ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΧΡΗΣΤΟΥ ΑΠ. ΤΣΙΓΑΡΙΔΑ

125 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

ΜΑΘΗΤΑΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΑΙ

Κρατήσατε τὸ σύνθημα καὶ παρασύνθημα τοῦ ἔτους 1978

ΔΙΑΚΟΣ - ΑΛΑΜΑΝΑ

ΤΣΙΓΑΡΙΔΑΣ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ - ΙΑΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Λαμία κατὰ Ὀκτώβριον 1977

ΟΙ 125 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΕΣ

1. Δε ότι $\frac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha-\beta)^2}=\alpha+2\beta+\frac{3\beta^2}{\alpha-\beta}$

2. Να γίνη γινόμενον η παράστασις $\alpha^4\beta^4+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2-1$

3. Είναι $A=\alpha^2-4\beta^2$, $B=\alpha^3+8\beta^3$, $\Gamma=\alpha^2+5\alpha\beta+6\beta^2 \to$ γινόμενα;

4. Εύρετε Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. των παραστάσεων.

5. Υπολογίσατε την παράστασιν $\Gamma=x^{\frac{\beta\gamma}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha-\beta}}\cdot x^{\frac{\gamma\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{\beta-\gamma}}\cdot x^{\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma-\alpha}}$.

6. Δε ότι $2(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})(\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})=\square$

7. Εάν η παράστασις $A=\alpha^4-6\alpha^2+25$ όπου α θετικός ακέραιος είναι πρώτος αριθμός, να ευρεθούν οι A και α.

8. Δε ότι $8\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+(\beta^2+\alpha^2)^2=\square$.

9. Εάν $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{3}$ τότε $\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=0$

10. Να τεθή η παράστασις $12x(y-x)$, υπό την μορφήν διαφοράς τετραγώνων

11. Να αποδειχθή ότι αι ακόλουθοι ισότητες:
$\alpha=\beta=0$, $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$, $|\alpha+\beta|^2=\alpha^2+\beta^2$, $|\alpha|+|\beta|=0$, $\alpha^2+\beta^2=0$
είναι ισοδύναμοι —

12. Εάν $\frac{y+\omega-x}{\alpha}=\frac{\omega+x-y}{\beta}=\frac{x+y-\omega}{\gamma}$ τότε $\frac{x}{\beta+\gamma}=\frac{y}{\gamma+\alpha}=\frac{\omega}{\alpha+\beta}$

13. Δια θετικούς αριθμούς x, y. Δε ότι $x^5+y^5\geq x^4y+xy^4$.

14. Υπολογίσατε το ανάπτυγμα: $(1-x+2x^2)^4=$;

15. Να γίνη γινόμενον η παράστασις $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

16. Ομοίως η παράστασις $2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$.

17. Να γίνη γινόμενον η παράστασις $x^3+y^3+\omega^3$ αν $x^2+y^2=\omega^2$

18. Δια ποίας τιμάς του φυσικού ν το κλάσμα $\frac{24}{\nu-5}$ ανάγεται εις φυσικόν αριθμόν.

19. Να ευρεθή το γινόμενον $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^\nu})$

20. Εάν $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=2$, $x^3+y^3+z^3=3$. Εύρετε το $x^4+y^4+z^4$;

21. Επιλύσατε την εξίσωσιν: $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$

22. Να ευρεθή ο Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. των παραστάσεων
(i) $\alpha^2+4\alpha+3$ (ii) $\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6$ (iii) $\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-2$

23. Αν $\alpha\beta(x^2+y^2)=\alpha^2y^2+\beta^2x^2$ και $\alpha\neq\beta$ Δε ότι ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}=\square$.

24. Να λυθή η εξίσωσις: $\frac{x-3}{x-4}+\frac{x-4}{x-3}=\frac{2x-k}{x-5}$ αν το μηδέν είναι ρίζα της. —

25 Να ευρεθούν οι ακέρ. αριθμοί x, y, z τ.ω.:
$x^2+y^2+z^2=18$ (1) $x+y+4z=18$ (2)

26 Εάν ο αριθμός 3 είναι ο Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων
$x^2(x^2-10)+9$ και $x^2(x^2-17)+16$. Δ.ό. $x=\pm 2$

27 Δ.ό. ο πενταψήφιος αριθμός γραφόμενος με βάσιν τετράγωνον 4
ο αριθμός 1,331 είναι τέλειος κύβος.

28 Να αποδειχθή ότι κάθε πολλαπλάσιον του 4 είναι ίσον προς
την διαφοράν δύο τετραγώνων ακεραίων.

29 Να ευρεθή η τετραγωνική ρίζα της παραστάσεως:
$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)+1$.

30 Να υπολογισθή το γινόμενον $\Pi=(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})\cdots(1+\frac{1}{3^{2\nu}})$

31 Να λυθή η εξίσωσις $x^4+x(x-k)=\frac{1}{x}$

32 Αποδώσατε γραφικώς την συνάρτησιν. $y=|x|$.

33 Να λυθή το σύστημα $\frac{x}{y}=xy=x+y$

34 Επιλύσατε την $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$ εις ρητ. αριθμούς

35 Διά ποια x αληθεύει η ανίσωσις $x+\min(x+1, 2x-1)<2$

36 Εάν $x=a^2+b^2$. Δ.ό. ο αριθμός $2^\nu x$ είναι άθροισμα
δύο τετραγώνων, ∀ ακεραίαν θετικήν τιμήν του ν.

37 Να γίνη γινόμενον η παράστασις $A=k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3$

38 Ομοίως η παράστασις. $A=x(y^2+\varphi^2-x^2)+y(\varphi^2+x^2-y^2)$.

39 Να γίνουν γινόμενα αι παραστάσεις $A=250(x-y)^3+2$
$B=x^2+y^2-4x-4y+2xy+3$

40 Να απλοποιηθή η παράστασις $A=2(a^3+b^3)-3(a^2+b^2)$ αν $a+b=1$

41 Δ.ό. αν $a<b$ τότε $a<\frac{a+b}{2}<b$.

42 Επιλύσατε την εξίσωσιν $\frac{1+ax}{1-ax}=\frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}$ θέτοντες $ax=y$.

43 Δ.ό. $\frac{3x-1}{x^2+7}<\frac{1}{2}$ αληθεύει πάντοτε εκτός αν $x=3$

44 Εάν $a^2+b^2=1$ Δ.ό. $(3a-4a^3)^2+(4b^3-3b)^2=1$

45 Αν $a+b+\gamma=k$ Δ.ό. η παράστασις $A=(ak+b\gamma)(bk+\gamma a)(\gamma k+ab)=\Pi$

46 Διά ποιας τιμάς των a και b το σύστημα
$(2a-1)x+by=7$ (1)
$(a-2)x+(b-1)y=2$ (2) έχει την λύσιν $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$

47 Να απλοποιηθή η παράστασις $A=\frac{(a+b)(a+\gamma)}{(a+b+\gamma)^2}$ αν $a^2=b^2+\gamma^2$.

48. Να δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $2(x+\sqrt{x^2-y^2})(x-y) \mid x>0$ εἶναι $\square$.

49. Να εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $a^2-ab+b^2-\frac{-3a^2b-3ab^2}{a+b}$ ἂν $a+b=5$. —

50. Θεωροῦμεν τὰ τρία διανύσματα:
$\vec{u}_1=(-1,+2,+3)$ $\vec{u}_2=(+4,-2,+2)$ $\vec{u}_3(+5,-1,+6)$ Ὑπολογίσατε
τὰς συνιστώσας τοῦ διανύσματος $\vec{V}=-\vec{u}_1+2\vec{u}_2+3\vec{u}_3$

51. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ G τὸ βαρύκεντρό του. Θεωροῦμεν τὰ Α', Β', Γ' καὶ G' τὰς προβολὰς τῶν Α, Β, Γ καὶ G ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον (P) παράλληλα πρὸς μία διεύθυνση (δ). Δεῖξτε ὅτι $\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{\Gamma\Gamma'}=3\vec{GG'}$.

52. Δεῖξτε ὅτι $ax^2+bx+\gamma = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4a\gamma-b^2}{4a^2}\right]$

53. Να λυθῇ τὸ σύστημα
$$x^3+y^3=28 \quad (1)$$
$$x^2y+xy^2=12 \quad (2)$$

54. Ἐὰν $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in R$ δεῖξτε ὅτι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4 \geq 4\alpha\beta\gamma\delta$.

55. Ἐὰν $x,y\in R$ δεῖξτε ὅτι $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4\geq 1$

56. Ἐὰν $\alpha+\beta=1$ τότε $\alpha^4+\beta^4\geq \frac{1}{8}$

57. Δεῖξτε ὅτι $x^8-x^5+x^2-x+1>0 \quad \forall x\in R$

58. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$ δεῖξτε ὅτι τὸ $K=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+\nu)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$ ἐξ. τῶν α, β.

59. Να δειχθῇ ὅτι $2x^4+1\geq 2x^3+x^2$ γιὰ $\forall x\in R$.

60. Ὁ μεγαλύτερος ἐκ δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ 1524, ὁ δὲ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν εἶναι ὁ 127. Ποῖος ὁ μικρότερος ἐκ τούτων —

61. Ἐὰν $f(x)=ax^2+bx+\gamma$ τότε $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$ εἶναι ἀνεξάρτητο
A: α B: β Γ: γ.

62. Ἐὰν $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$ τότε $f(3)$ εἶναι
A μηδέν
B ἄπειρο
Γ ἀπροσδιόριστο
Ε - 12

63. Ἡ ἰσότης $(n+1)^2=2n^2-n+3$ εἶναι ἀληθὴς διὰ $n=1$ καὶ $n=2$. Εἶναι ἀληθὴς καὶ δι' οἱονδήποτε n.

64. Εἶναι $2+4+6+\dots+2n=n^4-10n^3+36n-49n+24$ εἶναι ἀληθὴς διὰ $n=1,2,3,4$. Εἶναι ἀληθὴς $\forall n$.

65. Τὸ τρίγωνο μὲ κορυφὰς $(-1,-2)$ $(3,1)$ $(-4,2)$ εἶναι ἰσοσκελές, ὀρθογώνιο, ἢ ἔχει ἐμβαδὸν 25;

66. Ἡ εὐθεῖα διὰ τοῦ $(0,2)$ κάθετος στὴ $3x-4y=7$ εἶναι:
A: $3x-4y=-8$ B: $3x+4y=8$ Γ: $4x-3y=-6$ Δ: $4x+3y=2$ $\boxed{E}$: $4x+3y=6$.

67. Σχεδιάσατε τὴν ἀνίσωση $(x^2+y^2-4)(y-1)<0$

68. Ὑπολογίσατε τὴν παράσταση $\frac{ax^2+by^2+\gamma z^2}{b\gamma(y-z)^2+\gamma a(z-x)^2+ab(x-y)^2}$ ἂν $ax+by+\gamma z=0$

69 Δεῖξον ὅτι $[(1+\sqrt{2})\alpha+\beta][(1-\sqrt{2})\alpha+\beta]=[(1+\sqrt{2})\beta-\alpha][(\sqrt{2}-1)\beta+\alpha]$

70 Νὰ γίνῃ ῥητὸς ὁ παρονομαστὴς $\dfrac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

71 Λύσατε τὸ σύστημα $34_{(x)}-31_{(y)}=0$

$560_{(x)}-448_{(y)}=0$ ἐνῷ x καὶ y εἶναι αἱ βάσεις ἀριθμητικῶν συστημάτων —

72 Ἐπιλύσατε τὸ σύστημα: $(x+y)\perp 4=60$

$(x-y)T3=39$ ἐνῷ:

$\alpha\perp\beta=3\alpha+3\beta+5\alpha\beta+2$

$\alpha T\beta=2\alpha+2\beta+2\alpha\beta+1$

73 Οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 5, 6 ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $6^3=3^3+4^3+5^3$. Ὑπάρχουν ἄλλοι ἀκέραιοι διαδοχικοὶ μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα;

74 Ἐὰν p εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 5, δεῖξον $5/p^{8n}+3p^{4n}-4$.

75 Εὕρετε τὰς κυβικὰς ῥίζας τῆς μονάδος (1) καὶ δεῖξον ὅτι αὗται ἀποτελοῦν ὁμάδα —

76 Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $f(x)\equiv x^3-\alpha^{-\frac{2}{3}}\beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)x+\beta^{\frac{1}{2}} : x-{}^{\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{1}{2}}$

77 Δεῖξον ὅτι $\sqrt{2}(2\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2})\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\equiv\sqrt{(\alpha+\beta)^3}-\sqrt{(\alpha-\beta)^3}$ συνθῆκαι

$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha>\beta$. θέσατε $\alpha+\beta=x^2$, $\alpha-\beta=y^2 \Rightarrow \alpha=\frac{x^2+y^2}{2}$ —

78 Ὑπολογίσατε τὴν παράστασιν x^3+3x, ὅταν $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

79 Δεῖξον ὅτι $(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+(\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}\equiv(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

80 Ἂν $\dfrac{x^2-yz}{\alpha}=\dfrac{y^2-zx}{\beta}=\dfrac{z^2-xy}{\gamma}$ τότε $\dfrac{\alpha^2-\beta\gamma}{x}=\dfrac{\beta^2-\gamma\alpha}{y}=\dfrac{\gamma^2-\alpha\beta}{z}$.

81 Λύσατε τὴν ἐξίσωσιν. $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma}+\dfrac{\alpha+\beta}{4}-\dfrac{\gamma+\beta}{2}=\dfrac{\alpha-\gamma}{2}+\dfrac{\alpha}{\gamma}$. Λύσατε ὡς πρὸς α, β καὶ γ

$\alpha=\frac{\gamma(\beta-1)}{\gamma+\beta}$, $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{\gamma-\alpha}$, $\gamma=\frac{\alpha(\gamma+\beta)}{\beta-1}$

82 Ἐπιλύσατε τὰ συστήματα. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5$, $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2xy$ $\quad$ $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ $\quad$ $\dfrac{2xy}{3x-y}=4,\ \dfrac{3xz}{x-z}=-\dfrac{9}{2},\ \dfrac{yz}{2y-z}=6$

$(x,y,z)=(1,2,3)$

83 Ἂν x, y, ω γωνίαι τριγώνου καὶ $\dfrac{x+y}{17}=\dfrac{y+\omega}{11}=\dfrac{\omega+x}{25}$ δεῖξον ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὀρθὴν τὴν ω. —

84 Δεῖξον τὸ σύστημα $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$, $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{x^{m+1}}{\alpha}+\dfrac{y^{m+1}}{\beta}=\left(\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^m$ εἶναι συμβιβαστόν —

85 Ἐπίλ. τὴν ἐξίσωσιν: $\sqrt{x+4}\pm\sqrt{x+5}\pm\sqrt{x+3}\pm\sqrt{x+2}=0$

86 Παραγοντοποιήσατε τήν παράστασιν: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

87 Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma=0$ καί ἐάν $S_\nu=\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu$ ἔχομεν: $2S_4=S_2^2$, $\frac{S_3S_2}{S_5}=\frac{6}{5}$,

$\frac{S_5}{S_4}=\frac{5S_3}{3S_2}$, $\frac{5S_7}{7S_5}=\frac{S_4}{S_2}$.

88 Ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν: $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}$.

89 Ἐπιλύσατε τό σύστημα $\frac{y+z}{\alpha}=\frac{z+x}{\beta}=\frac{x+y}{\gamma}=xyz$.

90 Ἄν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=0$ καί $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=0$ τότε $\frac{\alpha^3}{\gamma^2-\beta^2}=\frac{\beta^3}{\alpha^2-\gamma^2}=\frac{\gamma^3}{\beta^2-\alpha^2}$

91 Ἐπιλύσατε ἐν N τήν ἐξίσωσιν $2^x+2^y+2^z=2336$.

92 Ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν: $x^2+2=y(x+3)$

93 Ἐπιλύσατε τήν ἐξίσωσιν $4^x\cdot 9^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}\cdot 9^x=210$

94 Ἄν $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ καί $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}=0$ δεῖξατε $\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}=0$

95 Ἐπιλύσατε τό σύστημα: $7x^2-4x-3>0$ (1)

$\frac{x+2}{4-x}>0$ (2)

96 Ἄν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=0$ δεῖξατε $\sum\frac{\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2+\alpha^2-\beta\gamma}=1$.

97 Νά λυθῇ τό σύστημα: $\frac{x}{y}+\frac{y}{\omega}=\frac{y}{\omega}+\frac{\omega}{x}=\frac{\omega}{x}+\frac{x}{y}$.

98 Πότε τό σύστημα: $x=\beta y+\gamma z$
$y=\gamma z+\alpha x$
$z=\alpha x+\beta y$ εἶναι ἀόριστον; ὅτι $\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\gamma}{1+\gamma}=1$.

99 Ἔστω ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ $x^2+px+q=0$ οἱ συντελεσταί p καί q τῆς ὁποίας εἶναι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5 καί 6. Προσδιορίσατε τήν πιθανότητα ὅπως ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ:
1) δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους.
2) δύο ρίζας πραγματικάς καί ἴσας.
3) δύο ρίζας συζυγεῖς μιγαδικάς.

---

100 Κυτίον Α περιέχει τρεῖς ἀριθμούς 2, 3, 4
Κυτίον Β ,, ,, ,, 1, 2, 3.
Ἐξάγομεν ἀπό τό Α ἕνα ἀριθμόν καί τόν λέγομεν β καί ἀπό τό Β ἕνα ἀριθμόν καί τόν λέγομεν γ. Ἔστω ἐξίσωσις $x^2+\beta x+\gamma=0$. Υπολογίσατε τήν πιθανότητα ἡ ἐξίσωσις νά ἔχῃ:
1) δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους
2) μίαν ρίζαν διπλῆν
3) δύο ρίζας μιγαδικάς.

---

101 Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι $\frac{3}{8}$. Νὰ εὑρεθοῦν αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί ἐξ ἑκάστης τῶν ἀκολούθων περιπτώσεων.

1. τὸ γινόμενόν των εἶναι 254616
2. ὁ Μ.Κ.Δ. των = 45
3. τὸ Ε.Κ.Π. των εἶναι 1800.
4. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι 771633.—

102 Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ἀριθμοῦ n τὸ κλάσμα $F=\frac{n+8}{2n-5}$ εἶναι α) ἰσοδύναμον μὲ ἀκέραιον, β) μὲ ἀνάγωγον κλάσμα.

103 Ἐπιλύσατε φυσικοὺς ἀριθμοὺς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-y^2=401$.

104 Νὰ γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις:

(i) $x^3-(a+b+1)x^2+(a+b+ab)x-ab \to (x-1)(x-a)(x-b)$.

(ii) $x^3-ax^2+bx^2-2abx-a^2x+a^2b+a^3 \to (x-a)^2(x+a+b)$.

105 Ἂν $x+y+z=0$ ΔΞ ὅτι $(x^2+y^2+z^2)^2=2(x^4+y^4+z^4)$.

106 Ἐπαληθεύσατε τὴν ταυτότητα $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$ βάσει ταύτης ὑπολογίσατε τὸν ἀριθμὸν $(400\cdot401\cdot402\cdot403)+1=;$ $(161201)^2$

107 Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωσιν.

$$\frac{(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{19}=\frac{(x-a)^2-(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{49}$$

108 Ἐπιλύσατε τὰ συστήματα: α) $\frac{yz}{x}=\frac{10}{3}$, $\frac{zx}{y}=\frac{15}{2}$, $\frac{xy}{z}=\frac{6}{5}$.

β) $x+y+z=3$, $\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha+\beta+\gamma$, $xyz=1$.

109 Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}=2$. Ἐξ αὐτῆς ἀπαλείφοντες $(x-1)^2+(x-2)^2=2(x-1)(x-2)$ ἢ $1=2$. Ποῦ εἶναι τὸ λάθος;

110 Ὑπολογίσατε τὴν ὁρίζουσαν:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3\\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3\\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3\\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3\end{vmatrix}$$

εὑρίσκομεν: $\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)$

111 Ἂν $\alpha<A<\beta$ τότε $(A-\alpha)(A-\beta)<0$ $\quad 2<x^2-8x+17<10 \Rightarrow (x^2-8x+15)(x^2-8x+7)<0$

$\alpha<\frac{A}{3}<\beta$ τότε $(A-3\alpha)(A-3\beta)<0$ $\quad 2<\frac{x^2+8}{3x}<3 \Rightarrow (x^2-6x+8)(x^2-9x+8)<0$

112 Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωσιν $7x+5y=23$ εἰς ἀκεραίους θετικούς.

113 ΔΞ ὅτι $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

114 Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωσιν: $x!+1=(x+1)^2$ / $x\in N$.

115 Νὰ εὑρεθῇ ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς ὥστε τὸ ἄθροισμά του ἢ μὲ τὸ 8 ἢ μετὰ 17 νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.—

116| Δείξτε ὅτι $4[(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta')]=[2(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')-\beta\beta']^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)(\beta'^2-4\alpha'\gamma')$.

117| Νά γίνη γινόμενον ἡ παράστασις $A_1=\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)$ καί ἔπειτα ἡ παράστασις $A_2=(\beta-\gamma)^2(\beta+\gamma-2\alpha)+(\gamma-\alpha)^2(\gamma+\alpha-2\beta)+(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta-2\gamma)$

118| Δείξτε ὅτι $\frac{\beta-\gamma}{1+\beta\gamma}+\frac{\gamma-\alpha}{1+\gamma\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}=0$.

119| Μαθητής ἐρωτηθείς, ποῖος εἶναι ὁ βαθμός του εἰς τά ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ἀπεκρίθη: ἐάν τοῦτον ἐλαττώσει κατά 6, εἶτα τόν διαιρέσει διά $\frac{3}{2}$, θά εὕρῃ τό ἴδιο. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμός του;

120| Ἄν $x, y \in \mathbb{R}$ καί ἰσχύει ἡ σχέσις $1+x+|x|=2y(1+|x|)$. Δεῖξτε ἰσχύει (1) $|2y-1|<1$, $2y-1=x(1-|2y-1|)$ καί ἀντιστρόφως.

121| Ὑπολογίσατε τήν παράστασιν $A=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}$. (= -2.

122| Γνωρίζοντες ὅτι $96842=256\cdot375+842$· προσδιορίσατε χωρίς νά ποιήσητε τήν διαίρεσιν τό πηλίκον καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 96842 δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 256 καί 375.

123| Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως εἶναι $132^2=21054$; → 7δικόν.

124| Μαθητής πολλαπλασιάζων ἕναν ἀριθμόν ἐπί 40 παρέλειψεν [illegible] τό 0 εἰς τήν θέσιν τοῦ γινομένου καί οὕτως εὗρε γινόμενον κατά 13932 μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ. Ποῖος ἦτο ὁ πολλαπλασιαστέος;

125| Ἐδαπανήθη τό ἥμισυ [illegible] κυλινδρικοῦ δοχείου [illegible] 0,8 m καί ὕψος 50 cm. Διά νά [illegible] ἔδωσε δύο κυλινδρικά δοχεῖα ἐλαίου [illegible] 4 [illegible] τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ποίαν [illegible] τήν διάμετρον;

ΟΙ 125 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

(1)

Δείξτε ότι

$$\frac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha-\beta)^2} = \alpha+2\beta+\frac{3\beta^2}{\alpha-\beta}$$

Λύση. Αον μέλος: $\frac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)^2}$

$= \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}$.

Βον μέλος: $\alpha+2\beta+\frac{3\beta^2}{\alpha-\beta} = \frac{(\alpha+2\beta)(\alpha-\beta)+3\beta^2}{\alpha-\beta} =$

$= \frac{\alpha^2-\alpha\beta+2\alpha\beta-2\beta^2+3\beta^2}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}$.

ισχύουσας $\alpha\neq\beta$. —

(2)

Να γίνει γινόμενον η παράσταση

$K=\alpha^4\beta^4+\alpha^3\beta^3\underline{+}\alpha^2\beta^2-1$.

$K=(\alpha^4\beta^4-1)+\alpha^2\beta^2(\alpha\beta+1) =$

$=(\alpha^2\beta^2+1)(\alpha\beta+1)(\alpha\beta-1)+\alpha^2\beta^2(\alpha\beta+1) =$

$(\alpha\beta-1)\{(\alpha^2\beta^2+1)(\alpha\beta+1)+\alpha^2\beta^2\} =$

$=(\alpha\beta-1)\{\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta+1+\alpha^2\beta^2\} =$

$=(\alpha\beta-1)\{\alpha^3\beta^3+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta+1\}$

(5)

Υπολογίσατε την παράσταση.

$$Γ = x^{\frac{β+γ}{γ-α}\cdot\frac{1}{α-β}} \cdot x^{\frac{γ+α}{α-β}\cdot\frac{1}{β-γ}} \cdot x^{\frac{α+β}{β-γ}\cdot\frac{1}{γ-α}} = ;$$

Λύση

$$Γ = x^{\frac{(β+γ)(β-γ)+(γ-α)(γ+α)+(α+β)(α-β)}{E}} = x^0 = \underline{1}.$$

(3)-(4)

Των παραστάσεων $A = α^2-4β^2$

$Β = α^3+8β^3$

$Γ = α^2+5αβ+6β^2$

Ποίος ο Μ.Κ.Δ και Ε.Κ.Π.

Λύση.

$$\left.\begin{aligned} A &= (α+2β)(α-2β) \\ Β &= (α+2β)(α^2-2αβ+4β^2) \\ Γ &= (α+2β)(α+3β). \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

Μ.Κ.Δ $α+2β$

Ε.Κ.Π. $(α+2β)(α-2β)(α+3β)(α^2-2αβ+4β^2)$.

(7)

Ἐὰν ἡ παράστασις $A = a^4 - 6a^2 + 25$ ὅπου α φυσικὸς ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ Α καὶ α. —

Λύσις. Ἡ παράστασις γράφεται:

$$A = a^4 + 10a^2 + 25 - 16a^2 = (a^2+5)^2 - 16a^2$$

$$= (a^2+4a+5)(a^2-4a+5)$$

Ἐπειδὴ Α πρῶτος, ἐξ τῶν παραγόντων ὁ εἷς θὰ εἶναι ἡ μονάς. ἄρα εἴτε $a^2+4a+5=1$ εἴτε $a^2-4a+5=1$ ὁπότε $(a+2)^2=0$ καὶ $a=-2$ ἢ $(a-2)^2=0$ καὶ $a=2$. Ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἡ -2 ἀπορρίπτεται λύσις διότι ὁ α φυσικός. ἄρα $a=2$ καὶ κατὰ συνέπεια $A=17$. —

(8)

Δεῖξον $2(a+\sqrt{a^2+b^2})(b+\sqrt{a^2+b^2}) = \square$

Ἀπόδειξις

$$K = 2\left[ab + a\sqrt{a^2+b^2} + b\sqrt{a^2+b^2} + (a^2+b^2)\right] =$$

$$= 2ab + 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2} + 2(a^2+b^2) =$$

$$= (a^2+b^2+2ab) + 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2} + (a^2+b^2)$$

$$= (a+b)^2 + 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2} + \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 =$$

$$= \left[(a+b) + \sqrt{a^2+b^2}\right]^2 = \square$$

(9)

Εάν $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{3}$ τότε $\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=0$.

Απόδειξις.

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3=(\sqrt{3})^3 \Rightarrow$$

$$\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+3\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=3\sqrt{3} \quad \text{ή}$$

$$\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+3\sqrt{3}=3\sqrt{3} \Rightarrow \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=0.$$

(8)

Δείξατε ότι $8\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+(\beta^2+\alpha^2)^2=\square$

Απόδειξις. Επειδή $\beta^2+\alpha^2=(\beta+\alpha)^2-2\beta\alpha$ τότε

$$8\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+[(\beta+\alpha)^2-2\beta\alpha]^2=$$

$$8\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+(\beta+\alpha)^4-4\beta\alpha(\beta+\alpha)^2+4\beta^2\alpha^2=$$

$$(\beta+\alpha)^4+4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+4\beta^2\alpha^2=$$

$$[(\beta+\alpha)^2]^2+2\cdot 2\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+(2\beta\alpha)^2=$$

$$[(\beta+\alpha)^2+2\beta\alpha]^2=[(\alpha^2+\beta^2)+4\alpha\beta]^2$$

(11)

Να αποδειχθῇ ὅτι τὰ ἀκόλουθα εἶναι ἰσότητες: $\alpha=\beta=0$, $|\alpha+\beta|=|\alpha|=|\beta|$, $|\alpha+\beta|^2=\alpha^2=\beta^2$, $|\alpha|+|\beta|=0$, $\alpha^2+\beta^2=0$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

(10)

Νὰ τεθῇ ἡ παράστασις $12x(y-x)$ ὑπό τὴν μορφὴν διαφορᾶς τετραγώνων. —

Ἀναγράφομεν ἐκ τῆς ταυτότητος

$$4\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2 \quad \text{τότε}$$

$$12x(y-x)=4\cdot\underset{\alpha}{(3x)}\underset{\beta}{(y-x)} \quad \text{καὶ ἔχομεν}$$

$$12x(y-x)=(3x+y-x)^2-[3x-(y-x)]^2=$$
$$=(2x+y)^2-(4x-y)^2$$

ἢ ἄλλως

$$12x(y-x)=12xy-12x^2=$$
$$=8xy+4xy-16x^2+4x^2=$$
$$=8xy+4xy-16x^2+4x^2+y^2-y^2=$$
$$=(y^2+4xy+4x^2)-(y^2-8xy+16x^2)$$
$$=(y+2x)^2-(4x-y)^2$$

13

Για θετικούς αριθμούς x, y να δείξετε ότι
$x^5+y^5 \geq x^4y+xy^4$.

Λύση. Αρκεί να είναι:

$(x^5-x^4y)+(y^5-xy^4) \geq 0$ ή

$x^4(x-y)+y^4(y-x) \geq 0$ ή

$x^4(x-y)-y^4(x-y) \geq 0$ ή

$(x-y)(x^4-y^4) \geq 0$ ή

$(x-y)(x^2+y^2)(x+y)(x-y) \geq 0$ ή

$(x-y)^2(x^2+y^2)(x+y) \geq 0$ που ισχύει

για θετικούς. Το = όταν $x=y$.

(12)

Εάν $\dfrac{y+\omega-x}{\alpha}=\dfrac{\omega+x-y}{\beta}=\dfrac{x+y-\omega}{\gamma}$ δείξτε $\dfrac{x}{\beta+\gamma}=\dfrac{y}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\omega}{\alpha+\beta}$.

Είναι $\dfrac{y+\omega-x}{\alpha}=\dfrac{\omega+x-y}{\beta}=\dfrac{x+y-\omega}{\gamma}=\dfrac{\omega+x-y+x+y-\omega}{\beta+\gamma}=$

$\dfrac{x+y-\omega+y+\omega-x}{\gamma+\alpha}=\dfrac{y+\omega-x+\omega+x-y}{\alpha+\beta}=$

$\dfrac{2x}{\beta+\gamma}=\dfrac{2y}{\gamma+\alpha}=\dfrac{2\omega}{\alpha+\beta} \Rightarrow$

$\dfrac{x}{\beta+\gamma}=\dfrac{y}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\omega}{\alpha+\beta}$.

(15)

Νά γίνη γινόμενον η παράστασις:

$x^3+y^3+z^3-3xyz$.

$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz=$

$[(x+y)^3+z^3]-3xy(x+y+z)=$

$(x+y+z)[(x+y)^2-z(x+y)+z^2]-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)\{(x+y)^2-z(x+y)+z^2-3xy\}=$

$=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\}$.

(14)

Υπολογίσατε το ανάπτυγμα:

$(1-x+2x^2)^4$;

Λύσις $(1-x+2x^2)^4=[(1-x)+2x^2]^4=(a+b)^4$

όπου $1-x=a$ και $2x^2=b$. Είναι

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ ή

$=(1-x)^4+4(1-x)^3\cdot 2x^2+6(1-x)^2(2x^2)^2+4\cdot(1-x)(2x^2)^3+(2x^2)^4$

κτλ

Νά βρεθῇ γινόμενον ἡ παράστασις $x^3+y^3+\omega^3$ ὅταν $x^2+y^2=\omega^2$.

Ἔχομεν $x^3+y^3+\omega^3 = x^3+y(y^2)+\omega^3 = x^3+y(\omega^2-x^2)+\omega^3$

$= (x+\omega)(x^2-\omega x+\omega^2)+y(\omega-x)(\omega+x) = (\omega+x)(x^2-\omega x\cancel{+\omega^2+y^2}$

$+y\omega-yx) = (\omega^2-y^2-\omega x+\omega^2+y\omega-yx)(\omega+x) =$

$(\omega+x)[(\omega-y)(\omega+y)-x(\omega+y)+\omega(y+\omega)] =$

$(\omega+x)(y+\omega)(2\omega-y-x)$.

Νά γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις:

$2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$.

Ἡ παράστασις γράφεται:

$-(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2) =$

$-[\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2-4\beta^2\gamma^2]$

$= -[(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2)-4\beta^2\gamma^2]$

$= -[(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2-(2\beta\gamma)^2] =$

$= -[(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma)(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma)] =$

$= -[\alpha^2-(\beta-\gamma)^2][\alpha^2-(\beta+\gamma)^2] =$

$= -(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$

$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$.

(19)

Νά εὑρεθῇ τό γινόμενον:

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^\nu})$

(18)

Διά ποιάς τιμάς τοῦ ἀκεραίου x τό κλάσμα $\frac{24}{x-5}$ ἀνάγεται εἰς φυσικόν ἀριθμόν. —

Λ.η. Δεῖ $(x-5)/24$

ἤτοι

$x-5=\pm 1$	$x=6,4$
$x-5=\pm 2$	$x=7,3$
$x-5=\pm 3$	$x=8,2$
$x-5=\pm 4$	$x=9,1$
$x-5=\pm 6$	$x=11,-1$
$x-5=\pm 8$	$x=13,-3$
$x-5=\pm 12$	$x=17,-7$
$x-5=\pm 24$	$x=29,-19$

(21)

Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωσιν:

$$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2.$$

Λύση γράφεται: $[(x+2)(x+12)][(x+3)(x+8)] = 4x^2$

ἢ $(x^2+14x+24)(x^2+11x+24) = 4x^2$ ἢ

$[(x^2+24)+14x][(x^2+24)+11x] - 4x^2 = 0$ ἢ

$(t+14x)(t+11x) - 4x^2 = 0$ ἢ

$t^2+25xt+14\cdot 11x^2-4x^2 = 0$ ἢ

$t^2+25xt+150x^2=0$ ἢ

$t^2+15xt+10xt+150x^2=0$ ἢ

$t(t+15x)+10x(t+15x)=0$ ἢ

$(t+15x)(t+10x)=0$ ὅθεν:

$t+15x=0$ ἢ $t+10x=0 \Longrightarrow$

$x^2+24+15x=0 \Longrightarrow$

$x^2+24+10x=0 \Longrightarrow$

(20)

Ἐάν $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=2$, $x^3+y^3+z^3=3$

εὑρεῖτε τό $x^4+y^4+z^4$;

(23)

Αν $\alpha\beta(x^2+y^2)=\alpha^2y^2+\beta^2x^2$ και $\alpha\neq\beta$ δείξτε ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\square$.

Η δοθείσα σχέσις γράφεται:

$\alpha\beta x^2-\alpha^2y^2-\beta^2x^2+\alpha\beta y^2=$

$\alpha(\beta x^2-\alpha y^2)-\beta(\beta x^2-\alpha y^2)=0$ ή

$(\alpha-\beta)(\beta x^2-\alpha y^2)=0$ και επειδή $\alpha\neq\beta$

προκύπτει $\beta x^2-\alpha y^2=0 \to \frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{x}{y}\right)^2$.

(22)

Να ευρεθή ο Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των παραστάσεων:

(i) a^2+4a+3

(ii) $a^3+6a^2+11a+6$

(iii) a^3+2a^2-a-2.

Λύσις:

(i) $a^2+4a+3=(a+1)(a+3)$

ii $a^3+6a^2+11a+6=a^3+6a^2+12a+8-a-2=$

$(a+2)^3-(a+2)=$

$=(a+2)[(a+2)^2-1]$

$=(a+2)(a+3)(a+1)$

iii $a^3+2a^2-a-2=(a+2)(a+1)(a-1)$

ΜΚΔ : $a+1$

ΕΚΠ : $(a+1)(a+2)(a+3)(a-1)$.

(25)

Νά εὑρεθοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, y, z τ.ω.: $x^2+y^2+z^2=18$ (1) $x-y+4z=18$. (2)

Ἐφαρμόζω τήν ταυτότητα τοῦ Lagrange γιά τόν πίνακα τῶν ἀριθμῶν:

x	y	z	
1	-1	4	τοῦ ...

$$(x^2+y^2+z^2)(1+1+16)-(x-y+4z)^2=(-x-y)^2+(4x-z)^2+(4y+z)^2$$

ἤ $18\cdot 18-18^2=(x+y)^2+(4x-z)^2+(4y+z)^2 \Rightarrow$

$x+y=0$ $\quad$ $x+y=0$

$4x-z=0$

$4y+z=0$ $\quad$ $4y=-4x$ ἤ $x=\lambda$ $\quad y=-\lambda$ $\quad z=4\lambda$

ἡ (1) ὁπότε αὐτή δίδει $\lambda^2+(-\lambda)^2+16\lambda^2=18 \Rightarrow$

$\lambda=1$ καί $\lambda=\pm 1$ ...

$\lambda=1$ ὅπότε $x=1$ $\quad y=-1$ καί $z=4$.

(24)

Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x-3}{x-4}+\frac{x-4}{x-3}=\frac{2x-k}{x-5}$ ὥστε τό μηδέν εἶναι ρίζα της. —

Λύσις $\frac{-3}{-4}+\frac{-4}{-3}=\frac{-k}{-5}$ ἤ

$\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=\frac{k}{5}$ ἤ $k=5\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)$

$k=5\cdot\frac{9+16}{12}=5\cdot\frac{25}{12}=\frac{125}{12}$

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$\frac{x-3}{x-4}+\frac{x-4}{x-3}=\frac{2x-\frac{125}{12}}{x-5}$ ἤ

$\frac{x-3}{x-4}+\frac{x-4}{x-3}=\frac{24x-125}{12(x-5)}$ ἤ

$\frac{(x-3)^2+(x-4)^2}{x^2-7x+12}=\frac{24x-125}{12x-60}$ ἤ

(27)

Δεῖξαι ὅτι εἰς οἱονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν μεγαλυτέραν 4 ὁ ἀριθμὸς 1,331 εἶναι τέλειος κύβος. —

Λύσις. $1{,}331_{[x]} = 1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3} =$

$$= \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3$$

(26)

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ τῶν παραστάσεων: $x^2(x^2-10)+9$ καὶ $x^2(x^2-17)+16$. Δεῖξαι ὅτι $x=\pm 2$. —

Λύσις $x^4-10x^2+9 = x^4-9x^2-x^2+9 =$

$x^4-17x^2+16 = x^4-16x^2-x^2+16 =$

$x^2(x^2-9)-(x^2-9) = (x^2-9)(x^2-1)$

$x^2(x^2-16)-(x^2-16) = (x^2-16)(x^2-1)$ $\quad$ Μ.Κ.Δ: x^2-1

Τότε $x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4$ $\quad \boxed{x=\pm 2}$

(29)

Νά εὑρεθῇ ἡ τετραγωνική ρίζα τῆς παραστάσεως $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)+1$. —

Λύσις. γράφεται $(x^2+9x+18)(x^2+9x+20)+1$

κι θέτοντα $x^2+9x=\omega$:

$(\omega+18)(\omega+20)+1 = \omega^2+38\omega+361 = (\omega+19)^2$

ὥστε ἡ τετραγωνική ρίζα εἶναι ἡ

$\pm(\omega+19) = \pm(x^2+9x+19)$.

(28)

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι, ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 4 εἶναι ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων ἀκεραίων ἀριθμῶν.—

Λύσις.

$4\nu = 2\nu+2\nu = \nu^2+2\nu+1-\nu^2+2\nu-1$ κι

$4\nu = (\nu^2+2\nu+1)-(\nu^2-2\nu+1) = (\nu+1)^2-(\nu-1)^2$.

(31)

Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις $x^{-1}+x(x-\mu)=\frac{1}{x}$.

Λύσις. Κατ' ἀρχήν δέον $x\neq 0$.

Γράφω $\frac{1}{x}+x(x-\mu)=\frac{1}{x} \Longrightarrow x(x-\mu)=0$

$\Longrightarrow x=0$ ἀπορ. λόγω περιορισμοῦ.
$x=\mu$ δεκτή ἐφ' ὅσον $\mu\neq 0$. —

(30)

Νά ὑπολογισθῆ τό γινόμενο:

$$\Pi=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2\nu}}\right)$$

<u>Λύσις</u>. Παρατηροῦμεν ὅτι:

$\left(1+\frac{1}{3^{2\nu}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2\nu}}\right)=1-\frac{1}{3^{2\nu+1}}$ καί συνεπῶς

$1+\frac{1}{3^{2\nu}}=\left(1-\frac{1}{3^{2\nu+1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{3^{2\nu}}\right)$ ὅπου $\Pi(\nu)=1-\frac{1}{3^{2\nu}}$

Συνεπῶς ἔχομεν:

$$\Pi=\frac{\Pi(2)}{\Pi(1)}\cdot\frac{\Pi(3)}{\Pi(2)}\cdots\cdots\frac{\Pi(\nu+1)}{\Pi(\nu)}=\frac{\Pi(\nu+1)}{\Pi(1)}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{3^{2\nu+1}}}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{3^{2\nu+1}}\right)$$

(33)

Νά λυθῇ τό σύστημα $\frac{x}{y} = xy = x+y$.

Λύση $\frac{x}{y} = xy \Rightarrow \frac{x}{y} - xy = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{y} - y\right) = 0$

$x=0$ και $y=\pm 1$ λαμβάνουμε ότι:

x	y
0	0
αδ.	+1
$\frac{1}{2}$	−1

Για $y=+1$

$x = x+1 \Rightarrow$

$0x = 1$ κι αδ.

Για $y=-1$

$-x = x-1$

$2x = 1$ και $x = \frac{1}{2}$

Έτσι λοιπόν το σύστημα μια μοναδική λύση έχει την $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

(32)

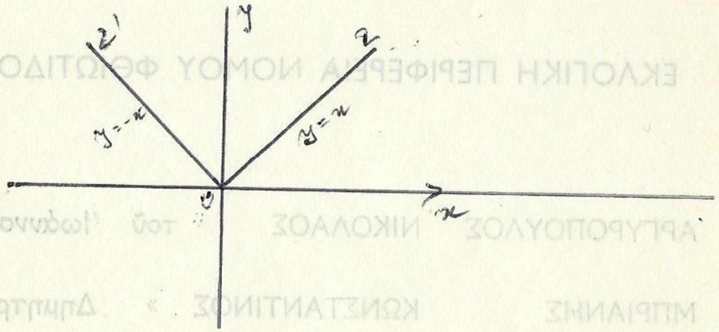
Ἀποδῶσατε γραφικῶς τὴ συνάρτηση: $y = |x|$

Λύση Η παρουσία του συμβόλου του απολύτου επιβάλλει να εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $x \geq 0$ τότε $|x| = x$ και $y = x$

(ii) $x < 0$ τότε $|x| = -x$ και $y = -x$

και έτσι έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:



(35)

Διά ποια x αληθεύει η ανίσωση

$x+\min(x+1,\ 2x-1) < 2$.

Λύση. Θέτω $\alpha = x+1$, $\beta = 2x-1$. Τότε

$\alpha - \beta = x+1-(2x-1) = -x+2 \le 0$

$\Rightarrow x \ge 2$ ισχύει δε $\alpha-\beta > 0 \Rightarrow x < 2$

α) Εάν $x \ge 2$ τότε η ανίσωση γράφεται $x+2x-1 < 2$

$\Rightarrow 2x+1 < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ που δεν συμβιβάζεται με την $x \ge 2$

β) Εάν $x < 2$ τότε η ανίσωση γράφεται

$x+x+1 < 2 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ άρα διά $x < \frac{1}{2}$

αληθεύει η ανίσωση (και μόνον τότε.)

(34)

Επιλύσατε την εξίσωσιν:

$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$

Αύτη γράφεται:

$2.3.4.(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.2.3.4$

ή $(12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4) = 120$.

και αν $12x = y$ έχομεν:

$(y-1)(y-2)(y-3)(y-4) = 120 \Longrightarrow$

$(y^2-5y+4)(y^2-5y+6)-120 = 0 \Longrightarrow$

$(y^2-5y+4)(y^2-5y+4+2)-120 = 0 \Longrightarrow$

$(y^2-5y+4)^2+2(y^2-5y+4)-120 = 0$ ή

$t^2+2t-120 = 0$ $\quad t = \frac{-2\pm\sqrt{4+480}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{484}}{2}$

$= \frac{-2\pm 22}{2} = -1\pm 11 = \left\langle \begin{matrix} 10 \\ -12 \end{matrix} \right.$

όθεν $y^2-5y+4 = 10 \left\langle \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right.$

ή $y^2-5y+4 = -12 \left\langle \begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix} \right.$ $\quad$ οπόθεν και το x.

(37)

Να γίνη γινόμενον η παράστασις

$A = k^2(2k^2-1) + (2k+1)^3$.

$A = 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 1 + 6k(2k+1) =$

$= 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 1 + 12k^2 + 6k =$

$= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 = f(k)$

$f(-1) = 2 - 8 + 11 - 6 + 1 = 14 - 14 = 0$

$2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 = (k+1)\,\Pi(k)$

$$\begin{array}{l|l}
2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 & k+1 \\
\hline
-2k^4 - 2k^3 & 2k^3 + 6k^2 + 5k + 1 \\
\quad 6k^3 + 11k^2 + 6k + 1 & \\
\quad -6k^3 - 6k^2 - 5k & \\
\qquad 5k^2 + 6k + 1 & \\
\qquad -5k^2 - 5k & \\
\qquad\quad k + 1 & \\
\qquad\quad -k - 1 &
\end{array}$$

$f(-1) = -2 + 6 - 5 + 1 = 0$

$$\begin{array}{l|l}
2k^3 + 6k^2 + 5k + 1 & k+1 \\
\hline
-2k^3 - 2k^2 & 2k^2 + 4k + 1 \\
\quad 4k^2 + 5k + 1 & \\
\quad -4k^2 - 4k & \\
\qquad k + 1 & \\
\qquad -k - 1 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Άρα $A = (k+1)^2 \cdot (2k^2 + 4k + 1)$.

(36)

Εάν $x = \alpha^2 + \beta^2$ δείξον ότι ο αριθμός $2^\nu x$ είναι άθροισμα δύο τετραγώνων, $\forall$ ακεραίαν θετικήν τιμήν του ν. —

Λύσις. Περίπτωσις 1η.

Εάν $\nu = 2\kappa$ τότε η παράστασις $2^\nu x$ γίνεται

$2^\nu \cdot x = 2^{2\kappa}\cdot(\alpha^2+\beta^2) = 2^{2\kappa}\cdot\alpha^2 + 2^{2\kappa}\cdot\beta^2 = (2^\kappa\cdot\alpha)^2 + (2^\kappa\beta)^2$ και συνεπώς η πρότασις αληθεύει.

Περίπτωσις 2α.

Εάν $\nu = 2\kappa+1$ τότε έχομεν $2^\nu x = 2^{2\kappa+1}(\alpha^2+\beta^2)$

$= 2\cdot 2^{2\kappa}(\alpha^2+\beta^2) = 2(2^{2\kappa}\alpha^2 + 2^{2\kappa}\beta^2)$

$= 2^\nu\cdot x = 2[(2^\kappa\alpha)^2 + (2^\kappa\beta)^2] = (2^\kappa\alpha + 2^\kappa\beta)^2 + (2^\kappa\alpha - 2^\kappa\beta)^2$

Άρα και τώρα η πρότασις αληθεύει. —

(39)

Νά γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις

$A = 250(x-y)^3+2$

$B = x^2+y^2-4x-4y+2xy+3$.

Λύση.

$A = 2\left[125(x-y)^3+1\right] = 2\left[(5(x-y))^3+1^3\right]$

$= 2\left[5(x-y)+1\right]\left[25(x-y)^2-5(x-y)+1\right]$.

$B = (2-x-y)^2-1 = \left[(2-x-y)+1\right]\left[(2-x-y)-1\right]$

$= (3-x-y)(1-x-y)$.

(38)

Να γίνει γινόμενο η παράσταση

$A = x(y^2+\varphi^2-x^2)+y(\varphi^2+x^2-y^2)$

Έχουμε $A = xy^2+x\varphi^2-x^3+y\varphi^2+yx^2-y^3$

$= xy^2+x\varphi^2+y\varphi^2+yx^2-x^3-y^3 =$

$= xy^2+yx^2+\varphi^2(x+y)-(x^3+y^3) =$

$= xy(x+y)+\varphi^2(x+y)-(x+y)(x^2-xy+y^2) =$

$= (x+y)\left[xy+\varphi^2-(x^2-xy+y^2)\right] =$

$= (x+y)\left[xy+\varphi^2-x^2+xy-y^2\right] =$

$= (x+y)\left[\varphi^2-(x^2+y^2-2xy)\right] =$

$= (x+y)\left[\varphi^2-(x-y)^2\right] = (x+y)(\varphi+x-y)(\varphi-x+y)$

(41)

Αν $α<β$ τότε $α < \frac{α+β}{2} < β$.

Απόδειξη.

$α<β$ (1)
$α=α$ (2)

$2α<α+β$

$α<\frac{α+β}{2}$ I

$α<β$ (3)
$β=β$ (4)

$α+β<2β$

$\frac{α+β}{2}<β$ II

I και II έχομεν $\boxed{α<\frac{α+β}{2}<β.}$

(40)

Να απλοποιηθή η παράστασις:

$A = 2(α^3+β^3) - 3(α^2+β^2)$ · αν $α+β=1$.

Λύσις $A = 2[(α+β)^3-3αβ(α+β)]-3[(α+β)^2-2αβ]$

$= 2[1-3αβ]-3[1-2αβ] =$

$= 2-6αβ-3+6αβ = -1.$

(43)

Δεῖξε ὅτι ἡ $\frac{3x-1}{x^2+7} < \frac{1}{2}$ ἀληθεύει πάντοτε ἐκτὸς ἐὰν $x=3$. —

Ἐπειδὴ $\frac{3x-1}{x^2+7} - \frac{1}{2} < 0$ ἢ $\frac{2(3x-1)-(x^2+7)}{2(x^2+7)} < 0$

$\Longrightarrow 2(3x-1)-(x^2+7) < 0$ ἢ

$6x-2-x^2-7<0$ ἢ $-x^2+6x-9<0$

ἢ $x^2-6x+9>0$ ἢ $(x-3)^2>0$

ἀληθὲς ἐκτὸς ἂν $x=3$. Τότε

ἰσχύει μόνον ἡ ἰσότης —

(42)

Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1+ax}{1-ax} = \frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}.$$ Θέσατε $ax=y$.

Ἔχομεν $\frac{1+y}{1-y} = \frac{3+y^2}{1-y^2} \Longrightarrow$

$\frac{2}{2y} = \frac{4}{2+2y^2} \longrightarrow \frac{1}{y} = \frac{2}{1+y^2} = \frac{3}{1}$

$\Longrightarrow y = \frac{1}{3}$ ἢ $ax = \frac{1}{3}$ καὶ $x = \frac{1}{3a}$.

Γαβαλᾶς

(45)

Αν $\alpha+\beta+\gamma=\kappa$ δείξτε ότι η παράσταση

$A=(\alpha\kappa+\beta\gamma)(\beta\kappa+\gamma\alpha)(\gamma\kappa+\alpha\beta)=\square$.

Λύση. $\alpha\kappa+\beta\gamma=\alpha(\alpha+\beta+\gamma)+\beta\gamma=$
$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$. Ομοίως κ.λπ.

$A=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)\cdot(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)=$

$=(\alpha+\beta)^2\cdot(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2=[(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)]^2=\square$

(44)

Αν $\alpha^2+\beta^2=1$, δείξτε ότι: $(3\alpha-4\alpha^3)^2+(4\beta^3-3\beta)^2=1$

Απόδειξη. Η παράσταση ότι την λέγω Κ ισοδυναμεί
με $K=9\alpha^2+16\alpha^6-24\alpha^4+16\beta^6+9\beta^2-24\beta^4=$

$=-24(\alpha^4+\beta^4)+16(\alpha^6+\beta^6)+9(\alpha^2+\beta^2)=$

$=-24[(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2]+16[(\alpha^2+\beta^2)^3-3\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)]+9(\alpha^2+\beta^2)$

$=-24[1-2\alpha^2\beta^2]+16[1-3\alpha^2\beta^2\cdot1]+9\cdot1=$

$=-24+48\alpha^2\beta^2+16-48\alpha^2\beta^2+9=25-24=1$

II μέθοδος. Η σχέση $\alpha^2+\beta^2=1$ επιτρέπει να
θέσω $\alpha=\eta\mu x$
$\beta=\sigma\upsilon\nu x$ τότε έχω προς απόδειξη

$(3\eta\mu x-4\eta\mu^3x)^2+(4\sigma\upsilon\nu^3x-3\sigma\upsilon\nu x)^2=1$ ή

$(\eta\mu 3x)^2+(\sigma\upsilon\nu 3x)^2=1$ που είναι αληθές.

(47)

Να απλοποιηθή το κλάσμα

$$A = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} \quad \text{αν} \quad \alpha^2 = \beta^2+\gamma^2 .$$

Λύσις. $$A = \frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\beta\alpha+\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma}{\alpha^2+\alpha^2+2\alpha\beta+2\gamma\alpha+2\beta\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma}{2(\alpha^2+\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma)} = \frac{1}{2} .$$

(46)

Διά ποίας τιμάς του α και β το σύστημα: $(2\alpha-1)x+\beta y = 7$ (1)

$(\alpha-2)x+(\beta-1)y = 2$ (2)

έχει την λύσιν $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right\}$.

Θέτω εις το σύστημα $x=1$ και $y=1$ δια

$(2\alpha-1)+\beta = 7$ (1)

$(\alpha-2)+\beta-1 = 2$ (2) $\Longrightarrow$

$2\alpha+\beta = 8$

$\alpha+\beta = 5 \Longrightarrow 2\alpha-\alpha = 8-5 \Longrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \alpha=3 \\ \beta=2 \end{array}\right\}$

Να ευρεθή η αριθμητική τιμή της παραστάσεως: $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\dfrac{-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2}{\alpha+\beta}$ εάν $\alpha+\beta=5$.

$$K=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2)}{\alpha+\beta}=$$

$$=\frac{\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2}{\alpha+\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3}{\alpha+\beta}=(\alpha+\beta)^2=25.$$

Να δειχθή ότι η παράστασις

$2\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)(x-y)$ $x>y$ είναι $\square$.

Έπεται $2\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)(x-y)=2x^2-2xy+2(x-y)\sqrt{x^2-y^2}$

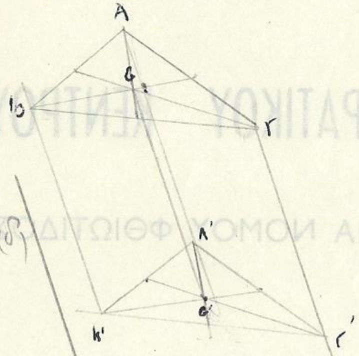
$$=x^2-2xy+y^2+x^2-y^2+2(x-y)\sqrt{x^2-y^2}$$

$$=(x-y)^2+\sqrt{(x^2-y^2)}^2+2(x-y)\sqrt{x^2-y^2}$$

$$=\left[(x-y)+\sqrt{x^2-y^2}\right]^2=\square.$$

(51)

Έστω τρίγωνον ΑΒΓ και G τό βαρύκεντρόν του. Παριστάνομεν δια Α', Β', Γ' και G' τις προβολές των Α, Β, Γ και G επί ένα επίπεδον (P) παράλληλα πρός τήν ευθείαν (δ). Δείξτε ότι $AA'+BB'+\Gamma\Gamma' = 3GG'$.



$$\overline{GG'} = \overline{GA} + \overline{AA'} + \overline{A'G'}$$
$$\overline{GG'} = \overline{GB} + \overline{BB'} + \overline{B'G'}$$
$$\overline{GG'} = \overline{G\Gamma} + \overline{\Gamma\Gamma'} + \overline{\Gamma'G'}$$

$$3\overline{GG'} = \overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{\Gamma\Gamma'} + (\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{G\Gamma}) - (\overline{G'A'}+\overline{G'B'}+\overline{G'\Gamma'})$$

ή $3\overline{GG'} = \overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{\Gamma\Gamma'}$

(50)

Θεωρούμε τα τρία διανύσματα:

$\overline{u}_1(-1,+2,+3)$, $\overline{u}_2=(+4,-2,+2)$, $\overline{u}_3=(+5,-1,+6)$

Υπολογίσατε τις συντεταγμένες του διανύσματος

$\overline{V} = -\overline{u}_1 + 2\overline{u}_2 + 3\overline{u}_3$. —

Επιλογισμός του $\overline{V}$. Έστωσαν (X, Y, Z) αι συντεταγμέναι αυτού. Θα έχωμεν:

$X = -(-1+2.4+3.5) = 1+8+15 = 24$

$Y = -2+2.(-2)+3.(-1) = -2-4-3 = -9$

$Z = -3+2.2+3.6 = -3+4+18 = 19$

οπότε: $\overline{V}(+24, -9, +19)$

(53)

Νά λυθῆ τό σύστημα $x^3+y^3=28$

$x^2y+xy^2=12$.

Λύσ. Ἔχω $x^3+y^3=28$

$3x^2y+3xy^2=36$.

$(x+y)^3=64 \Longrightarrow x+y=4$

ἡ (2) γράφεται $xy(x+y)=12$ ἤ $xy\cdot 4=12$

$\Longrightarrow xy=3$ ἄρα ἔχουμε:

$x+y=4$

$xy=3$ θέτω τώρα $x=2+t$

$y=2-t$ λύση

$xy=4-t^2$ ἤ $3=4-t^2$ ἤ $t^2=1$ · $t=\pm 1$

ὁπότε $x=2+1=3$ ἤ $x=2-1=1$

$y=2-1=1$ $y=2+1=3$.

(52)

Δ.ό. ὅτι $ax^2+bx+\gamma=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4a\gamma-b^2}{4a^2}\right]$

$$ax^2+bx+\gamma=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{\gamma}{a}\right]=\alpha\left[x^2+2\cdot\frac{bx}{2a}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{\gamma}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4a\gamma-b^2}{4a^2}\right]$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-a\gamma}{4a^2}\right]$$

(55)

Αν $x, y \in R$ δείξτε ότι:

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 \geq 1.$$

Θέτω $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 = Z$

τότε $Z=(x+y+1)^2+2(y+1)^2+1$ και

τούτο ως άθροισμα τετραγώνων ≥ 1. —

(54)

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$. Δείξτε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4 \geq 4\alpha\beta\gamma\delta.$$

Λύση $\alpha^4+\beta^4 \geq 2\alpha^2\beta^2$

$\gamma^4+\beta^4 \geq 2\gamma^2\delta^2$

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4 \geq 2(\alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2)$$

Όμως $\alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2 \geq 2\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2}$ και

$\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2} \geq \alpha\beta\gamma\delta$ και $\geq$ ίσον αν $\alpha\beta\gamma\delta \geq 0$.

Εκ του συνδυασμού των (1) και (2) έχομε

η προς απόδειξη. —

(57)

Δεῖξε ὅτι $x^8-x^5+x^2-x+1>0 \quad \forall x\in R$

I Ἀπόδειξη.

1) $x\le 0$ τότε $x^8-x^5+x^2-x+1>0$ διότι οἱ περιττοὶ τέσσαρες προσθετέοι εἶναι μὴ ἀρνητικοί.

2.) $0\le x<1$. Ἐπαναγράφομεν τὸ πολυώνυμον ὡς ἀκολούθως. $x^8+(x^2-x^5)+(1-x)=x^8+x^2(1-x^3)+1-x$ ἐδῶ ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι θετικοί, οὕτω τὸ ἀρχικὸν πολυώνυμον >0.

3. $x\ge 1$. Γράφομεν τὸ ἀρχικὸν πολυώνυμον $x^5(x^3-1)+x(x-1)+1$, οἱ δύο πρῶτοι προσθετέοι εἶναι μὴ ἀρνητικοί, οὕτω:

$$x^8-x^5+x^2-x+1>0.$$

II μέθοδος.

Ἐφαρμόζομεν τὴν ταυτότητα τοῦ Lagrange διὰ τὰ πίνακα ~~τῶν~~ ἀριθμῶν:

$$\begin{array}{ccc} x^4 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow (x^8+x^2+1)(1+1+1)-(x^4+x+1)^2$$

$$=(x^4-x)^2+(x^4-1)^2+(x-1)^2>0 \text{ ἢ}$$

$$3(x^8+x^2+1)-(x^8+x^2+1+2x^5+2x^4+2x)>0$$

ἢ $3x^8+3x^2+3-x^8-x^2-1-2x^5-2x^4-2x>0$ ἢ

$$2x^8+2x^2+2-2x^5-2x^4-2x>0 \Rightarrow$$

$$x^8+x^2+1-x^5-x^4-x>0 \Rightarrow$$

$$x^8-x^5+x^2-x+1>x^4>0 \Rightarrow$$

$$x^8-x^5+x^2-x+1>0.$$

(56)

Ἄν $a+b=1$ τότε $a^4+b^4\ge \frac{1}{8}$.

Εἶναι $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$.

$$a^4+b^4=(1-2ab)^2-2a^2b^2$$

Ἀλλὰ $a+b=1$ τότε $0\le ab\le \frac{1}{4}$

ἐπειδὴ $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ἄρα

$$a^4+b^4\ge\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{8}.$$

(59)

Δείξτε ότι $2x^4+1 \geq 2x^3+x^2$ για $\forall x \in R$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$2x^4+1-2x^3-x^2 \geq 0.$$

Είναι $2x^4-2x^3-x^2+1 \geq 0$ ή

$(x-1)^2(2x^2+2x+1)$, ο όποιος ισχύει. —

(58)

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$. Δείξτε ότι το κλάσμα

$$K=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$$ είναι ανεξάρτητο των α, β, γ.

$$K=\frac{3\alpha\beta\gamma-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}=\frac{3\alpha\beta\gamma-3\alpha\beta\gamma-6\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2-(-\alpha-\beta)^2}=$$

$$=\frac{-6\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2-(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)}=\frac{-6\alpha\beta}{-2\alpha\beta}=3$$ ανεξάρτητο

των α, β, γ —

(61)

Εάν $f(x) = ax^2 + bx + γ$ δείξτε

$f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$ είναι ανεξάρτη-

των Α: α, Β: β, Γ: γ —

Λύση. $f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) =$

$= α(x+1)^2 + β(x+1) + γ - 2(αx^2 + βx + γ) + α(x-1)^2 + β(x-1) + γ$

$= α(x^2 + 2x + 1) + βx + β + γ - 2αx^2 - 2βx - 2γ + α(x^2 - 2x + 1) + βx - β + γ$

$= αx^2 + 2αx + α + βx + β + γ - 2αx^2 - 2βx - 2γ + αx^2 - 2αx + α + βx - β + γ$

$= +2α + 2γ - 2γ = 2α$. (ανεξ. β και γ)

(60)

Ο μεγαλύτερος εκ δύο αριθμών είναι ο 1524. Εάν Μ.Κ.Δ αυτών εί-ναι ο 127. Ποίος ο μικρότερος εκ τούτων;

Λύση.

Εάν Α ο μικρότερος τότε οι αριθμοί $\frac{1524}{127} = 12$ και $\frac{A}{127} = Π$ θα είναι πρώτοι προς αλλήλους. Επειδή δε και $Α < 1524$ έπεται ότι $Π < 12$ ήτοι ο Π θα είναι μικρότερος του 12 και πρώτος προς αυτόν, ήτοι είναι εις των αριθμών.

$127 \cdot 1 = 127$

$127 \cdot 5 = 635$

$127 \cdot 7 = 889$

$127 \cdot 11 = 1397$.

(63)

Ο τύπος $(n+1)^2 = 2n^2 - n + 3$ είναι ἀληθής διὰ $n=1$ καὶ $n=2$. Εἶναι ἀληθὴς καὶ διὰ οἱονδήποτε n; —

Ο τύπος $(n+1)^2 = 2n^2 - n + 3$ γράφεται

$n^2+2n+1 = 2n^2-n+3 \Longrightarrow$

$n^2-3n+2=0$ Το τριώνυμον τούτο ἔχει ρίζας $n=1$ καὶ $n=2$ καὶ ικανοποιείται με $n=1$ καὶ $n=2$. Δὲν ἕπεται ὅτι τοῦτο ικανοποιείται καὶ $\forall\, n = 1$ ἢ 2. —

<u>Πράγματι</u> διὰ $n=4$ ἔχομεν

$4^2-3\cdot 4+2 = 16-12+2 = 18-12 = 6 \neq 0$.

(62).

Ἐάν $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$ τότε

$f(3)$ εἶναι
A = μηδέν
Β = ἄπειρον
Γ = ἀπροσδιόριστον
Δ = 12 —

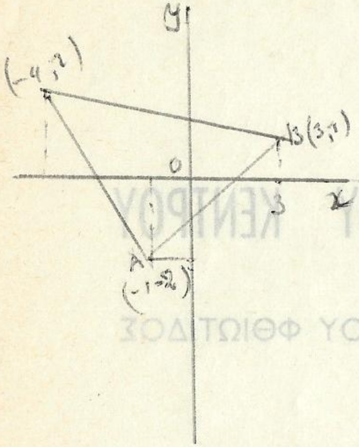
$f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6} = \dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{x+3}{x+2}$

$f(3) = \dfrac{6}{5}$.

(65)

Το τρίγωνο με κορυφάς $(-1,-2)$ $(3,1)$ και $(-4,2)$ είναι ισοσκελές, ορθογώνιο, έχον εμβαδόν 25. —

Λύσις.



$AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$A\Gamma = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (2-(-2))^2} =$
$\sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5.$

$B\Gamma = \sqrt{(-4-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{49+1}$

Άρα $AB = A\Gamma$ ισοσκελές με κορυφήν Α.

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \rightarrow$ ορθογώνιον εις Α.

Άρα $AB\Gamma$ — ισοσκελές ορθογώνιο

(64)

Είναι $2+4+6+ \dots +2\nu =$
$\nu^4 + 10\nu^3 + 36\nu^2 - 49\nu + 24$ είναι αληθής διά $\nu = 1, 2, 3, 4$. Είναι αληθής διά κάθε ν;

Η ισότης γράφεται:

$\frac{2+2\nu}{2} \cdot \nu = \nu^4 - 10\nu^3 + 36\nu^2 - 49\nu + 24$ ή

$(1+\nu)\nu = \nu^4 - 10\nu^3 + 36\nu^2 - 49\nu + 24 \Rightarrow$

$\nu^4 - 10\nu^3 + 35\nu^2 - 50\nu + 24 = 0$

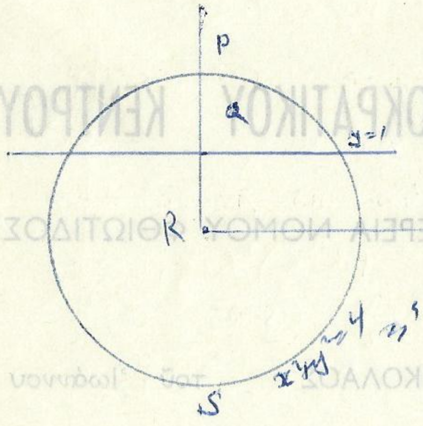
Αυτή η εξίσωσις τετάρτου βαθμού επαληθεύεται διά $\nu=1$, $\nu=2$, $\nu=3$, $\nu=4$. Δι' άλλας τιμάς λοιπόν δεν επαληθεύεται και διά κάθε ν. —

(67)

Έχουμε την ανίσωση

$(x^2+y^2-4)(y-1)<0$.

Χαράσσουμε τον κύκλο $x^2+y^2=4$ και την ευθεία $y=1$ σε ένα σχήμα.



Δημιουργούνται οι περιοχές P, Q, R, S

Για $(x^2+y^2-4)(y-1)<0$ δηλ.

$x^2+y^2-4>0 \wedge x-y<0$

ή $x^2+y^2-4<0 \wedge x-y>0$

[illegible]

(66)

Η ευθεία δια του $(0,2)$ κάθετη στη $3x-4y=7$ είναι

A $= 3x-4y=-8$

B $: 3x+4y=5$

Γ $4x-3y=-6$

Δ. $4x+3y=2$

$\boxed{E}$ $= 4x+3y=6$

Η ευθεία $3x-4y=7$ γράφεται:

$4y=3x-7$ $\quad y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$ $\quad$ άρα $\lambda=\frac{3}{4}$

Η κάθετη σε αυτήν $\lambda^*=-\frac{4}{3}$ όπου

Η εξίσωση ζητούμενη $y-y_1=\lambda^*(x-x_1)$ όπου $(x_1,y_1)=(0,2)$. Τότε

$y-2=-\frac{4}{3}(x-0)$ ή $3y-6=-4x$ ή

$\boxed{4x+3y=6} \longrightarrow \boxed{E}$

(69)

Δεῖξαι ὅτι

$$[(1+\sqrt2)\alpha+\beta][(1-\sqrt2)\alpha+\beta]=[(1+\sqrt2)\beta-\alpha][(\sqrt2-1)\beta+\alpha]$$

Λύσις. Ἐπειδὴ $1=(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)$ πολλαπλασιάζομεν τὸν α' ὅρον ἐπὶ τοῦ $\sqrt2-1$ καὶ τὸν δεύτερον ἐπὶ τοῦ $\sqrt2+1$ ὅτε εὑρίσκομεν τὸ β' μέλος. —

II μέθοδος

$$K=(\alpha+\alpha\sqrt2+\beta)(\alpha-\alpha\sqrt2+\beta)=$$
$$[(\alpha+\beta)+\alpha\sqrt2][(\alpha+\beta)-\alpha\sqrt2]=(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2=$$
$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha^2=-\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=$$
$$2\beta^2-\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta=(\beta\sqrt2)^2-(\alpha-\beta)^2$$
$$=[\beta\sqrt2-(\alpha-\beta)][\beta\sqrt2+(\alpha-\beta)]=(\beta\sqrt2-\alpha+\beta)(\beta\sqrt2+\alpha-\beta)$$
$$=[(\sqrt2+1)\beta-\alpha][(\sqrt2-1)\beta+\alpha]$$

(68)

Ἁπλοποιῆσαι τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{\beta\gamma(y-z)^2+\gamma\alpha(z-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2}$$ ἂν $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$

Ὁ παρονομαστὴς ἀναλυόμενος δίδει:

$$\beta\gamma y^2+\beta\gamma z^2-2\beta\gamma yz+\alpha\gamma z^2+\alpha\gamma x^2-2\alpha\gamma xz+\alpha\beta x^2$$
$$+\alpha\beta y^2-2\alpha\beta xy=$$
$$=\gamma(\alpha x^2+\beta y^2)+\beta(\alpha x^2+\gamma z^2)+\alpha(\gamma z^2+\beta y^2)$$
$$-\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz-2\alpha\beta xy=$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)-0$$ ὅταν

τὸ κλάσμα γίνεται ἴσον $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$

(71)

Επιλύσατε το σύστημα

$34_{[x]} - 31_{[y]} = 0$

$560_{[x]} - 448_{[y]} = 0$ ενώ x και y είναι ακέραιοι αριθμοί —

Λύση

$(3x+4) - (3y+1) = 0$

$(5x^2+6x+0) - (4y^2+4y+8) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = y-1 \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = 9 \end{array}$ και επειδή

$y > 1$ θα έχουμε $\boxed{y = 9 \text{ και } x = 8}$

(70)

Να γίνει ρητός ο παρονομαστής

$$\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$$

Λύση. $K = \dfrac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}} = \dfrac{1}{1+3x+2x^2}$ $\left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{2} = x \\ \sqrt[3]{4} = x^2 \end{array}\right.$

$\dfrac{1}{1+x+2x+2x^2} = \dfrac{1}{1+x+2x(1+x)} = \dfrac{1}{(1+x)(1+2x)} = \dfrac{1}{(x+1)(2x+1)}$

$= \dfrac{(x^2-x+1)(8x^2-2x+1)}{(x^3+1)(8x^3+1)} = \dfrac{M}{(1+2)(8\cdot 2+1)} = \dfrac{M}{3\cdot 17}$ ρητός

(73)

Οἱ ἀριθμοί 3, 4, 5, 6 ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσι $6^3=3^3+4^3+5^3$. Ὑπάρχουν ἄλλοι ἀκέραιοι διαδοχικοί μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα —

Λύσις. Ἔστωσαν $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3$ τέσσαρες διαδοχικοί ἀριθμοί θετικοί. Θὰ προσδιορίσωμεν τὸ α:

$(\alpha+3)^3=\alpha^3+(\alpha+1)^3+(\alpha+2)^3 \Longrightarrow$

$\alpha^3+9\alpha^2+27\alpha+27=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1+\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8$

$\Longrightarrow 2\alpha^3-12\alpha-18=0$ ἢ $\alpha^3-6\alpha-9=0$

$\Longrightarrow \alpha^3-9\alpha+3\alpha-9=0$ ἢ

$\alpha(\alpha^2-9)+3(\alpha-3)=0$ ἢ

$\alpha(\alpha+3)(\alpha-3)+3(\alpha-3)=0$ ἢ

$(\alpha-3)(\alpha^2+3\alpha+3)=0 \Longrightarrow \alpha=3$ ἄρα

οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί εἶναι 3, 4, 5, 6 καὶ μόνον.

(72)

Ἐπιλύσατε τὸ σύστημα

$(x+y) \perp 4 = 60 \quad (1)$

$(x-y) \top 3 = 39 \quad (2)$ ἐνῶ

$\alpha \perp \beta = 3\alpha+3\beta+5\alpha\beta+2$

$\alpha \top \beta = 2\alpha+2\beta+2\alpha\beta+1.$

$\left(\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right)$

Λύσις. Τὸ σύστημα γράφεται:

$3(x+y)+3\cdot 4+5(x+y)\cdot 4+2=60$ ἢ
$2(x-y)+2\cdot 3+2(x-y)\cdot 3+1=39$

$3x+3y+12+20x+20y+2=60$
$2x-2y+6+6x-6y+1=39$ ἢ

$23x+23y=46 \qquad x+y=2$
$8x-8y=32 \qquad x-y=4 \Longrightarrow$

$2x=6$
$2y=-2$

$\boxed{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}}$

(75)

Εὑρεῖν τὰς κυβικὰς ρίζας τῆς μονάδος (1) καὶ δεῖξαι ὅτι αὗται ἀποτελοῦν ὁμάδα

Αἱ τρεῖς κυβ. ρίζαι τῆς μονάδος εἶναι οἱ ἀριθμοί 1, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ (λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^3-1=0$).
Ἀποτελοῦν ὁμάδα ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν διότι τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε δίδει μίαν ἐξ αὐτῶν. ἄρα τὸ σύνολον εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς πολλαπλασιασμόν. Αἱ ρίζαι $1, \theta, \theta^2$ δίδουν τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς κυβικῆς ρίζης δίδει τὴν ἄλλην.
Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης: $1(\theta\cdot\theta^2)=1\theta^3=1\cdot1=1$; $(1\theta)\cdot\theta^2=\theta\cdot\theta^2=\theta^3=1$ ἄρα $1(\theta\cdot\theta^2)=(1\cdot\theta)\theta^2$
Οὐδέτερον στοιχεῖον πάλιν τὸ 1 καὶ κάθε στοιχεῖον ἔχει συμμετρικὸν (ἤ τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα) καὶ διὰ τὸ 1 τὸ 1. $\theta\theta^2=1$, $1.1=1$ —

(74)

Ἐὰν p εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 5 δεῖξαι $5/p^{8\nu}+3p^{4\nu}-4$

Ἀπόδειξις.

Ἐὰν p πρῶτος πρὸς τὸν 5 θὰ εἶναι $p=m5\pm1$ ἢ $p=m5\pm2$ τότε $p^2=m5\pm1$ καὶ $p^4=m5+1$ ἄρα $A=m5+1+3(m5+1)-4=m5$.

(77)

Δεῖξαι:

$$\sqrt{2}\left(2a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}$$

ὑποθέτομεν $a>0,\ b>0,\ a>b$

Θέτομεν βοηθ. $a+b=x^2$, $a-b=y^2 \rightarrow a=\frac{x^2+y^2}{2}$

Α' μέλος:

$$\sqrt{2}(x^2+y^2+xy)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}-xy}$$

$$=\sqrt{2}(x^2+xy+y^2)\sqrt{\frac{(x-y)^2}{2}}=$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x-y)=x^3-y^3$$

$$=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}.$$

(76)

Να ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις

$$x^3-a^{-\frac{2}{3}}b^{-1}(a^2+b^2)x+b^{\frac{1}{2}} : x-a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^3-(a^{\frac{4}{3}}b^{-1}+a^{-\frac{2}{3}}b)x+b^{\frac{1}{2}} \quad \Big|\ x-a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$$

$$-x^3+a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}x^2 \quad \Big|\ x^2+a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}x-a^{-\frac{2}{3}}b$$

$$a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}x^2-(a^{\frac{4}{3}}b^{-1}+a^{-\frac{2}{3}}b)x+b^{\frac{1}{2}}$$

$$-a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}x^2+a^{\frac{4}{3}}b^{-1}x$$

$$-a^{-\frac{2}{3}}bx+b^{\frac{1}{2}}$$

$$+a^{-\frac{2}{3}}bx-b^{\frac{1}{2}}$$

$$0$$

(79)

Δείξτε ότι $\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Λύση.

$\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{4}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)$

$\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

όμοια $\left(\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Το Α' μέλος της αποδεικτέας ισότητας γίνεται:

$\alpha^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ ή

$\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)$ ή $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

(78)

Υπολογίσατε την παράσταση x^3+3x όταν $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

Λύση.

$x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ υψώνω σε κύβο

$x^3=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)-3\sqrt[3]{2-1}\cdot x$ ή

$x^3=2-3x \Longrightarrow x^3+3x=2$. κλπ.

(81)

Δίδεται η ισότης:

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}+\frac{\alpha+\beta}{y}-\frac{\gamma+\beta}{z}=\frac{\alpha-\gamma}{z}+\frac{\alpha}{\gamma}\,.$$

Εκφράσατε αναλογικώς ως προς α, β, γ.

Απ. $\alpha=\frac{\gamma(\beta-1)}{1+\beta}$

$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{\gamma-\alpha}$

$\gamma=\frac{\alpha(1+\beta)}{\beta-1}$

(80)

Αν $\frac{x^2-yz}{\alpha}=\frac{y^2-zx}{\beta}=\frac{z^2-xy}{\gamma}$ (1)

τότε $\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{x}=\frac{\beta^2-\gamma\alpha}{y}=\frac{\gamma^2-\alpha\beta}{z}$.

Έστω λ ο κοινός λόγος

τότε $\frac{x^2-yz}{\alpha}=\lambda \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{x^2-yz}{\lambda} \\ \beta=\frac{y^2-zx}{\lambda} \\ \gamma=\frac{z^2-xy}{\lambda} \end{cases}$

$\alpha^2-\beta\gamma=\frac{(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)}{\lambda^2}$.

$\alpha^2-\beta\gamma=\frac{x(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{\lambda^2}$

$\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{x}=\frac{x^2+y^2+z^2-3xyz}{\lambda^2}$ (η αυτή

της αριθμός αυτού και λόγων εφ' όσον

μεν η τελική τιμή και δια η λόγοι

$\frac{\beta^2-\gamma\alpha}{y}$ και $\frac{\gamma^2-\alpha\beta}{z}$ συνεπώς αι (1)

αποδεικνύονται —

(83)

Αν $\frac{x+y}{17} = \frac{y+w}{18} = \frac{w+x}{25}$ δείξτε ότι το τρίγωνον πλευρών x, y, w είναι ορθογώνιον με υποτείνουσαν την w —

Αν λ ο κοινός λόγος θα έχουμε:

$x+y = 17\lambda \qquad w = 30\lambda - 17\lambda = 13\lambda$

$y+w = 18\lambda \qquad x = 30\lambda - 18\lambda = 12\lambda$

$w+x = 25\lambda \qquad y = 30\lambda - 25\lambda = 5\lambda$

$2(x+y+w) = 60\lambda$

$x+y+w = 30\lambda \qquad \Rightarrow \boxed{w^2 = x^2 + y^2}$

$(13\lambda)^2 = (12\lambda)^2 + (5\lambda)^2$

$169\lambda^2 = 144\lambda^2 + 25\lambda^2$

$169\lambda^2 = 169\lambda^2$

(82)

Λύσατε τα συστήματα:

A. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2xy$ $\qquad (x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

B. $\frac{2xy}{3x-y} = 4$, $\frac{3xz}{x-z} = -\frac{9}{2}$, $\frac{yz}{2y-z} = 6$ $\qquad (x,y,z) = (1,2,3)$

A. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ 3x + 2y = 12xy \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{3x+2y}{xy} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ 3\frac{1}{y} + 2\frac{1}{x} = 12 \end{array}$

Θέτω $\frac{1}{x} = X$ $\frac{1}{y} = \Psi$ τότε $\left.\begin{array}{l} X + \Psi = 5 \\ 2X + 3\Psi = 12 \end{array}\right\}$ $\Psi = 5 - X$

άρα $2X + 3(5-X) = 12 \Rightarrow 2X + 15 - 3X = 12 \Rightarrow$

$X = 3$ και $\Psi = 2$ άρα $\boxed{x = \frac{1}{3} \text{ και } y = \frac{1}{2}}$

B. $\frac{2xy}{3x-y} = 4 \qquad \frac{3x-y}{xy} = \frac{1}{2} \qquad 3\cdot\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$\frac{3xz}{x-z} = -\frac{9}{2} \qquad \frac{x-z}{xz} = -\frac{2}{3} \qquad \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$

$\frac{yz}{2y-z} = 6 \qquad \frac{2y-z}{yz} = \frac{1}{6} \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\Psi - X = \frac{1}{2} \\ Z - X = -\frac{2}{3} \\ 2Z - \Psi = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6\Psi - 2X = 1 \\ 3Z - 3X = -2 \\ 12Z - 6\Psi = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

(85)

Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{x+7} \pm \sqrt{x+5} \pm \sqrt{x+3} \pm \sqrt{x+2} = 0$$

Αἱ ἐξισώσεις γράφονται:

$\sqrt{x+7} + \varepsilon_1\sqrt{x+5} + \varepsilon_2\sqrt{x+3} + \varepsilon_3\sqrt{x+2} = 0$ ἐνῶ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ἐκφράζουν τὴν μονάδα μὲ + ἢ −

γράφομεν:

$\sqrt{x+7} + \varepsilon_3\sqrt{x+2} = -\varepsilon_1\sqrt{x+5} - \varepsilon_2\sqrt{x+3}$ (1)

ἢ ὑψώνοντες τὰ τετράγωνα λαμβάνομεν

$x+7+x+2+2\varepsilon_3\sqrt{(x+7)(x+2)} = x+5+x+3+2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{(x+5)(x+3)}$

ἢ ἁπλοπ. $1+2\varepsilon_3\sqrt{(x+7)(x+2)} = 2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{(x+5)(x+3)}$ (2)

ὑψώνοντες διὰ δευτέραν φορὰν τὰ τετράγωνα ἔχομεν

$4\varepsilon_3\sqrt{(x+7)(x+2)} = -4x+3$ (3)

ἢ $168x+215=0 \Rightarrow x = -\frac{215}{168}$

καὶ τώρα ἡ ἰσότης ... ἀληθεύει αὕτη. Ἐπειδὴ αὕτη ἀρνητικὴ τὸ β' μέλος τῆς (3) εἶναι θετικόν ἐφαρμόζεται ὅταν $\varepsilon_3 = 1$, ὥστε τὸ α' μέλος τῆς (2) ὅταν θετικὸν τὸ γινόμενον $\varepsilon_1\varepsilon_2$ εἶναι θετικόν ε_1 καὶ ε_2 ὁμόσημα ἡ (1) δεικνύει ὅτι τὰ ε_1 καὶ ε_2 εἶναι ἀρνητικά. Συνεπῶς πρέπει νὰ ἔχωμεν: $\varepsilon_1=-1, \varepsilon_2=-1, \varepsilon_3=+1$ καὶ συνεπῶς: $\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}=0$ ἔχει δεκτὴν τὴν ρίζαν $x=-\frac{215}{168}$.

(84)

Δίδεται τὸ σύστημα:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{ab}{a+b}, \quad \frac{x^{m+1}}{a}+\frac{y^{m+1}}{b}=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^m$$

εἶναι συμβιβαστόν.

Λύσις $x=\frac{a(b-y)}{b}$ (1) τότε

$(a+b)^2y^2 - 2ab(a+b)y + a^2b^2 = 0$ ἢ

$[(a+b)y-ab]^2=0 \Rightarrow y=\frac{ab}{a+b}$ ὅτε ἡ

(1) δίδει $x=\frac{ab}{a+b}$ ἄρα $x=\frac{ab}{a+b}=y$

μετὰ ὁ συνδυασμὸς ὅτι ἐπαληθεύονται καὶ ἡ τρίτη.

$$\frac{x^{m+1}}{a}+\frac{y^{m+1}}{b}=\frac{a^mb^{m+1}+a^{m+1}b^m}{(a+b)^{m+1}}=\frac{a^mb^m(a+b)}{(a+b)^{m+1}}=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^m.$$

(87)

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και αν $S_\nu = \alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu$ ἔπεται $2S_4 = S_2^2$, $\frac{S_3 S_2}{S_5} = \frac{6}{5}$

$\frac{S_5}{S_4} = \frac{5S_3}{3S_2}$, $\frac{5S_7}{7S_5} = \frac{S_4}{S_2}$

Εάν $\alpha+\beta+\gamma=0$ είναι $\gamma=-(\alpha+\beta)$ και

$S_2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)^2 = 2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$S_3 = \alpha^3+\beta^3-(\alpha+\beta)^3 = -3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ και

ανάλογα βρίσκομεν κατά σειράν:

$S_4 = \alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^4 = 2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$

$S_5 = \alpha^5+\beta^5-(\alpha+\beta)^5 = -5\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$S_7 = \alpha^7+\beta^7-(\alpha+\beta)^7 = -7\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$

Επαληθεύονται τότε εύκολα τα προς απόδειξιν ισότητες αντικαθιστώντας με τις τιμές των τα S_2, S_3, S_4, S_5, S_7.

(86)

Απλοποιήσατε την παράστασιν:

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Θέτω $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = A$

$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta = B$ τότε

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = A+2B$ επομένως

η παράστασις γράφεται:

$(A+B)^2 - A(A+2B) = A^2+B^2+2AB-A^2-2AB = B^2$

$= (\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2$

(89)

Ἐπιλύσατε τὸ σύστημα:

$$\frac{y+z}{\alpha} = \frac{z+x}{\beta} = \frac{x+y}{\gamma} = xyz.$$

Ἔχομεν:

$$\frac{y+z}{xyz} = \alpha \qquad \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \alpha \qquad (1)$$

$$\frac{z+x}{xyz} = \beta \qquad \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \beta \qquad (2)$$

$$\frac{x+y}{xyz} = \gamma \qquad \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \gamma. \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \qquad (4)$$

$$(4)-(1) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{yz} &= \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \\ \frac{1}{zx} &= \frac{\gamma+\alpha-\beta}{2} \\ \frac{1}{xy} &= \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} yz &= \frac{2}{\beta+\gamma-\alpha} \quad \mathrm{I} \\ zx &= \frac{2}{\gamma+\alpha-\beta} \quad \mathrm{II} \\ xy &= \frac{2}{\alpha+\beta-\gamma}. \quad \mathrm{III} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2y^2z^2 = \frac{8}{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}$$

$$xyz = \pm\sqrt{\frac{8}{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}} \qquad (5)$$

$$\frac{5}{(\mathrm{I})} \Rightarrow \qquad x = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{8}{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}}}{\dfrac{2}{\beta+\gamma-\alpha}} \quad \text{κλπ}$$

$$\frac{5}{(\mathrm{II})} \qquad y =$$

$$\frac{5}{(\mathrm{III})} \qquad z =$$

(88.)

Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}.$$

Λύσις: $\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x-5}{x-6} = \dfrac{x-4}{x-5} + \dfrac{x-2}{x-3}$ ἢ

$$\frac{x-2+1}{x-2} + \frac{x-6+1}{x-6} = \frac{x-5+1}{x-5} + \frac{x-3+1}{x-3} \Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{x-2} + 1 + \frac{1}{x-6} = 1 + \frac{1}{x-5} + 1 + \frac{1}{x-3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-3} \text{ ἢ}$$

$$\frac{x-6+x-2}{(x-2)(x-6)} = \frac{(x-3)+(x-5)}{(x-2)(x-6)} \text{ ἢ}$$

$$\frac{2x-8}{(x-2)(x-8)} = \frac{2x-8}{(x-2)(x-6)} \text{ ἢ}$$

$$(2x-8)\left\{\frac{1}{(x-2)(x-6)} - \frac{1}{(x-2)(x-6)}\right\} = 0$$

$\Rightarrow x=4$ ἢ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος παρουσιάζεται ἀδύνατη ἐξίσωσις —

(91)

Επιλύσατε στο N την εξίσωση

$$2^x+2^y+2^z=2336.$$

Λύση. Γράφομεν:

$2^x(1+2^{y-x}+2^{z-x})=2^5\cdot 73$

οπόθεν $2^x=2^5 \Rightarrow \boxed{x=5}$ και

$1+2^{y-x}+2^{z-x}=73 \Rightarrow$

$2^{y-x}(1+2^{z-y})=72=2^3\cdot 9$ δηλαδή

$2^{y-x}=2^3 \Rightarrow y-x=3$ και $\boxed{y=8}$

και $1+2^{z-y}=9 \Rightarrow 2^{z-y}=8 \Rightarrow$

$z-y=3$ και $\boxed{z=11}$ ώστε

$(x,y,z)=(5,8,11)$

(90)

Αν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=0$ και $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=0$

τότε $\dfrac{\alpha^3}{\gamma^2-\beta^2}=\dfrac{\beta^3}{\alpha^2-\gamma^2}=\dfrac{\gamma^3}{\beta^2-\alpha^2}$

Το σύστημα γράφεται:

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=0$

$\alpha^2\alpha^3+\beta^2\beta^3+\gamma^2\gamma^3=0$ τούτο είναι

γραμμικό ομογενές ως προς $\alpha^3\ \beta^3\ \gamma^3$

και εφαρμόζω εν τούτῳ τη [illegible]

[illegible].

$$\frac{\alpha^3}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \beta^2 & \gamma^2\end{vmatrix}}=\frac{\beta^3}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \gamma^2 & \alpha^2\end{vmatrix}}=\frac{\gamma^3}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \alpha^2 & \beta^2\end{vmatrix}} \Longrightarrow$$

$$\frac{\alpha^3}{\gamma^2-\beta^2}=\frac{\beta^3}{\alpha^2-\gamma^2}=\frac{\gamma^3}{\beta^2-\alpha^2}$$

(93)

Επιλύσατε την εξίσωση.

$$4^{x}\cdot 9^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}\cdot 9^{x}=210.$$

Λύση.

$$4^{\frac{1}{x}}\cdot 9^{\frac{1}{x}}\left(9^{x-\frac{1}{x}}+4^{x-\frac{1}{x}}\right)=6\cdot 35$$

$$\Rightarrow 6^{\frac{2}{x}}\left(9^{x-\frac{1}{x}}+4^{x-\frac{1}{x}}\right)=6\left(9^{\frac{3}{2}}+4^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\longrightarrow x=2.$$

(92)

Επιλύσατε στο N την: $x^2+2=y(x+3)$

Λύση

$$y=\frac{x^2+2}{x+3}=x-3+\frac{11}{x+3}.$$

Δίον $(x+3)/11$ $\Rightarrow$ $x+3=\pm 1$ < $x=-2$, $x=-4$

$x+3=\pm 11$ < $x=8$, $x=-14$

Άρα $x=8$ και της $y=x-3+\frac{11}{x+3}$ ισχύει $y=8-3+\frac{11}{8+3}=6$

άρα $(x,y)=(8,6)$.

Πράγματι. $8^2+2=6\cdot(8+3)$

$64+2=6\cdot 11$

$66=66$

(95) Γ

Επιλύσατε τό σύστημα

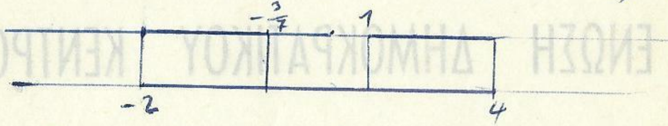
$$7x^2-4x-3>0 \quad (1)$$

$$\frac{x+2}{4-x}>0 \quad (2)$$

Τούτο ισοδυναμεί με:

$7x^2-4x-3>0$ ή $(7x+3)(x-1)>0$

$(x+2)(x-4)<0$ ή $(x+2)(x-4)<0$



Τό σύστημα ισχύει δια:

$-2<x<-\frac{3}{7} \wedge 1<x<4$.

(94)

Αν $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ καί $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}=0$

Δείξατε ότι: $\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}=0$

Απόδειξις.

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=-\left(\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)=\frac{\beta(\alpha-\beta)+\gamma(\gamma-\alpha)}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}=\frac{\beta^2-\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}$$

Τουτέστι: $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}$ καί συνεπώς.

$\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}$ ή ομοίως.

$\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}=\frac{\gamma+\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}$ "

$\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$ Έχομεν λοιπόν

$$\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}+\frac{\gamma+\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}+\frac{\alpha+\beta-\gamma}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

$$=\frac{(\beta+\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)+(\gamma+\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)+(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$ άρα

$(\beta^2-\gamma^2)-\alpha(\beta-\gamma)+(\gamma^2-\alpha^2)-\beta(\gamma-\alpha)+\alpha^2-\beta^2-\gamma(\alpha-\beta)$

καί επομένως

$$\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}=0$$

(97)

Έστω δοθέν το σύστημα

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{w}=\frac{y}{w}+\frac{w}{x}=\frac{w}{x}+\frac{x}{y}$$

Λύση. προκύπτει

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{w}=\frac{w}{x}=\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{w}\cdot\frac{w}{x}}=\sqrt[3]{1}=1,\theta,\theta^2$$

τότε α) $x=y=w=k$

β) $x_1=\theta_1 k,\ y=\theta_2 k,\ w=k$

γ) $x=\theta_2 k,\ y=\theta_1 k,\ w=k.$

(96)

Αν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=0$ δ.ό. $\sum\frac{\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-\beta\gamma}=1$

Λύση

$$\beta^3+\gamma^3=-\alpha^3 \Rightarrow \frac{\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma}{-\alpha^2}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$$ δηλαδή

$$\sum\frac{\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-\beta\gamma}=\sum\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=1.$$

(99)

Έστω η εξίσωση $x^2+px+q=0$ όπου συντελεστές p, q είναι ένας των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5 και 6. Προσδιορίσατε την πιθανότητα ότι η εξίσωση έχει
(i) δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
(ii) δύο ρίζες πραγματικές και ίσες
(iii) δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές —

Λύση. Υπάρχουν $6 \cdot 6 = 36$ ζεύγη (p,q) οπότε αντιστοιχούν 36 εξισώσεις τέτοιες.
Ο αριθμός και η πραγματικότης των ριζών εξαρτάται από την διακρίνουσα $\Delta = p^2-4q$. Αρκεί να κατασκευάσωμεν τον πίνακα.

$q \backslash p$	1	2	3	4	5	6		
1	-3	0	5	12	21	32		
2	-7	-4	1	18	17	28		
3	-11	-8	-3	4	13	24		
4	-15	-12	-7	0	9	20		
5	-19	-16	-11	-4	5	16		
6	-23	-20	-15	-8	1	12		

Υπάρχουν 17 ζεύγη (p,q) για τα οποία $\Delta > 0$
2 ζεύγη (p,q) » $\Delta = 0$
17 » (p,q) » $\Delta < 0$

Αι ζητούμεναι πιθανότητες είναι:

$P_1 = \frac{17}{36}$, $P_2 = \frac{2}{36}$ και $P_3 = \frac{17}{36}$.

(98)

Πότε το σύστημα
$$x = \beta y + \gamma z$$
$$y = \gamma z + \alpha x$$
$$z = \alpha x + \beta y$$

Είναι συμβιβαστό;

Το σύστημα γράφεται:

$\alpha x + x = \alpha x + \beta y + \gamma z = S \quad (\alpha+1)x = S \qquad x = \frac{S}{\alpha+1}$

$\beta y + y = \quad = S \quad (\beta+1)y = S \qquad y = \frac{S}{\beta+1}$

$\gamma z + z = \quad = S \quad (\gamma+1)z = S \qquad z = \frac{S}{\gamma+1}$

$$\boxed{\alpha x + \beta y + \gamma z = S}$$

$$\frac{\alpha S}{\alpha+1} + \frac{\beta S}{\beta+1} + \frac{\gamma S}{\gamma+1} = S \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1} = 1}$$

(101)

Ο λόγος δύο αριθμών είναι $3/8$. Υπολογίσατε αυτούς τούς αριθμούς σε έκαστη των ακολούθων περιπτώσεων.—

1. το γινόμενό των είναι 254616.
2. ο Μ.Κ.Δ αυτών είναι 45.
3. το ΕΚΠ αυτών είναι 1800.
4. το άθροισμα των τετραγώνων των είναι 271633.

Λύση.

1. $a = 309$ ($= 103 \cdot 3$
   $b = 824$ ($= 103 \cdot 8$.
2. $a = 225$ ($= 45 \cdot 3$
   $b = 600$ ($= 75 \cdot 8$.
3. $a = 225$ ($= 75 \cdot 3$
   $b = 600$ ($= 75 \cdot 8$.
4. $a = 183$ ($= 61 \cdot 3$
   $b = 448$ ($= 61 \cdot 8$.

(100)

Κουτίον Α περιέχει τρεις αριθμούς 2, 3, 4
Κουτίον Β " " " 1 2, 3

Έστω η εξίσωση $x^2 + bx + \gamma = 0$. Εξάγομεν από το Α έναν αριθμόν και τον θέτομεν ως b και από το Β έναν άλλο αριθμό και τον θέτομε ως γ. Υπολογίσατε την πιθανότητα ίνα η εξίσωση δέχεται:

1) δύο ρίζας πραγματικάς και άνισους.
2) μιάν διπλήν ρίζαν.
3) δύο ρητάς ρίζας.—

Λύση. Κατασκευάζομεν τον πίνακα

γ \ b	2	3	4
1	0	5	12
2	-4	1	8
3	-8	-3	4

Σημείωσις

$5) = 3^2 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$

$1) \; 3^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$\Delta = b^2 - 4\gamma$

$x^2 + bx + \gamma = 0$

Επειδή έκαστον των ζευγών έχει την ίδιαν πιθανότητα $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ευρίσκομεν γιά καθένα ... Αυτό και η πιθανότης

α) δύο πραγμ. + άνισοι $P_\alpha = \frac{5}{9}$

β. Ρίζα διπλή. $P_\beta = \frac{1}{9}$

γ) Ρίζαι ρηταί $P_\gamma = \frac{2}{9}$

Διότι μόνον τα ζεύγη $(b, \gamma) = (3, 2)$ και $(b, \gamma) = 4, 3$ δίδουν $\Delta = \square$.

(103)

Εξετάσατε εις ακεραίους αριθμούς την εξίσ. $x^2-y^2=401$

Λύσις. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι ο 401 είναι πρώτος αριθμός. Πράγματι με κανέναν εκ των πρώτων αριθμών 3, 5, 7, 11, 13 και 19 δι-αιρείται.

Έχομεν τώρα

$(x+y)(x-y)=401=401\cdot 1.$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=401 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x=201 \\ y=200 \end{matrix}$ ήτοι

Υπάρχει μοναδική λύσις εις ακεραίους θετικούς. —

(102.)

Δια ποίας τιμάς του αριθμού n το κλάσμα $f=\frac{n+8}{2n-5}$ είναι

α) ισοδύναμον με ακέραιον αριθμόν

β) με ανάγωγον κλάσμα —

Λύσις. Θέτω $N=n+8$ και $D=2n-5$ και $D-2N=-21$ (1)

α) Ίνα D διαιρεί τον N πρέπει, και αρκεί να διαιρεί τον 21 και κατά τούτο: το $2n-5$ πρέπει να ισούται προς έναν των αριθμών $3, -3, 7, -7, 21, -21$ τουτέστι ο n πρέπει να είναι εις των αριθμών $4, 1, 6, -1, 13, -8$.

β) Ίνα το f είναι ανάγωγον πρέπει ο Μ.Κ.Δ. των N και D να είναι ο 1. Συνεπώς λόγω της (1) $n+8$ θα είναι πρώτος με τον 21. Κατά τούτο ο $n+8$ θα είναι πρώτος με τον 3 και 7 τουτέστι $n\neq 3k-8$ και $n\neq 7k-8$ ή $n\neq 3k+1$ και $n\neq 7k-1$. —

(105)

Αν $x+y+z=0$ δείξτε ότι

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = 2(x^4+y^4+z^4)$$

Απόδειξη:

$$0=(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

ή $x^2+y^2+z^2 = -2(xy+yz+zx)$

Επομένως: $(x^2+y^2+z^2)^2 = 4(xy+yz+zx)^2 =$

$= 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z))$

Τελικά:

(1) $(x^2+y^2+z^2)^2 = 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

Ή αλλιώς έχουμε:

(2) $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$2(x^2+y^2+z^2)^2 = 2(x^4+y^4+z^4)+4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2)

βρίσκουμε: $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2(x^4+y^4+z^4)$.

(104)

Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

(i) $x^3-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha+\beta+\alpha\beta)x-\alpha\beta$

(ii) $x^3-\alpha x^2+\beta x^2-2\alpha\beta x-\alpha^2x+\alpha^2\beta+\alpha^3$

Λύση. Είναι:

1) $(x^3-x^2)-[(\alpha+\beta)x^2-(\alpha+\beta)x]+\alpha\beta x-\alpha\beta$ ή

$x^2(x-1)-(\alpha+\beta)x(x-1)+\alpha\beta(x-1)$ ή

$(x-1)[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$ ή τελικά $(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$

2.) $(x^3-\alpha x^2)+(\beta x^2-2\alpha\beta x+\alpha^2\beta)-(\alpha^2x-\alpha^3)$ ή

$x^2(x-\alpha)+\beta(x-\alpha)^2-\alpha^2(x-\alpha)=$

$(x-\alpha)[x^2+\beta(x-\alpha)-\alpha^2]$ ή

$(x-\alpha)[(x^2-\alpha^2)+\beta(x-\alpha)]$ ή

$(x-\alpha)[(x-\alpha)(x+\alpha)+\beta(x-\alpha)]$ τελικά

$=(x-\alpha)^2(x+\alpha+\beta)$

(107.)

Λύσατε την εξίσωση

$$\frac{(x-\alpha)^2+(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)^2}{19}=\frac{(x-\alpha)^2-(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)^2}{49}$$

Η προς λύση γράφεται:

$$\frac{2[(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2]}{19+49}=\frac{2(x-\alpha)(x-\beta)}{19-49} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2}{34}=\frac{2(x-\alpha)(x-\beta)}{-30}$$ ή

$$\frac{[(x-\alpha)+(x-\beta)]^2}{34-30}=\frac{[(x-\alpha)-(x-\beta)]^2}{34+30}$$ ή

$$16(2x-\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=0$$ ή ακόμη

$$4[2x-\alpha-\beta-(\alpha-\beta)][4(2x-\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)]=0$$

ή τέλος $(8x-5\alpha-3\beta)(8x-3\alpha-5\beta)=0$ και

$x=\frac{5\alpha+3\beta}{8}$ και $x=\frac{3\alpha+5\beta}{8}$.

(106)

Επαληθεύσατε την ταυτότητα

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$ και βάσει ταυτότητος υπολογίσατε τον αριθμόν.

$(400\cdot401\cdot402\cdot403)+1=;$

α. Επαλήθευσις της ταυτότητος.

$x(x+1)=x^2+x$

$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$. Τότε

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+x)(x^2+5x+6)+1$$
$$=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$$

Επειδή επίσης $(x^2+3x+1)^2=(x^2+3x+1)(x^2+3x+1)$
$$=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$$

η δοθείσα ταυτότης ευρίσκεται επαληθευμένη.

β) Για $x=400$ ευρίσκομεν:

$$(400\cdot401\cdot402\cdot403)+1=(400^2+3\cdot400+1)^2$$
$$=(160000+1200+1)^2=(161201)^2$$

(109)

Δίνεται η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}=2$

Εκτελώντας αυτήν ευρίσκομεν

$(x-1)^2+(x-2)^2=2(x-1)(x-2)$ ή $1=2$

Πού είναι τό λάθος;

Λύση. Τα κλάσματα $\frac{x-1}{x-2}$ και $\frac{x-2}{x-1}$ είναι αντίστροφα και αν θέσωμεν $\frac{x-1}{x-2}=\lambda$ ευρίσκομεν $\lambda+\frac{1}{\lambda}=2$ ή $\lambda^2-2\lambda+1=0$ ή $(\lambda-1)^2=0$ άρα $\lambda=1$ πρέπει λοιπόν το κλάσμα $\frac{x-1}{x-2}$ να ισούται με 1. αλλά τούτο είναι αδύνατον διότι ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος κατά μονάδα από τον παρονομαστήν του. Άρα η δοθείσα εξίσωσις είναι αδύνατη ——

(108)

Επιλύσατε τα συστήματα.

α) $\frac{yz}{x}=\frac{10}{3}$, $\frac{zx}{y}=\frac{15}{2}$, $\frac{xy}{z}=\frac{6}{5}$

β.) $x+y+z=3$, $\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha+\beta+\gamma$, $xyz=1$.

Λύση.

α) $xyz=\frac{10\cdot15\cdot6}{3\cdot2\cdot5}=30$ (4)

$\frac{(4)}{(1)}=\frac{xyz}{\frac{yz}{x}}=\frac{30}{\frac{10}{3}}\Longrightarrow x^2=9$ $\quad x=\pm3$

$\frac{(4)}{(2)}=$ $\quad y^2=4$ $\quad y=\pm2$

$\frac{(4)}{(3)}=$ $\quad z^2=4$ $\quad z=\pm5$.

Δεκτές λύσεις.
(i) $(x,y,z)=(3,2,5)$
ii $(x,y,z)=(+3,-2,-5)$
iii) $(x,y,z)=(-3,+2,-5)$
(IV) $(x,y,z)=(-3,-2,+5)$

β) $\left.\begin{aligned}(x-1)+(y-1)+(z-1)&=0 \quad (1)\\ \alpha(x-1)+\beta(y-1)+\gamma(z-1)&=0 \quad (2)\\ xyz&=1 \quad (3)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$

$\frac{x-1}{\begin{vmatrix}1&1\\ \beta&\gamma\end{vmatrix}}=\frac{y-1}{\begin{vmatrix}1&1\\ \gamma&\alpha\end{vmatrix}}=\frac{z-1}{\begin{vmatrix}1&1\\ \alpha&\beta\end{vmatrix}}=h \Longrightarrow \begin{aligned}x-1&=h(\gamma-\beta)\\ y-1&=h(\alpha-\gamma)\\ z-1&=h(\beta-\alpha)\end{aligned}$

η (3) γίνεται $[h(\gamma-\beta)+1]\cdot[h(\alpha-\gamma)+1]\cdot[h(\beta-\alpha)+1]=0$

$\Rightarrow f(h)=0 \Rightarrow h=0$ και $f(h)=$ δευτεροβάθμιος

Διά $h=0$ ευρίσκομεν την προφανή λύσιν

$x=y=z=1$ κλπ

(111)

Αν $\alpha < A < \beta$ τότε $(A-\alpha)(A-\beta) < 0$

$\alpha < \frac{A}{B} < \beta$ τότε $(A-B\alpha)(A-B\beta) < 0$

$2 < x^2-8x+17 < 10 \Rightarrow (x^2-8x+15)(x^2-8x+7) < 0$

$2 < \frac{x^2+8}{3x} < 3 \Rightarrow (x^2-6x+8)(x^2-9x+8) < 0$

Λύση των παραδειγμάτων:

1) $2 < x^2-8x+17 < 10 \Rightarrow$

$(x^2-8x+15)(x^2-8x+7) < 0 \Rightarrow$

$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) < 0 \Rightarrow$

$1 < x < 3 \wedge 5 < x < 7$

2) $2 < \frac{x^2+8}{3x} < 3.$

$(x^2+8x-6x)(x^2+8x-9x) < 0 \Rightarrow$

$(x^2-6x+8)(x^2-9x+8) < 0 \Rightarrow$

$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) < 0 \Rightarrow$

$1 < x < 2 \wedge 4 < x < 8.$

(110)

Υπολογίσατε την ορίζουσαν.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \end{vmatrix}$$ Εὑρίσκομεν:

$$\Delta = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma).$$

(113)

Δεῖξε ὅτι:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Ἀπόδειξη. Θέτω $\sqrt[3]{2} = \alpha \Rightarrow \alpha^3 = 2$

Θα πρέπει να δείξω ὅτι:

$(1-\alpha+\alpha^2)^3 = 9(\alpha-1)$ · ἔχω

$(1-\alpha+\alpha^2)^2 = 1+\alpha^2+\alpha^4+2\alpha+2\alpha^3-2\alpha =$

$= 3(\alpha^2-1)$ ἐπειδὴ $\alpha^3 = 2$ ἢ $\alpha^4 = 2\alpha$

οὕτω $(1-\alpha+\alpha^2)^3 = 3(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha^2-1)$

$= 3(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)$

$= (\alpha^3+1)(\alpha-1) = 9(\alpha-1).$

(112)

Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωση

$2x + 5y = 23$ σὲ ἀκεραίους θετικούς.

Λύση. $x = \frac{23-5y}{2} = \frac{22-4y+1-y}{2}$

$x = 11 - 2y + \frac{1-y}{2}$ (2)

Θέτω $\frac{1-y}{2} = t$ (3)

t ὅπου ἀκέραιος ὄχι ἀναγκαίως θετικός

Συνεπῶς ἐκ τούτου $y = 1 - 2t$. (4)

Τότε ἡ (2) γράφεται: $x = 11 - 2y + t$ ἢ

λόγῳ τῶν (3) (4) $x = 9 + 5t$ (5)

Ἐκφράζομε τώρα ὅτι x καὶ y ἀπὸ (4) κ (5) πρέπει νὰ εἶναι θετικοί. τ.ε.

$t < \frac{1}{2}$ καὶ $t > -\frac{9}{5}$. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο τιμὲς ὄχι ἀναγκαστικῶς τοῦ t. Ἄρα δύο καὶ συνεπῶς δύο ζεύγη λύσεων

1ο. $t = -1$ καὶ $x = 4$, $y = 3$

2ο $t = 0$ καὶ $x = 9$, $y = 1$.

(115.)

Να ευρεθῇ ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς ὅταν τὸ ἄθροισμά του ἢ μὲ τὸν 8 ἢ μὲ τὸν 27 νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον —

Λύση. Προκύπτει τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x+8 &= A^2 \\ x+27 &= B^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow B^2 - A^2 = 19 \text{ ἢ}$$

$$(B+A)(B-A) = 19 \cdot 1 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} B+A &= 19 \\ B-A &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} 2B &= 20 \\ 2A &= 18 \end{aligned} \text{ ἢ } \begin{aligned} B &= 10 \\ A &= 9 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x+8 &= 9^2 \\ x+27 &= 10^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 73 \\ x &= 73 \end{aligned}$$

Ἐπαλήθευση: $8+73 = 81 = 9^2$

$27+73 = 100 = 10^2$

(114)

Ἐπιλύσατε τὴν ἐξίσωση

$$x! + 1 = (x+1)^2 \quad / x \in N.$$

Λύση. $x! = (x+1)^2 - 1$

$x! = x(x+2) \Longrightarrow$

$(x-1)! = x+2 \quad / x \in N$

$(x-1)! - (x-1) = 3 \Longrightarrow$

$(x-1)\left[(x-2)! - 1\right] = 3$

Ταύτην θα ἐξετάσομεν ἐὰν περιπτώσεις

$x-1 = 3,\ (x-2)! - 1 = 1 \Longrightarrow x = 4$

$x-1 = 1,\ (x-2)! - 1 = 3$ ἄτοπον ἀφού

$x-1 = -3,\ (x-2)! - 1 = -1$

$x-1 = -3,\ (x-2)! - 1 = -3$

Ἔπεται λοιπὸν ὅτι $\boxed{x=4}$ ἥτις εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως —

Νά γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις
$A_1 = \alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)$ καί
βάσει ταύτης ἡ παράστασις:
$A_2 = \sum_{\alpha\beta\gamma}(\beta-\gamma)^2(\beta+\gamma-2\alpha)$.

(α) Θά ἔχωμεν διαδοχικῶς

$$\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta) =$$
$$\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2\gamma-\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-\beta\gamma^2$$
$$= \alpha^2(\beta-\gamma)+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)$$
$$= \alpha^2(\beta-\gamma)+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)$$
$$= (\beta-\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma)$$
$$= (\beta-\gamma)[\alpha(\alpha-\beta)-\gamma(\alpha-\beta)] =$$
$$= (\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma). = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$$

(β) Θέτω $\beta-\gamma = x$, $\gamma-\alpha = y$, $\alpha-\beta = \omega$ ὁπότε $\beta+\gamma-2\alpha = y-\omega$, $\gamma+\alpha-2\beta = \omega-x$, $\alpha+\beta-2\gamma = x-y$

καί ἡ παράστασις γίνεται:

$$A = x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y) = -(y-\omega)(\omega-x)(x-y)$$

καί κατά τό ἀνωτέρω παράδειγμα:

$$= -(\beta+\gamma-2\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)(\alpha+\beta-2\gamma).$$

Δεῖξαι ὅτι $4[(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta')] =$
$[2(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')-\beta\beta']^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)(\beta'^2-4\alpha'\gamma')$. P. 45(4) σελ. 16.

Ἀναπτύσσομεν τήν παράστασιν $[2(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')-\beta\beta']^2$ ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ $4(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')^2+\beta^2\beta'^2(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')$

Ἡ δέ ἄλλη $(\beta^2-4\alpha\gamma)(\beta'^2-4\alpha'\gamma') \equiv \beta^2\beta'^2-4\beta^2\alpha'\gamma'-4\beta'^2\alpha\gamma+16\alpha\gamma\alpha'\gamma'$

Ἀφαιροῦντες κατά μέλη βλέπομεν ὅτι τό β' μέλος τῆς προτεινομένης ἀποδείξεως εἶναι

$$4[(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')^2-4\alpha\gamma\alpha'\gamma']+4[\beta^2\alpha'\gamma'+\beta'^2\alpha\gamma-\beta\beta'(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')]$$

Ἀλλά $(\alpha\gamma'+\gamma\alpha')^2-4\alpha\gamma\alpha'\gamma' \equiv (\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2$
$\beta^2\alpha'\gamma'+\beta'^2\alpha\gamma-\beta\beta'(\alpha\gamma'+\gamma\alpha') \equiv -(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta')$

ὥστε τό β' μέλος τῆς ταυτότητος εἶναι

$4[(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta')]$ ἤτοι τό α' μέλος τῆς αὐτῆς ταυτότητος.—

(119)

Μαθητής ερωτηθείς, πόσος ο βαθμός του εις τα Μαθηματικά απήντησε: είτε τον ελαττώσετε κατά 6 είτε τον διαιρέσετε με το $\frac{3}{2}$ θα εύρετε το ίδιο αποτέλεσμα. Πόσος ο βαθμός του —

ο ζητούμενος βαθμός έστω x. Θα έχουμε την εξίσωση:

$$x - 6 = \frac{x}{\frac{3}{2}} \quad ή \quad x - 6 = \frac{2x}{3}$$

$$ή \quad \frac{x}{3} = 6 \quad και \quad x = 18.$$

Τέλειος κατορθωμένος. Δίνει η θέση του ≤ 20 δηλαδή να διατηρεί την ισχύουσα βαθμολογική κλίμακα —

(118)

Δείξτε ότι $\frac{β-γ}{1+βγ} + \frac{γ-α}{1+γα} + \frac{α-β}{1+αβ} = 0$

(121)

Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A=(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}.$$

Υπολογίζω το A^2.

και έπειτα το A που είναι αρνητικό διότι $\sqrt{3}<2$

$A^2=(8+4\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^2(\sqrt{3}+2)$

$A^2=4(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^2(\sqrt{3}+2)$

$A^2=4\left[(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)\right]^2$

$A^2=4(3-4)^2=4$ και $\boxed{A=-2}$

διότι $A<0$.

(120)

Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση:

$1+x+|x|=2y(1+|x|)$ δείξτε ότι θα ισχύουν

και τα $|2y-1|<1$ και $2y-1=x(1-|2y-1|)$

και αντίστροφα. (μάθημα σελ 39.)

Είναι $2y=\frac{1+x+|x|}{1+|x|}$ ή $2y-1=\frac{x}{1+|x|}$ επομένως

$|2y-1|=\left|\frac{x}{1+|x|}\right|=\frac{|x|}{1+|x|}$ επειδή όμως

$|x|<|x|+1$ άρα $\frac{|x|}{1+|x|}<1$ θα

έχουμε $|2y-1|<1$.

Η $1-|2y-1|=\frac{1}{1+|x|}$ οπότε

$x\{1-|2y-1|\}=\frac{x}{1+|x|}$ αλλά όμως

$\frac{x}{1+|x|}=2y-1$ επομένως $\cancel{\frac{x}{1+|x|}=2y-1}$

$x\{1-|2y-1|\}=2y-1$.

Αντίστροφα

έχω $x=\frac{2y-1}{1-|2y-1|}$ επειδή $1-|2y-1|>0$

$|x|=\left|\frac{2y-1}{1-|2y-1|}\right|=\frac{|2y-1|}{1-|2y-1|}$ οπότε

$1+x+|x|=\frac{2y}{1-|2y-1|}$ και $1+|x|=\frac{1}{1-|2y-1|}$ ή

$2y\{1+|x|\}=\frac{2y}{1-|2y-1|}$ επομένως

$2y\{1+|x|\}=1+x+|x|$.

(123)

Σε ποιόν σύστημα αριθμήσεως είναι $132^2 = 21054$; (7δικόν.)

Η λύση. Η βάση του ζητουμένου αριθ. συστήματος x θα είναι ρίζα της εξισώσεως:

$(1 \cdot x^2+3x+2)^2 = 2 \cdot x^4+1 \cdot x^3+0 \cdot x^2+5x+4$. ή

$x^4+9x^2+4+6x^3+4x^2+12x = 2x^4+x^3+5x+4$ ή

$x^4+9x^2+4+6x^3+4x^2+12x-2x^4-x^3-5x-4 = 0$

ή $-x^4+13x^2+5x^3+7x = 0$ ή

$x^4-5x^3-13x^2-7x = 0$ ή

$x(x^3-5x^2-13x-7) = 0 \Rightarrow x=0$

$\Longrightarrow \boxed{x=7}$

(122)

Γνωρίζοντες ότι $96842 = 256 \cdot 375 + 842$ να προσδιορίσετε χωρίς να κάνετε τη διαίρεση το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαιρέσεως του αριθμού 96842 δι' εκάστου των αριθμών 256 και 375. —

Η λύσις όμως δεν παραμένει στην μορφή της 96842 με υπόλοιπον για τον 256 ή 375 διότι $842 > 256, 375$.

Έχομεν λοιπόν $842 = 256 \times 3 + 74$

$842 = 375 \times 2 + 92$

Το πηλίκον της 96842 δια της 256 είναι, δηλαδή $375+3 = 378$ και το υπόλ. 74.

Το πηλίκον της 96842 δια 375 είναι, ομοίως $256+2 = 258$ και το υπόλοιπον 92 —

(125)

Ἐδαπανήθη τὸ ἔλαιον ἐκ κυλινδρικοῦ δοχείου περιφερείας 0,8 m καὶ ὕψους 50 cm. Διὰ νὰ ξαναγεμίσῃ ἔλαιον δύο κυλινδρικὰ δοχεῖα ὅμοια περιφερείας 4 καλαμιοῦ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἀπόδοσις τὴν λύσιν ποσοτικῶς; —

— Λύσις. Τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχον περιφέρειαν διπλασίαν τοῦ ἄλλου ἔχει βάσιν τετραπλασίαν καὶ χωρητικότητα ἀνάλογον, ἄρα ἴσην 4 μικρῶν. Συνεπῶς ἀρκεῖ νὰ δοθοῦν 4 μικρὰ δοχεῖα. —

(124)

Μαθητὴς πολλαπλασιάζων ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 40 ἐσημείωσεν ἐξ ἀβλεψίας τὸ 0 ἔξω τοῦ γινομένου καὶ οὕτως εὗρε γινόμενον κατὰ 13932 μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ. Ποῖος ἦτο ὁ πολλαπλασιαστέος;

Λύσις. Ὁ μαθητὴς ἐπολλαπλασίασεν ἐπὶ 4. Ἄρα ἡ διαφορὰ 13432 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἐπὶ 40 − 4 = 36. Ὥστε ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι:

13932 : 36 = 387. —