Τα Μαθηματικά εκτός από αναγκαία για τις
Πανελλαδικές εξετάσεις είναι και όμορφα.

Ένα πρόβλημα με πολλές προσεγγίσεις

Του Δ. Σπαθάρα, τ. Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Αφορμή για την παρούσα εργασία στάθηκε το ερώτημα Γ2 από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2018 στα Μαθηματικά Προσανατολισμού ΓΕΛ. Ας δούμε το θέμα όπως ακριβώς διατυπώθηκε στις εξετάσεις.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δυο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Σχόλια

Το παραπάνω θέμα είναι ένα κλασικό πρόβλημα μαθηματικής μοντελοποίησης, που παρόμοιό του, με κάποιες παραλλαγές, υπάρχει στα σχολικά βιβλία. Είναι πραγματικά ένα πολύ όμορφο πρόβλημα. Το ερώτημα Γ1 θέτει τις βάσεις για να απαντήσεις στα ερωτήματα Γ2 και Γ3 με χρήση Μαθηματικής Ανάλυσης και της σχετικής θεωρίας. Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι αντιμετώπισης του ερωτήματος χρησιμοποιώντας στοιχειώδη μαθηματικά. Της Ανάλυσης προϋπάρχει η Άλγεβρα και η Γεωμετρία. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε αποκλειστικά στο ερώτημα Γ2 και δίνουμε απαντήσεις χρησιμοποιώντας μαθηματικά που διδάσκονται σε μικρότερες τάξεις, ακόμη και στην Γ' τάξη Γυμνασίου. Απομονώσαμε λοιπόν το ερώτημα Γ2, επαναδιατυπώσαμε το πρόβλημα και το αντιμετωπίσαμε ανεξάρτητα από το ερώτημα Γ1.

Το πρόβλημα

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δυο τμήματα. Με το ένα από αυτά κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Βελτιστοποίηση της εκφώνησης.

Η έκφραση «κατασκευάζουμε» στα Μαθηματικά παραπέμπει σε Γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη. Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο με γνωστή περίμετρο κατασκευάζεται Γεωμετρικά. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τον κύκλο γνωστού μήκους. Αν μπορούσαμε να κατασκευάσουμε Γεωμετρικά κύκλο γνωστού μήκους, τότε θα είχαμε τετραγωνίσει τον κύκλο. Προφανώς η εκφώνηση δεν εννοεί Γεωμετρική κατασκευή με την αυστηρή έννοια του όρου. Αυτό το μικρό εμπόδιο θα θέλαμε να το παρακάμψουμε. Επαναδιατυπώνουμε λοιπόν το πρόβλημα ως εξής:

Θεωρούμε τετράγωνο και κύκλο με σταθερό άθροισμα περιμέτρων 8 m. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Τα προαναφερθέντα δεν υποβιβάζουν το θέμα Γ. Είναι ένα όμορφο και τίμιο πρόβλημα για το σκοπό που τέθηκε. Απλά αλλάξαμε λίγο τη διατύπωση ώστε να είμαστε συνεπείς με ότι λέμε. Οι απαντήσεις που θα δώσουμε σε τίποτε δεν επηρεάζονται από τη συγκεκριμένη αλλαγή διατύπωσης.

Γιατί με πολλούς τρόπους;

Ο πλουραλισμός των λύσεων είναι καλό ζητούμενο. Εξάλλου στις μέρες μας η Μαθηματική Ανάλυση, λόγω των Πανελλαδικών εξετάσεων, έχει επισκιάσει τους άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία όμως, που τόσο έχουν υποβαθμιστεί στην εποχή μας, είναι παρούσες και μπορούν να λύσουν πολλά προβλήματα. Όσα θα ακολουθήσουν σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν τρόπο αντιμετώπισης του θέματος στις Πανελλαδικές εξετάσεις. Είναι περισσότερο διδακτικές προτάσεις και όχι συνταγές για τις εξετάσεις. Είναι για διδακτική κατανάλωση και όχι για εξεταστική. Για να «ανοίγει» το μυαλό. Πέραν των εξετάσεων υπάρχει και ο εαυτός μας και τα Μαθηματικά εκτός από αναγκαία για τις εξετάσεις είναι και όμορφα.

Βασικές μεταβλητές: Η πλευρά α του τετραγώνου και η ακτίνα ρ του κύκλου

Έστω Π η περίμετρος του τετραγώνου με πλευρά α και L το μήκος του κύκλου με ακτίνα ρ, σε μέτρα. Είναι $\Pi = 4\alpha$ και $L = 2\pi\rho$. Ισχύουν:

- $0 < \Pi < 8 \iff 0 < 4\alpha < 8 \iff 0 < \alpha < 2$
- $0 < L < 8 \iff 0 < 2\pi\rho < 8 \iff 0 < \rho < \dfrac{4}{\pi}$
- $\Pi + L = 8 \iff 4\alpha + 2\pi\rho = 8 \iff 2\alpha + \pi\rho = 4$

Το άθροισμα Ε των εμβαδών των δυο σχημάτων, σε τετραγωνικά μέτρα, είναι:

$$E = \alpha^2 + \pi\rho^2$$

Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα Ε των εμβαδών ελαχιστοποιείται, μόνο όταν $\alpha = 2\rho$.

❶^{ος} τρόπος

Ισχύει: $4\alpha + 2\pi\rho = 8 \iff \pi\rho = 4 - 2\alpha \iff \rho = \dfrac{4 - 2\alpha}{\pi}$

Για το άθροισμα Ε των εμβαδών των δυο σχημάτων έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= \alpha^2 + \pi\rho^2 \\ &= \alpha^2 + \pi\left(\frac{4 - 2\alpha}{\pi}\right)^2 \\ &= \frac{\pi\alpha^2 + 16 - 16\alpha + 4\alpha^2}{\pi} \\ &= \frac{\pi + 4}{\pi}\alpha^2 - \frac{16}{\pi}\alpha + \frac{16}{\pi} \end{aligned}$$

Η τιμή του παραπάνω τριωνύμου ως προς α γίνεται ελάχιστη όταν:

$$\alpha = -\frac{-\dfrac{16}{\pi}}{2\dfrac{\pi + 4}{\pi}} = \frac{8}{\pi + 4}$$

Τότε όμως είναι:

$$\begin{aligned} 2\rho &= 2\frac{4 - 2\alpha}{\pi} \\ &= 2\frac{4 - 2\dfrac{8}{\pi + 4}}{\pi} \\ &= 2\frac{4\pi + 16 - 16}{\pi(\pi + 4)} \\ &= \frac{8}{\pi + 4} = \alpha \end{aligned}$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται, μόνο όταν $\alpha = 2\rho$

❷^{ος} τρόπος

Ισχύει: $4\alpha+2\pi\rho=8 \Leftrightarrow 2\alpha=4-\pi\rho \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{4-\pi\rho}{2}$

Για το άθροισμα Ε των εμβαδών των δυο σχημάτων έχουμε:

$$\begin{aligned} E&=\alpha^2+\pi\rho^2\\ &=\left(\frac{4-\pi\rho}{2}\right)^2+\pi\rho^2\\ &=\frac{16-8\pi\rho+\pi^2\rho^2+4\pi\rho^2}{4}\\ &=\frac{\pi(\pi+4)}{4}\rho^2-2\pi\rho+4 \end{aligned}$$

Η τιμή του παραπάνω τριωνύμου ως προς ρ γίνεται ελάχιστη όταν:

$$\rho=-\frac{-2\pi}{2\dfrac{\pi(\pi+4)}{4}}=\frac{4}{\pi+4}$$

Τότε όμως είναι:

$$\begin{aligned} \alpha&=\frac{4-\pi\rho}{2}\\ &=\frac{4-\pi\dfrac{4}{\pi+4}}{2}\\ &=\frac{4\pi+16-4\pi}{2(\pi+4)}\\ &=\frac{8}{\pi+4}=2\rho \end{aligned}$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται, μόνο όταν $\alpha=2\rho$

❸^{ος} τρόπος

Ισχύουν $2\alpha+\pi\rho=4$ και $(\alpha-2\rho)^2\geq 0$. Επομένως:

$$\begin{aligned} (2\alpha+\pi\rho)^2+\pi(\alpha-2\rho)^2\geq 4^2+\pi\cdot 0^2 &\Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha\pi\rho+\pi^2\rho^2+\pi\alpha^2-4\alpha\pi\rho+4\pi\rho^2\geq 16\\ &\Leftrightarrow (\pi+4)\alpha^2+\pi(\pi+4)\rho^2\geq 16\\ &\Leftrightarrow \alpha^2+\pi\rho^2\geq\frac{16}{\pi+4}\\ &\Leftrightarrow E\geq\frac{16}{\pi+4} \end{aligned}$$

Το άθροισμα Ε των εμβαδών γίνεται ελάχιστο όταν ισχύει η ισότητα, δηλαδή μόνο όταν:

$$(\alpha-2\rho)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=2\rho$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται, μόνο όταν $\alpha=2\rho$

❹ος τρόπος

Για το άθροισμα Ε των εμβαδών των δυο σχημάτων έχουμε:

$$\begin{aligned}E &= \alpha^2+\pi\rho^2\\ &= \frac{(\pi+4)(\alpha^2+\pi\rho^2)}{\pi+4}\\ &= \frac{\pi\alpha^2+4\alpha^2+\pi^2\rho^2+4\pi\rho^2}{\pi+4}\\ &= \frac{\pi\alpha^2-4\alpha\pi\rho+4\alpha\pi\rho+4\alpha^2+\pi^2\rho^2+4\pi\rho^2}{\pi+4}\\ &= \frac{\pi(\alpha-2\rho)^2+(2\alpha+\pi\rho)^2}{\pi+4}\\ &= \frac{\pi}{\pi+4}(\alpha-2\rho)^2+\frac{16}{\pi+4}\end{aligned}$$

Η παραπάνω παράσταση γίνεται ελάχιστη μόνο όταν:

$$(\alpha-2\rho)^2=0 \iff \alpha=2\rho$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται, μόνο όταν $\alpha=2\rho$

❺ος τρόπος

Στο βιβλίο μαθηματικών της Γ' τάξης Γυμνασίου και συγκεκριμένα στην εφαρμογή 7 της σελίδας 47, αποδεικνύεται η ταυτότητα Lagrange. Δηλαδή αποδεικνύεται ότι:

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$$

Αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα για $\alpha=\alpha$, $\beta=\rho\sqrt{\pi}$, $x=2$ και $y=\sqrt{\pi}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\pi\rho^2)(4+\pi)=(2\alpha+\pi\rho)^2+(\alpha\sqrt{\pi}-2\rho\sqrt{\pi})^2 \quad &\iff \quad (\pi+4)E=4^2+\pi(\alpha-2\rho)^2\\ &\iff \quad E=\frac{\pi}{\pi+4}(\alpha-2\rho)^2+\frac{16}{\pi+4}\end{aligned}$$

Το άθροισμα Ε των εμβαδών γίνεται ελάχιστο μόνο όταν:

$$(\alpha-2\rho)^2=0 \iff \alpha=2\rho$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται, μόνο όταν $\alpha=2\rho$

❻ος τρόπος

Στο βιβλίο μαθηματικών προσανατολισμού της Β' τάξης Λυκείου και συγκεκριμένα στην εφαρμογή 1 της σελίδας 44, αποδεικνύεται ότι:

αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δυο διανύσματα του επιπέδου τότε: $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$, δηλαδή μόνο όταν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$.

Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{\alpha}=(\alpha,\rho\sqrt{\pi})$ και $\vec{\beta}=(2,\sqrt{\pi})$. Με βάση το παραπάνω έχουμε:

$$\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| \le |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |2\alpha+\pi\rho| \le \left|\sqrt{\alpha^2+\pi\rho^2}\right|\cdot\left|\sqrt{4+\pi}\right|$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2+\pi\rho^2)(\pi+4) \ge (2\alpha+\pi\rho)^2$$

$$\Leftrightarrow (\pi+4)E \ge 4^2$$

$$\Leftrightarrow E \ge \frac{16}{\pi+4}$$

Το άθροισμα Ε των εμβαδών γίνεται ελάχιστο όταν ισχύει η ισότητα, δηλαδή μόνο όταν:

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha & \rho\sqrt{\pi}\\ 2 & \sqrt{\pi}\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\sqrt{\pi}-2\rho\sqrt{\pi}=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=2\rho$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται, μόνο όταν $\alpha=2\rho$

Παρατηρήσεις

Το ελάχιστο άθροισμα των εμβαδών είναι:

$$E_{min}=\frac{16}{\pi+4}\simeq 2{,}24\ \text{m}^2$$

Αυτό συμβαίνει μόνο όταν:

$$\alpha=2\rho=\frac{8}{\pi+4}\simeq 1{,}12\ \text{m}$$