

Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός
στα Μαθηματικά «Ο ΘΑΛΗΣ»
Οργανωμένη προετοιμασία
για τον διαγωνισμό του 2018.

Η ομάδα μας στο facebook:
ΘΑΛΗΣ: Β' & Γ' Γυμνασίου.
Προετοιμασία για τον
διαγωνισμό του 2018.

Τετάρτη, 12-Σεπ-2018

ΤΑΞΗ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ - ΣΕΙΡΑ 2^η ❖ ΕΚΔΟΣΗ 3^η – ΕΚΤΕΝΕΙΣ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν το 15% ενός μη μηδενικού αριθμού α είναι ίσο με το 10% ενός αριθμού β , τότε να βρείτε την αριθμητική τιμή του κλάσματος:

$$K = \frac{18\alpha^2 - 9\alpha\beta + 5\beta^2}{9\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2}$$

Απάντηση

Αφού $15\% \cdot \alpha = 10\% \cdot \beta$ έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{15}{100}\alpha = \frac{10}{100}\beta$$

$$15\alpha = 10\beta$$

$$3\alpha = 2\beta$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\beta$$

Κάνοντας χρήση αυτής της σχέσης το κλάσμα γίνεται:

$$K = \frac{18\alpha^2 - 9\alpha\beta + 5\beta^2}{9\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2}$$

$$= \frac{18\left(\frac{2}{3}\beta\right)^2 - 9\left(\frac{2}{3}\beta\right)\beta + 5\beta^2}{9\left(\frac{2}{3}\beta\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\beta\right)\beta + \beta^2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ΘΕΜΑ 2°

Ο Νίκος και οι συνεργάτες του μοίρασαν μεταξύ τους 1000 € σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό από ευρώ. Όμως πέντε από τους συνεργάτες του Νίκου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους και έτσι ο Νίκος πήρε συνολικά, μαζί με το μερίδιό του, περισσότερα από 200 €. Να βρείτε πόσοι ήταν ο Νίκος και οι συνεργάτες του και πόσα ευρώ πήρε ο Νίκος.

Απάντηση

Έστω ότι ο Νίκος και οι συνεργάτες του ήταν συνολικά v , όπου v διαιρέτης του 1000. Προφανώς από τα δεδομένα έχουμε ότι $v > 5$.

Αρχικά ο καθένας πήρε $\frac{1000}{v}$ €. Πέντε όμως από τους συνεργάτες επέστρεψαν στο Νίκο, συνολικά, $5 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{1000}{v} = \frac{1000}{v}$ €. Έτσι ο Νίκος πήρε συνολικά $\frac{1000}{v} + \frac{1000}{v} = \frac{2000}{v}$ €.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι:

$$\frac{2000}{v} > 200$$

.....
.....
.....

ΘΕΜΑ 3°

Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy μια ευθεία (ϵ) έχει κλίση $\alpha = -2$ και διέρχεται από το σημείο $M(4,2)$. Η ευθεία (ϵ) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A και τον άξονα $y'y$ στο σημείο B .

- A) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) και τις συντεταγμένες των σημείων A και B .
B) Να βρείτε τα εμβαδά (OMA) και (OMB) των τριγώνων OMA και OMB αντίστοιχα.
Γ) Να αποδείξετε ότι $OM \perp AB$

Απάντηση

A) Η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ϵ) έχει τη μορφή $y = ax + \beta$. Επειδή η κλίση της είναι $\alpha = -2$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = -2x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $M(4,2)$ έχουμε:

$$2 = -2 \cdot 4 + \beta$$

$$\beta = 10$$

Επομένως η ευθεία (ϵ) έχει εξίσωση $y = -2x + 10$

Για την εύρεση των σημείων τομής της ευθείας (ϵ) με του άξονες έχουμε:

- Για $y = 0$ είναι $0 = -2x + 10$ ή $x = 5$. Άρα το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(5,0)$.
- Για $x = 0$ είναι $y = -2 \cdot 0 + 10$ ή $y = 10$. Άρα το σημείο B έχει συντεταγμένες $B(0,10)$.

B) Φέρνουμε το ύψος MK, όπου $K(4,0)$, του τριγώνου OMA και έχουμε:

$$(OMA) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5 \text{ τ.μ.}$$

Φέρνουμε το ύψος ML, όπου $L(0,2)$, του τριγώνου OMB και έχουμε:

.....

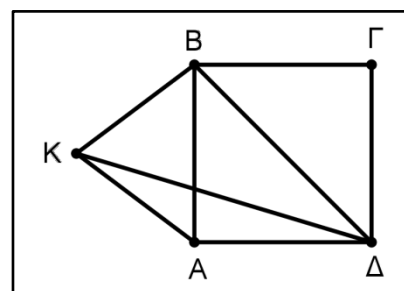
.....

.....

.....

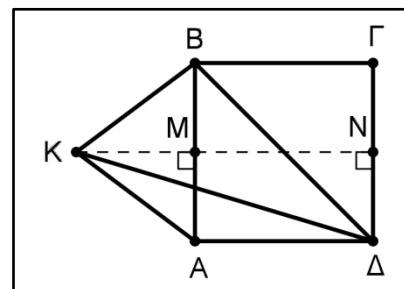
ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ πλευράς 6 cm και εξωτερικά αυτού ισοσκελές τρίγωνο KAB με $KA = KB = 5 \text{ cm}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων AKΔ και BKΔ.



Απάντηση

Φέρνουμε τη διάμεσο KM του ισοσκελούς τριγώνου KAB, η οποία προεκτεινόμενη τέμνει την ΓΔ στο N. Η KM εκτός από διάμεσος είναι και ύψος του τριγώνου, επομένως είναι μεσοκάθετος του AB. Άρα είναι μεσοκάθετος και του ΓΔ και έτσι έχουμε $MA = ND = 3 \text{ cm}$. Επίσης το AMNΔ είναι ορθογώνιο, οπότε $MN = 6 \text{ cm}$.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AMK είναι $KM^2 = KA^2 - MA^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$. Επομένως $KM = 4 \text{ cm}$ και $KN = 4 + 6 = 10 \text{ cm}$.

• Για το εμβαδόν του τριγώνου AKΔ έχουμε

$$(AKΔ) = (AMK) + (AMNΔ) - (ΔNK)$$

$$\triangleright (AMK) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$\triangleright (AMNΔ) = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm}^2$$

$$\triangleright (ΔNK) = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου AKΔ είναι $(AKΔ) = 6 \text{ cm}^2 + 18 \text{ cm}^2 - 15 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$

.....

.....

.....

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι εκπαιδευτικοί:

Βασίλης Παπαδημητρίου, Μαθηματικός του Γυμν. Μώλου
Κώστας Σουφλέρης, Μαθηματικός του Γυμν. Σπερχειάδας

Συντονισμός - Γενική επιμέλεια:

Δημ. Σπαθάρης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών