Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Ο ΘΑΛΗΣ»

Οργανωμένη προετοιμασία για τον διαγωνισμό του 2018.

Η ομάδα μας στο facebook:

ΘΑΛΗΣ: Β' & Γ' Γυμνασίου. Προετοιμασία για τον διαγωνισμό του 2018.

Παρασκευή, 7-Σεπ-2018

ΤΑΞΗ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

❶

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ - ΣΕΙΡΑ 1η ❖ ΕΚΔΟΣΗ 4η - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left[(-1)^6-(-1)^7-(-1)^8-(-1)^9\right]^{11}+\frac{(-36)^3}{9^3}-\frac{(-56)^2}{8^2}+\frac{(-21)^4}{7^4}+\frac{(-2)^8}{2^7}$$

Απάντηση

Εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε:

$$\begin{aligned}A&=\left[(-1)^6-(-1)^7-(-1)^8-(-1)^9\right]^{11}+\frac{(-36)^3}{9^3}-\frac{(-56)^2}{8^2}+\frac{(-21)^4}{7^4}+\frac{(-2)^8}{2^7}\\&=\left[(+1)-(-1)-(+1)-(-1)\right]^{11}+\left(\frac{-36}{9}\right)^3-\left(\frac{-56}{8}\right)^2+\left(\frac{-21}{7}\right)^4+\frac{2^8}{2^7}\\&=2^{11}+(-4)^3-(-7)^2+(-3)^4+2^{8-7}\\&=2048-64-49+81+2\\&=2018\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα κατάστημα αύξησε κατά 25% την τιμή που πουλούσε ένα προϊόν λόγω αλλαγής της εργοστασιακής τιμής. Την περίοδο των εκπτώσεων προσφέρει το προϊόν στους καταναλωτές στην αρχική τιμή που είχε αυτό πριν την αύξηση. Για το λόγο αυτό το πουλά με έκπτωση α% επί της νέας αυξημένης τιμής. Να βρείτε την τιμή του α.

Απάντηση

Έστω x η αρχική τιμή πώλησης του προϊόντος. Αν y είναι η νέα τιμή πώλησης, μετά την εργοστασιακή αύξηση κατά 25%, τότε:

$$y=x+\frac{25}{100}x=\frac{100}{100}x+\frac{25}{100}x=\frac{125}{100}x=\frac{5}{4}x$$

Στην περίοδο των εκπτώσεων, μετά τη μείωση της τιμής y κατά α%, η τιμή πώλησης γίνεται x, όσο δηλαδή η αρχική τιμή. Άρα:

$$x=y-\frac{\alpha}{100}y=\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)y=\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{5}{4}x$$

Είναι φανερό ότι ισχύει $\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{5}{4}=1$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{5}{4}=1$$

$$1-\frac{\alpha}{100}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{\alpha}{100}=\frac{1}{5}$$

$$\alpha=20$$

Επομένως το κατάστημα προσφέρει το προϊόν με έκπτωση 20%.

ΘΕΜΑ 3^{o}

Να βρείτε τρείς διαδοχικούς θετικούς ακεραίους ν, $\nu+1$, $\nu+2$ οι οποίοι να είναι μικρότεροι του 500 έτσι ώστε, ο ν να είναι πολλαπλάσιο το 4, ο $\nu+1$ να είναι πολλαπλάσιο του 9 και ο $\nu+2$ να είναι πολλαπλάσιο του 10.

Απάντηση

Παρατηρούμε ότι η τριάδα διαδοχικών θετικών ακεραίων 8, 9, 10 είναι μικρότεροι του 500, το 8 να είναι πολλαπλάσιο του 4, το 9 είναι πολλαπλάσιο του 9 και το 10 είναι πολλαπλάσιο του 10. Οπότε η τριάδα 8, 9, 10 είναι μια λύση του προβλήματος.

Αν έχουμε δύο πολλαπλάσια $\nu\cdot\alpha$ και $\mu\cdot\alpha$ ενός ακεραίου αριθμού α, τότε εύκολα συμπεραίνουμε ότι το άθροισμά τους $\nu\cdot\alpha+\mu\cdot\alpha=(\nu+\mu)\cdot\alpha$ είναι ένα άλλο πολλαπλάσιο του α. Επομένως για να προκύψει μια άλλη αντίστοιχη τριάδα, θα πρέπει να προσθέτουμε και στους τρείς παραπάνω αριθμούς 8, 9, 10 τον ίδιο θετικό ακέραιο, ώστε να παραμένουν διαδοχικοί, ο οποίος να είναι κοινό πολλαπλάσιο των 4, 9, 10. Δηλαδή να είναι ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(4,9,10)=180$. Τέτοιοι αριθμοί είναι οι 180, 360, 540,… κτλ.

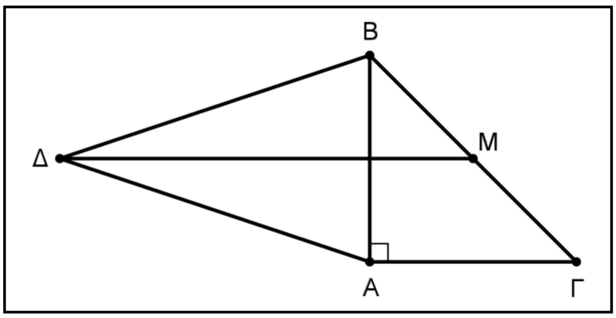
Με δεδομένο ότι οι τρείς αριθμοί πρέπει να είναι μικρότεροι του 500, εύκολα προκύπτει ότι οι μόνες άλλες λύσεις του προβλήματος είναι οι τριάδες 188, 189, 190 ή 368, 369, 370.

Τελικά οι τρείς ζητούμενοι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι είναι:

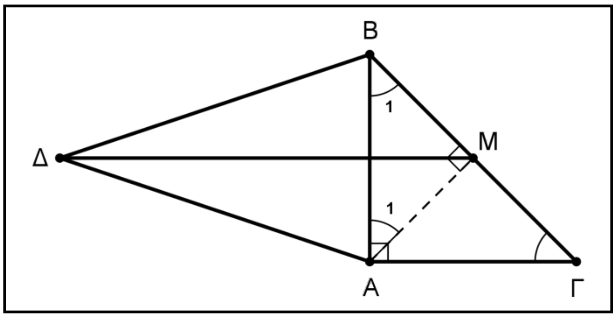
(8, 9, 10) ή (188, 189, 190) ή (368, 369, 370)

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $AB=A\Gamma$, και εξωτερικά αυτού ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΒ με $\Delta A=\Delta B$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ να αποδείξετε ότι η ΔΜ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



<u>Απάντηση</u>



Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = \frac{90^0}{2} = 45^o$.

Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ η οποία είναι και ύψος του, αφού το ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Επομένως το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ορθογώνιο και οι οξείες γωνίες του είναι:

- $\hat{B}_1 = 45^o$
- $\hat{A}_1 = 90^o - 45^o = 45^o$

Άρα το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές με $MA = MB$.

Έχουμε:

- **Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ διότι $\Delta A = \Delta B$.**
- **Το σημείο Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ διότι $MA = MB$.**

Όμως δυο σημεία ορίζουν τη θέση μιας μόνο ευθείας. Επομένως η ΔΜ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

<u>Σημείωση</u>

- **Η πρόταση «<u>Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες</u>» είναι γνωστή από την ύλη της Α΄ τάξης Γυμνασίου.**
- **Η αντίστροφη πρόταση «<u>Αν δυο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες τότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες</u>» δεν αναφέρεται στην ύλη του Γυμνασίου, αλλά της Α΄ τάξης Λυκείου. Παρόλα αυτά χρησιμοποιείται πολλές φορές κατά τη απάντηση των θεμάτων του διαγωνισμού «Ο ΘΑΛΗΣ».**
- **Οι δύο παραπάνω προτάσεις συνοψίζονται στην εξής πρόταση «<u>Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δυο γωνίες του ίσες</u>».**
- **Αντίστοιχα ισχύει και για το ισόπλευρο τρίγωνο. «<u>Ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν έχει όλες τις γωνίες του ίσες με 60^o</u>».**

<u>Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι εκπαιδευτικοί:</u>

Βασίλης Παπαδημητρίου, Μαθηματικός του Γυμν. Μώλου

Κώστας Σουφλέρης, Μαθηματικός του Γυμν. Σπερχειάδας

<u>Συντονισμός - Γενική επιμέλεια:</u>

Δημ. Σπαθάρας

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών