Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Ο ΘΑΛΗΣ»

Οργανωμένη προετοιμασία για τον διαγωνισμό του 2018.

Η ομάδα μας στο facebook:

ΘΑΛΗΣ: Β' & Γ' Γυμνασίου. Προετοιμασία για τον διαγωνισμό του 2018.

Παρασκευή, 14-Σεπ-2018

ΤΑΞΗ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

❷

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ - ΣΕΙΡΑ 2^η ❖ ΕΚΔΟΣΗ 4^η - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left[\left(11-\frac{48}{6}\right)^5-\left(4+\frac{42}{7}\right)\cdot\left|-10\right|+7\right]:15-9\cdot\left[(-3)^2+(-2)^3\right]$$

Απάντηση

Εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε:

$$\begin{aligned}A&=\left[\left(11-\frac{48}{6}\right)^5-\left(4+\frac{42}{7}\right)\cdot\left|-10\right|+7\right]:15-9\cdot\left[(-3)^2+(-2)^3\right]\\&=\left[(11-8)^5-(4+6)\cdot 10+7\right]:15-9\cdot\left[(+9)+(-8)\right]\\&=\left(3^5-100+7\right):15-9\cdot(9-8)\\&=(243-100+7):15-9\cdot 1\\&=(143+7):15-9\\&=150:15-9\\&=10-9=1\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2^o

Ένας παλαιοπώλης αγόρασε δυο παλαιά έπιπλα Α και Β αντί 400 € και τα δυο μαζί. Μετά τη συντήρησή τους τα πούλησε 670 €. Αν το έπιπλο Α το πούλησε με κέρδος 80% και το έπιπλο Β το πούλησε με κέρδος 60%, επί της τιμής αγοράς τους, να βρείτε πόσο αγόρασε το καθένα από τα έπιπλα Α και Β.

Απάντηση

Αν πουλούσε και τα δύο έπιπλα με κέρδος 60%, τότε θα εισέπραττε:

$$400+\frac{60}{100}\cdot 400=300+240=640 \text{ €}.$$

Όμως εισέπραξε 670 €, δηλαδή $670-640=30$ € περισσότερα. Τα επιπλέον χρήματα που εισέπραξε οφείλονται στο επιπλέον ποσοστό κατά $80\%-60\%=20\%$, επί της τιμής αγοράς, που πούλησε το έπιπλο Α. Επομένως:

- Το 20% της τιμής αγοράς του επίπλου Α αντιστοιχεί σε 30 €
- Το 1% της τιμής αγοράς του επίπλου Α αντιστοιχεί σε $30:20=1,5$ €
- Το 100% της τιμής αγοράς του επίπλου Α αντιστοιχεί σε $1,5\cdot 100=150$ €

Τελικά το έπιπλο Α το αγόρασε 150 € και το έπιπλο Β το αγόρασε $400-150=250$ €.

<u>Β΄ Τρόπος</u>

Έστω ότι ο παλαιοπώλης αγόρασε x € το έπιπλο Α. Τότε το πούλησε:

$$x+\frac{80}{100}x=x+0,8x=1,8x \text{ €}$$

Αφού αγόρασε x € το έπιπλο Α, το έπιπλο Β το αγόρασε $400-x$ € και το πούλησε:

$$(400-x)+\frac{60}{100}(400-x)=400-x+0,6\cdot 400-0,6x=400+240-1,6x=640-1,6x \text{ €}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$1,8x+640-1,6x=670$$

$$0,2x=30$$

$$x=30:0,2$$

$$x=150$$

Επομένως το έπιπλο Α το αγόρασε 150 € και το έπιπλο Β το αγόρασε $400-150=250$ €.

<u>ΘΕΜΑ 3^{ο}</u>

Δύο φυσικοί αριθμοί α και β με $\alpha>\beta$ έχουν λόγο $\frac{11}{7}$. Η διαίρεση του α με το 17 δίνει πηλίκο 14 και υπόλοιπο υ, ενώ η διαίρεση του β με το 13 δίνει πηλίκο 12 και υπόλοιπο υ'. Αν ισχύει $\upsilon=3\upsilon'$, να βρείτε τους δυο φυσικούς αριθμούς α και β.

<u>Απάντηση</u>

Από τις Ευκλείδειες διαιρέσεις προκύπτει ότι:

- $\alpha=17\cdot 14+\upsilon$, όπου υ φυσικός αριθμός με $\upsilon<17$
- $\beta=13\cdot 12+\upsilon'$, όπου υ' φυσικός αριθμός με $\upsilon'<13$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{11}{7}$$

$$7\alpha=11\beta$$

$$7(17\cdot 14+\upsilon)=11(13\cdot 12+\upsilon')$$

$$1666+7\upsilon=1716+11\upsilon'$$

$$7\upsilon-11\upsilon'=50$$

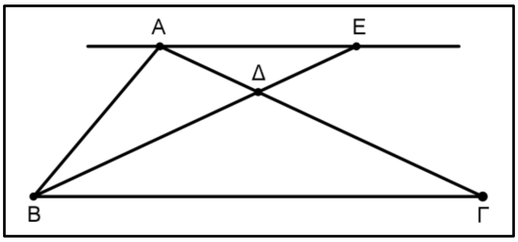
Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\upsilon=3\upsilon'$, έχουμε:

$$7 \cdot 3\upsilon' - 11\upsilon' = 50$$
$$21\upsilon' - 11\upsilon' = 50$$
$$10\upsilon' = 50$$
$$\upsilon' = 5$$

Επομένως είναι $\upsilon' = 5$ και $\upsilon = 15$, οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί α, β είναι:

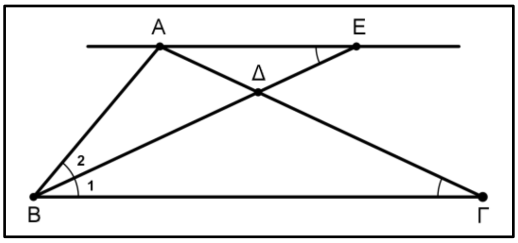
- $\alpha = 17 \cdot 14 + 15 = 253$
- $\beta = 13 \cdot 12 + 5 = 161$

ΘΕΜΑ 4ο



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Η διχοτόμος ΒΔ του τριγώνου προεκτεινόμενη τέμνει την παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι $\Delta B = \Delta\Gamma$ και $AB = AE$.

Απάντηση



- **Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ ισχύει ότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Όμως $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\frac{\hat{B}}{2} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές, με $\Delta B = \Delta\Gamma$.**
- **Επειδή $AE \parallel B\Gamma$ ισχύει $\hat{E} = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων που τέμνονται από την ΒΕ. Όμως $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, οπότε $\hat{E} = \hat{B}_2$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$.**

Σημείωση

- **Η πρόταση «Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες» είναι γνωστή από την ύλη της Α΄ τάξης Γυμνασίου.**
- **Η αντίστροφη πρόταση «Αν δυο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες τότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες» δεν αναφέρεται στην ύλη του Γυμνασίου, αλλά της Α΄ τάξης Λυκείου. Παρόλα αυτά χρησιμοποιείται πολλές φορές κατά τη απάντηση των θεμάτων του διαγωνισμού «Ο ΘΑΛΗΣ».**
- **Οι δύο παραπάνω προτάσεις συνοψίζονται στην εξής πρόταση «Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δυο γωνίες του ίσες».**
- **Αντίστοιχα ισχύει και για το ισόπλευρο τρίγωνο. «Ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν έχει όλες τις γωνίες του ίσες με 60°».**

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι εκπαιδευτικοί:

Βασίλης Παπαδημητρίου, Μαθηματικός του Γυμν. Μώλου
Κώστας Σουφλέρης, Μαθηματικός του Γυμν. Σπερχειάδας

Συντονισμός - Γενική επιμέλεια:

Δημ. Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών