειλημμένη με μια μπλε πέτρα μπορεί να είναι σε οποιαδήποτε απόσταση από οποιαδήποτε άλλη κατειλημμένη θέση.) Σταματούν όταν ένας από τους δύο δεν μπορεί να τοποθετήσει μια πέτρα.

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του K έτσι ώστε η Άμυ να είναι βέβαιη ότι μπορεί να τοποθετήσει τουλάχιστον K κόκκινες πέτρες, ανεξάρτητα από τον τρόπο που τοποθετεί ο Μπεν τις μπλε πέτρες του.

Πρόβλημα 5. Έστω $a_1, a_2, \ldots$ μια άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος $N > 1$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq N$, ο αριθμός

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος M τέτοιος ώστε $a_m = a_{m+1}$, για κάθε $m \geq M$.

Πρόβλημα 6. Ένα κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ ικανοποιεί τη σχέση $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Σημείο X βρίσκεται στο εσωτερικό του $ABCD$ έτσι ώστε

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{και} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Να αποδείξετε ότι: $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες