Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Ο ΘΑΛΗΣ»

Οργανωμένη προετοιμασία για τον διαγωνισμό του 2018.

Η ομάδα μας στο facebook:

ΘΑΛΗΣ: Β' & Γ' Γυμνασίου. Προετοιμασία για τον διαγωνισμό του 2018.

Παρασκευή, 14-Σεπ-2018

# ΤΑΞΗ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

❷

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ - ΣΕΙΡΑ 2η ❖ ΕΚΔΟΣΗ 4η - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**Αν το 15% ενός μη μηδενικού αριθμού α είναι ίσο με το 10% ενός αριθμού β, τότε να βρείτε την αριθμητική τιμή του κλάσματος:**

$$K=\frac{18\alpha^2-9\alpha\beta+5\beta^2}{9\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2}$$

**Απάντηση**

Αφού $15\%\cdot\alpha=10\%\cdot\beta$ έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{15}{100}\alpha=\frac{10}{100}\beta$$

$$15\alpha=10\beta$$

$$3\alpha=2\beta$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\beta$$

Κάνοντας χρήση αυτής της σχέσης το κλάσμα γίνεται:

$$K=\frac{18\alpha^2-9\alpha\beta+5\beta^2}{9\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2}$$

$$=\frac{18\left(\frac{2}{3}\beta\right)^2-9\left(\frac{2}{3}\beta\right)\beta+5\beta^2}{9\left(\frac{2}{3}\beta\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\beta\right)\beta+\beta^2}$$

$$=\frac{18\cdot\frac{4}{9}\beta^2-9\cdot\frac{2}{3}\beta^2+5\beta^2}{9\cdot\frac{4}{9}\beta^2+3\cdot\frac{2}{3}\beta^2+\beta^2}$$

$$=\frac{8\beta^2-6\beta^2+5\beta^2}{4\beta^2+2\beta^2+\beta^2}$$

$$=\frac{7\beta^2}{7\beta^2}=1$$

## ΘΕΜΑ 2$^{ο}$

**Ο Νίκος και οι συνεργάτες του μοίρασαν μεταξύ τους 1000 € σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό από ευρώ. Όμως πέντε από τους συνεργάτες του Νίκου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους και έτσι ο Νίκος πήρε συνολικά, μαζί με το μερίδιό του, περισσότερα από 200 €. Να βρείτε πόσοι ήταν ο Νίκος και οι συνεργάτες του και πόσα ευρώ πήρε ο Νίκος.**

**Απάντηση**

Έστω ότι ο Νίκος και οι συνεργάτες του ήταν συνολικά ν, όπου ν διαιρέτης του 1000. Προφανώς από τα δεδομένα έχουμε ότι $\nu > 5$.

Αρχικά ο καθένας πήρε $\frac{1000}{\nu}$ €. Πέντε όμως από τους συνεργάτες επέστεψαν στο Νίκο, συνολικά, $5\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{1000}{\nu}=\frac{1000}{\nu}$ €. Έτσι ο Νίκος πήρε συνολικά $\frac{1000}{\nu}+\frac{1000}{\nu}=\frac{2000}{\nu}$ €.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι:

$$\frac{2000}{\nu} > 200$$

$$200\nu < 2000$$

$$\nu < 10$$

Επομένως οι πιθανές τιμές του ν είναι 6, 7, 8, 9. Από αυτούς μόνο η τιμή $\nu = 8$ είναι διαιρέτης του 1000.

Τελικά ο Νίκος και οι συνεργάτες του ήταν 8 και ο Νίκος πήρε $\frac{2000}{8} = 250$ €.

## ΘΕΜΑ 3$^{ο}$

**Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy μια ευθεία (ε) έχει κλίση $\alpha = -2$ και διέρχεται από το σημείο $M(4,2)$. Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α και τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β.**

**Α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.**

**Β) Να βρείτε τα εμβαδά (ΟΜΑ) και (ΟΜΒ) των τριγώνων ΟΜΑ και ΟΜΒ αντίστοιχα.**

**Γ) Να αποδείξετε ότι $OM \perp AB$**

**Απάντηση**

Α) Η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε) έχει τη μορφή $y = \alpha x + \beta$. Επειδή η κλήση της είναι $\alpha = -2$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = -2x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $M(4,2)$ έχουμε:

$$2 = -2\cdot 4 + \beta$$

$$\beta = 10$$

Επομένως η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = -2x + 10$

Για την εύρεση των σημείων τομής της ευθείας (ε) με του άξονες έχουμε:

- Για $y=0$ είναι $0=-2x+10$ ή $x=5$. Άρα το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(5,0)$.
- Για $x=0$ είναι $y=-2\cdot 0+10$ ή $y=10$. Άρα το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B(0,10)$.

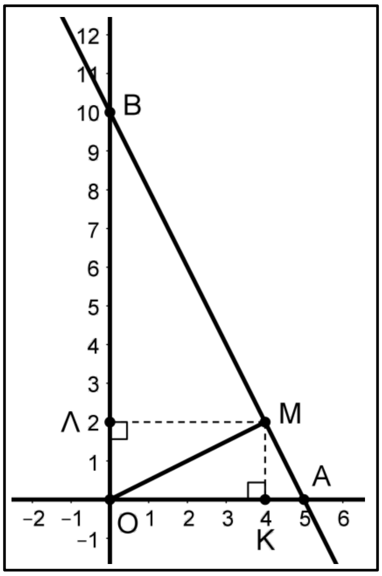
Β) Φέρνουμε το ύψος ΜΚ, όπου $K(4,0)$, του τριγώνου ΟΜΑ και έχουμε:

$$(OMA)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot MK=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2=5 \text{ τ.μ.}$$

Φέρνουμε το ύψος ΜΛ, όπου $\Lambda(0,2)$, του τριγώνου ΟΜΒ και έχουμε:

$$(OMB)=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot M\Lambda=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4=20 \text{ τ.μ.}$$

Γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΜ έχουμε:




$$OM^2=OK^2+MK^2$$

$$OM^2=4^2+2^2$$

$$OM^2=20$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΜ έχουμε:

$$AM^2=AK^2+MK^2$$

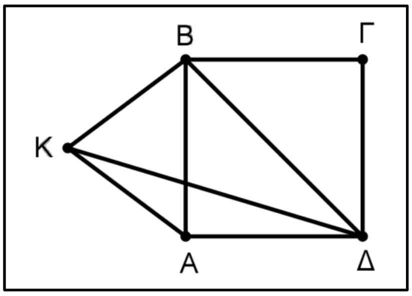
$$AM^2=1^2+2^2$$

$$AM^2=5$$

Επομένως $OM^2+AM^2=25$ και $OA^2=5^2=25$, άρα $OM^2+AM^2=OA^2$. Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο ΟΜΑ είναι ορθογώνιο με $O\hat{M}A=90^\circ$, οπότε $OM\perp AB$.

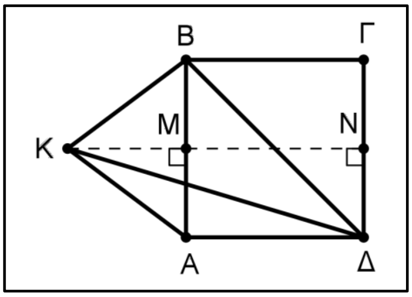
## ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 6 cm και εξωτερικά αυτού ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ με $KA=KB=5$ cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΔ και ΒΚΔ.




**Απάντηση**

Φέρνουμε τη διάμεσο ΚΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ, η οποία προεκτεινόμενη τέμνει την ΓΔ στο Ν. Η ΚΜ εκτός από διάμεσος είναι και ύψος του τριγώνου, επομένως είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. Άρα είναι μεσοκάθετος και του ΓΔ και έτσι έχουμε $MA=N\Delta=3$ cm. Επίσης το ΑΜΝΔ είναι ορθογώνιο, οπότε $MN=6$ cm.




Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΚ είναι $KM^2=KA^2-MA^2=5^2-3^2=25-9=16$. Επομένως $KM=4$ cm και $KN=4+6=10$ cm.

- **Για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ έχουμε $(ΑΚΔ) = (ΑΜΚ) + (ΑΜΝΔ) - (ΔΝΚ)$**
  - $(ΑΜΚ) = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$
  - $(ΑΜΝΔ) = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm}^2$
  - $(ΔΝΚ) = \dfrac{3 \cdot 10}{2} = 15 \text{ cm}^2$

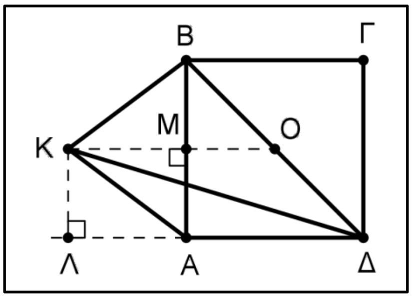
  **Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι** $(ΑΚΔ) = 6 \text{ cm}^2 + 18 \text{ cm}^2 - 15 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$
- **Για το εμβαδόν του τριγώνου ΒΚΔ έχουμε $(ΒΚΔ) = (ΚΑΒ) + (ΑΒΔ) - (ΑΚΔ)$**
  - $(ΚΑΒ) = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$
  - $(ΑΒΔ) = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

  **Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΒΚΔ είναι** $(ΒΚΔ) = 12 \text{ cm}^2 + 18 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2 = 21 \text{ cm}^2$

**<u>Β΄ Τρόπος</u>**

- **Υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ.**
  - **Φέρνουμε τη διάμεσο ΚΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ οποία είναι και ύψος. Επομένως $ΜΑ = ΜΒ = 3$ cm**
  - **Φέρνουμε το ύψος $ΚΛ \perp ΑΔ$ του τριγώνου ΑΚΔ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΔ. Το τετράπλευρο ΛΚΜΑ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΚΛ = ΜΑ = 3$ cm.**

  **Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι** $(ΑΚΔ) = \dfrac{1}{2} \cdot ΚΛ \cdot ΑΔ = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ cm}^2$
- **Υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΚΔ.**




  - **Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΚ είναι $ΚΜ^2 = ΚΑ^2 - ΜΑ^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, δηλαδή $ΚΜ = 4$ cm.**
  - **Η μεσοκάθετος ΚΜ της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου διέρχεται από το κέντρο του Ο, που είναι μέσο της διαγωνίου ΒΔ. Επομένως $ΜΟ = 3$ cm και $ΚΟ = 4 + 3 = 7$ cm**
  - **Η διάμεσος ΚΟ του τριγώνου ΒΚΔ χωρίζει το τρίγωνο σε δυο ισεμβαδικά τρίγωνα.**

  **Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΒΚΔ είναι** $(ΒΚΔ) = 2(ΒΚΟ) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ΜΒ \cdot ΚΟ = 3 \cdot 7 = 21 \text{ cm}^2$

<u>Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι εκπαιδευτικοί:</u>

Βασίλης Παπαδημητρίου, Μαθηματικός του Γυμν. Μώλου
Κώστας Σουφλέρης, Μαθηματικός του Γυμν. Σπερχειάδας

<u>Συντονισμός - Γενική επιμέλεια:</u>

Δημ. Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών