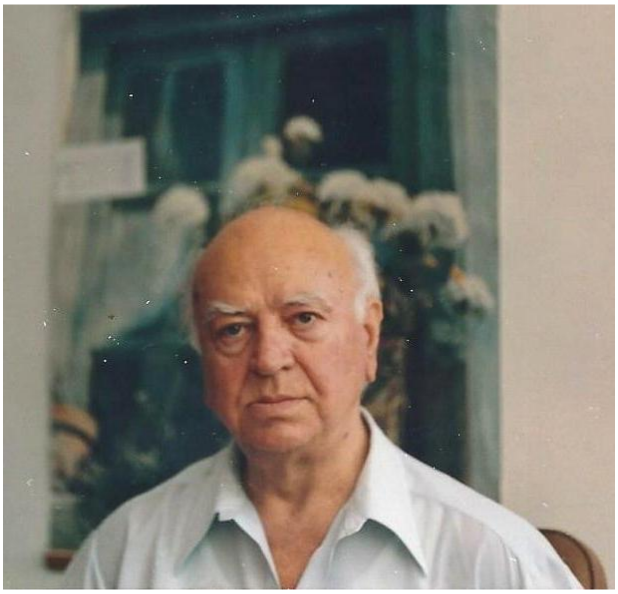
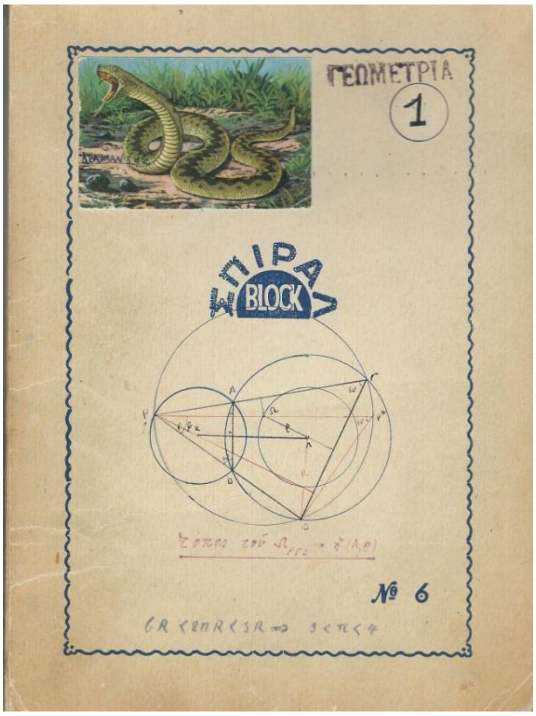
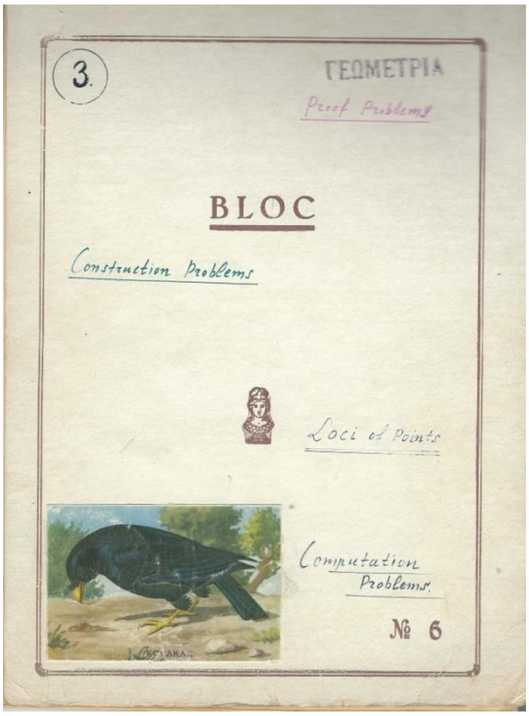


Οι καρτέλες Γεωμετρίας του Μαθηματικού

Χρήστου Απ. Τσιγαρίδα





ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΑΡΤΕΛΛΩΝ

38. ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΕΚ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΥΨΩΝ κτλ

39. " " ΤΗΣ ΔΙΑΦ. ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΔΥΟ ΥΨΩΝ

40. " " ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ ή ΤΗΣ α, κτλ

41. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ν ἐκ τοῦ τύπου $\delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$

42. ΣΗΜΕΙΟΝ Μ ΕΠΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜ. ΠΕΡΙ ΙΣΟΠΛ. ΤΡ. ΠΕΡΙΦ/ΑΣ

43. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΠΛΗΡΟΥΣ 4ΠΛΕΥΡΟΥ.—

44. Γωνία δύο [illegible] τεμνουσῶν περιφερειῶν.—

45. Ἐγγράψιμον σχῆμα ἐν ἴσαις θέσει, αὔξησις γωνίας

46. Τρίγωνον ΑΒΓ. [illegible] [illegible] τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῆς [illegible] κτλ

47. Θεώρημα τῆς μορφῆς $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. x, y, z [illegible] —

48. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία [illegible] τῆς ἀνισ. τοῦ Cauchy.

49.

50.

51.

52.

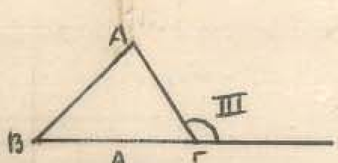
53.

54.

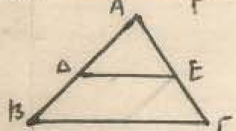
55.

56.

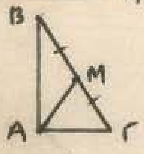
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΟΠΛΑ



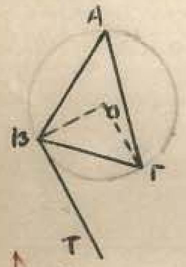
$\sphericalangle \mathrm{III} = A + B \qquad \mathrm{III} > A, B$



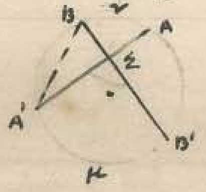
$(\Delta E) \parallel = \frac{B\Gamma}{2}$



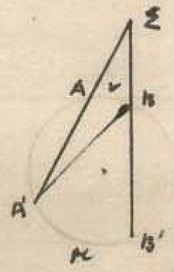
$(AM) = \frac{(B\Gamma)}{2} \qquad \text{Αν } B = 30^\circ \;\Big|\; \beta = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{ημ}\,30^\circ = \frac{1}{2}$



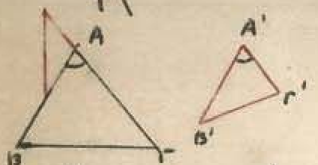
$\sphericalangle A = \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2}, \quad \widehat{TO\Gamma} = \hat{A}$



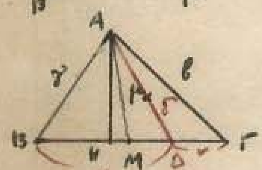
$A'\Sigma B' = \frac{\overset{\frown}{\kappa + \nu}}{2}$



$\widehat{A'\Sigma B'} = \frac{\overset{\frown}{\kappa - \nu}}{2}$



Αν $A = A'$, $A + A' = 2^L$ $\quad\Big|\quad \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{(AB)(A\Gamma)}{(A'B')(A'\Gamma')}$

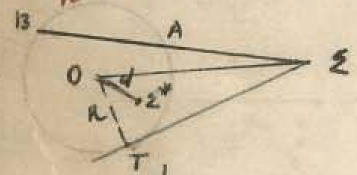


$\mathrm{I.}\ \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$\mathrm{II.}\ \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha(HM)$

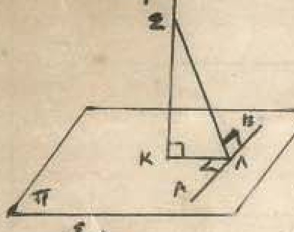
th. Stewart

$\beta^2\mu + \gamma^2\nu = \alpha\delta^2 + \alpha\mu\nu$

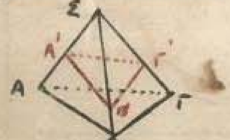


$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma T)^2 = (\Sigma O)^2 - R^2$

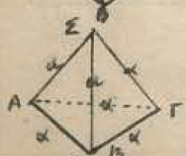
Δύναμις $\Sigma^* = R^2 - d^2$



$\Sigma K \perp \pi$	$\Sigma K \perp \pi$	$\Sigma \Lambda \perp AB$
$K\Lambda \perp AB$	$\Sigma\Lambda \perp AB$	$K\Lambda \perp AB$
		$\Sigma K \perp K\Lambda$
$\Sigma\Lambda \perp AB$	$K\Lambda \perp AB$	$\Sigma K \perp \pi$

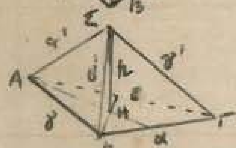


$$\frac{V_{\Sigma AB\Gamma}}{V_{\Sigma A'B'\Gamma'}} = \frac{(\Sigma A)(\Sigma B)(\Sigma\Gamma)}{(\Sigma A')(\Sigma B')(\Sigma\Gamma')}$$



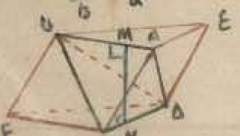
ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΝ.

$$V = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$$



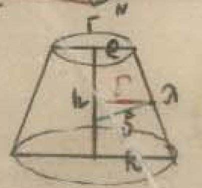
– τρισορθογώνιον τετράεδρον

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\alpha'^2} + \frac{1}{\beta'^2} + \frac{1}{\gamma'^2}, \quad V = \frac{1}{6}\alpha'\beta'\gamma', \quad (AB\Gamma)^2 = (\Sigma B\Gamma)^2 + (\Sigma\Gamma A)^2 + (\Sigma AB)^2$



Όγκος τυχόντος τετραέδρου.

$V = \frac{1}{3}\,\text{εμ}(ABE)\,h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(AB)(AE)\,\text{ημ}\,B\hat{A}E \cdot h = \frac{1}{6}(AB)(\Gamma\Delta)(MN)\,\text{ημ}\,\delta$



παράπλευρος επιφ. κολ. κώνου

$E = \pi(R+\rho)\lambda$

$E = 2\pi\delta\lambda$

$E = 2\pi h\xi$

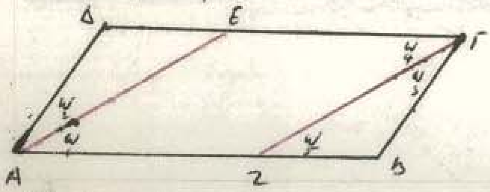
Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΣΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ ΔΙΑΦ. ΓΕΩΜ. ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

I. Εἰσαγωγική παρατήρησις.

Αἱ ἴσαι πλευραί ἑνός τριγώνου ἀντικαθίστανται μέ ἰσότητα γωνιῶν π.χ. Ἄν ΑΒ=ΑΓ τότε ∢Β=Γ ὁμοίως ἄν ΑΓ>ΑΒ ἔχομεν ∢Β>Γ.

Ἰδού παραδείγματα τινα· ἐξ ὧν καταφαίνεται ἡ ἀξία τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου —

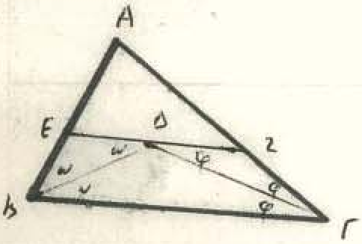
1 Αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι.



$\omega_i = \omega \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

συνεπῶς ἐπειδή $\omega_1 = \omega_5$ $AE \parallel Z\Gamma$.

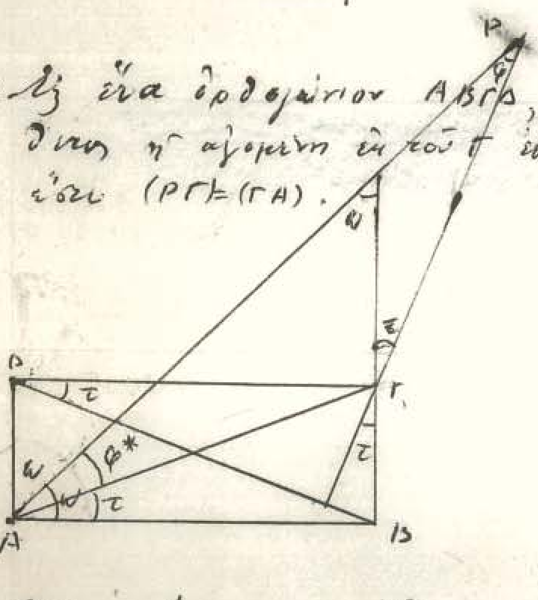
2 Διά τοῦ σημείου τῆς τομῆς Δ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καί Γ τριγώνου ΑΒΓ ἄγομεν παράλληλον πρός τήν ΒΓ τέμνουσαν τήν ΑΒ εἰς Ε καί τήν ΑΓ εἰς Ζ. Δεῖξαι ὅτι ΕΖ=ΒΕ+ΓΖ.



Ἀπόδειξις. Εἶναι

$$\begin{aligned} E\Delta &= BE \\ \Delta Z &= \Gamma Z \\ \hline E\Delta + \Delta Z &= BE + \Gamma Z \\ EZ &= BE + \Gamma Z. \end{aligned}$$

3 Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α καί ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Γ ἐπί τήν ΒΔ, τέμνονται εἰς Ρ, τοιοῦτον ὥστε (ΡΓ)=(ΓΑ).

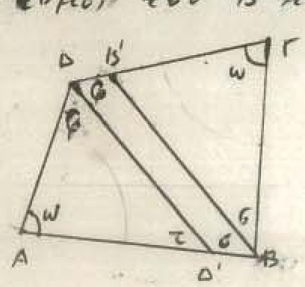


Ἰσχύει
$\omega = \varphi + \tau \quad (1)$
$\omega = \varphi^* + \tau \quad (2)$

Διά συγκρίσεως τούτων $\varphi = \varphi^*$

συνεπῶς $(\Gamma A) = (\Gamma P)$

4 Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $A = \Gamma$ (ἤ $A \wedge \Gamma = 1^L$) Δεῖξαι ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν Β καί Δ εἶναι παράλληλοι.

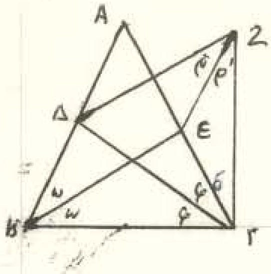


Ἔχω $2\omega + 2\varphi + 2\sigma = 4 \Rightarrow \omega + \varphi + \sigma = 2^L$
$\omega + \varphi + \tau = 2^L$

$\Rightarrow \omega + \varphi + \sigma = \omega + \varphi + \tau$ ἤ $\sigma = \tau$

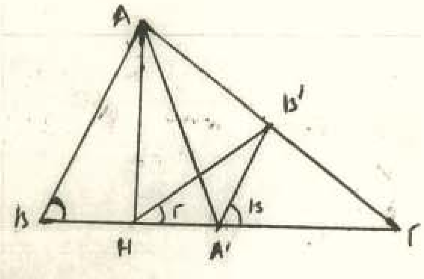
ἐκ τούτου ΒΔ' ∥ ΒΒ'.

5 Ἐάν αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν τριγώνου εἶναι ἴσαι, τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.



Ἔστωσαν ΒΕ καί ΓΔ δύο ἴσαι διχοτόμοι τριγώνου ΑΒΓ. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.
Ἄν Β>Γ θα εἶναι ω>φ. Ἄν δέ ΔΖ//=ΒΕ τότε θα ἔχω ΔΖ=ΒΕ=ΓΔ καί ρ+ρ'=φ+σ. Ἐπειδή δέ ρ=ω>φ ἔσεται ρ'<σ καί ἑπομένως ΓΕ<ΕΖ.
Ἐξ ἄλλου ἐπειδή τά τρίγωνα ΒΓΕ, ΒΓΔ ἔχουν ΒΓ κοινήν, ΓΔ=ΒΕ καί ω>φ θα εἶναι ΓΕ>ΒΔ ἤ ΓΕ>ΕΖ ὅτι ἀντίκειται εἰς τήν ΓΕ<ΕΖ. Ἐξ οὗ ἀσυμβίβαστον συμπέρασμα καταλήγομεν ὑποθέσαντες ἀνίσους τάς Β καί Γ. Ἑπομένως αὗται εἶναι ἴσαι καί τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

6 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τό ὕψος ΑΗ καί συμβολίζομεν τά μέσα Α' καί Β' τῶν ΒΓ καί ΑΓ. Δεῖξον ὅτι ∢ $HB'A' = B - \Gamma$.



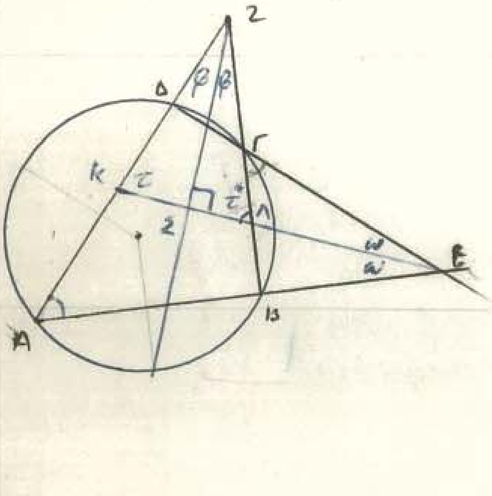
Εἶναι $\widehat{B'A'\Gamma} = B$

$B'H\Gamma = \Gamma$.

∢ $B = \Gamma + HB'A' \Longrightarrow$

$\widehat{HB'A'} = B - \Gamma$.

7 Δίδεται τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. ΑΒ καί ΔΓ προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς Ε, αἱ ΒΓ καί ΑΔ εἰς Ζ. Δεῖξον ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν Ε καί Ζ τέμνονται καθέτως.



Αἱ ἴσαι γωνίαι φαίνονται εἰς τό σχῆμα

$\tau = A + \omega$

$\tau^* = \Gamma + \omega$ ἀλλά $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Ἑπομένως $\tau = \tau^*$ καί τό τρίγωνον ΖΚΛ εἶναι ἰσοσκελές ὅτι ἡ διχοτόμος ΖΣ εἶναι καί ὕψος

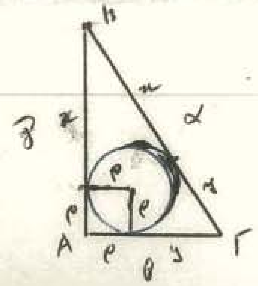
κατά ταῦτα ΕΣ⊥ΖΣ.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΣΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

πρὸς ἀπόδειξιν διαφόρων προτάσεων.

Καταφαίνεται ἐκ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα,

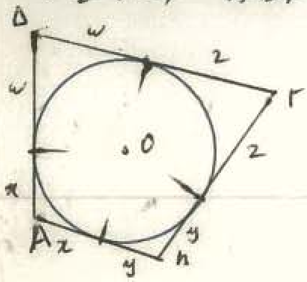
1 Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον δεῖξε ὅτι $\beta+\gamma=\alpha+2\rho$.



Ἔχομεν προφανῶς $x+y=\alpha$

$$x+y+2\rho=\alpha+2\rho$$
$$(x+\rho)+(y+\rho)=\alpha+2\rho$$
$$\gamma+\beta=\alpha+2\rho.$$

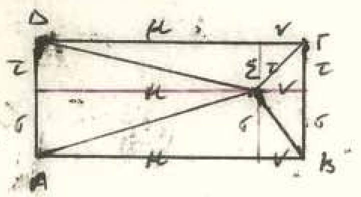
2 Εἰς περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O,R) τετράπλευρον ΑΒΓΔ δεῖξε ὅτι $AB+\Gamma\Delta=B\Gamma+A\Delta$.



Ἔχομεν: $x+y+z+\omega = x+y+z+\omega$

$$(x+y)+(z+\omega)=(y+z)+(\omega+x) \quad ἢ$$
$$(AB)+(\Gamma\Delta)=(B\Gamma)+(A\Delta).$$

3 Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ἐκ τὸ ἐσωτερικὸν του σημεῖον Σ. Δεῖξε ὅτι $(\Sigma A)^2+(\Sigma\Gamma)^2=(\Sigma B)^2+(\Sigma\Delta)^2$.

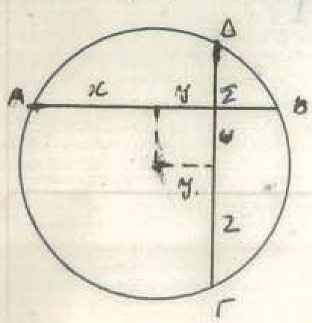


Εἶναι $\Sigma A^2=\mu^2+\sigma^2$

$$\Sigma\Gamma^2=\tau^2+\nu^2$$
$$\Sigma A^2+\Sigma\Gamma^2=\mu^2+\nu^2+\sigma^2+\tau^2 \quad (1)$$
$$\Sigma B^2=\sigma^2+\nu^2$$
$$\Sigma\Delta^2=\mu^2+\tau^2$$
$$\Sigma B^2+\Sigma\Delta^2=\mu^2+\nu^2+\sigma^2+\tau^2 \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνει ὅτι $\Sigma A^2+\Sigma\Gamma^2=\Sigma B^2+\Sigma\Delta^2$.

4 Δίδεται περιφέρεια (O,R) καὶ σύστημα καθέτων χορδῶν ΑΣΒ καὶ ΓΣΔ διερχομένων διὰ σταθεροῦ σημείου Σ ἐντὸς τοῦ κύκλου. Δεῖξε ὅτι $\Sigma A^2+\Sigma B^2+\Sigma\Gamma^2+\Sigma\Delta^2=4R^2$.



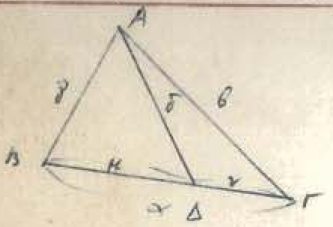
Ἀπόδειξη

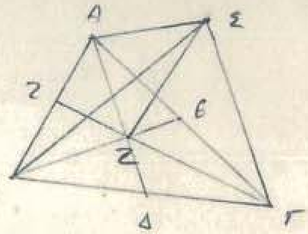
$$\Sigma A=x+y$$
$$\Sigma B=x-y$$
$$\Sigma\Gamma=z+\omega$$
$$\Sigma\Delta=z-\omega$$

$$\Sigma(\Sigma A)^2=2(x^2+y^2+z^2+\omega^2)=2\cdot 2R^2=4R^2$$

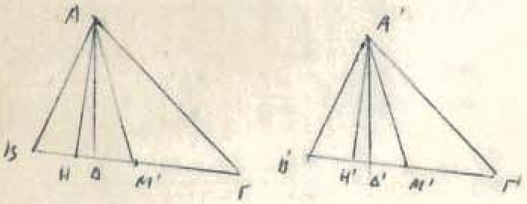
ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1. Ἄν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ τότε $\angle A = 1^L$
2. Ἄν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $\angle B = 30$ τότε $\beta = \frac{\alpha}{2}$ ~ ημ $30^\circ = \frac{1}{2}$
3. Θεώρημα Simson. Ἰδιότητες εὐθείας Simson.
4. Περιφέρεια τῶν 9 σημείων (Euler). Εὐθεῖα Euler $\overline{OO_9GH}$.
5. Σχέσεις ἀφορῶσαι εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον.
6. Θεωρήματα διαμέσων καί τύποι ἐσωτ. εἰς τυχόν.
7. Θεώρημα Stewart. → $\beta^2\mu + \gamma^2\nu = \alpha\delta^2 + \alpha\mu\nu$.





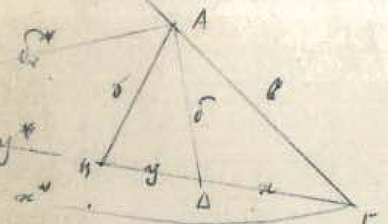
8. Θεώρημα Leibnitz. → $\Sigma A^2 + \Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2 = 3(\Sigma Z)^2 + ZA^2 + ZB^2 + Z\Gamma^2$.
9. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον.
10. Γενικόν θεώρημα τῶν ὁμοίων τριγώνων



$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\tau}{\tau'} = \lambda = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\alpha'} = \frac{\delta_\alpha}{\delta_\alpha'} = \frac{R}{R'} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_\alpha'}$$

$$\frac{E}{E'} = \lambda^2.$$ κλπ.

11. Θεώρημα διχοτόμου – Ἀπολλ. περιφέρεια.



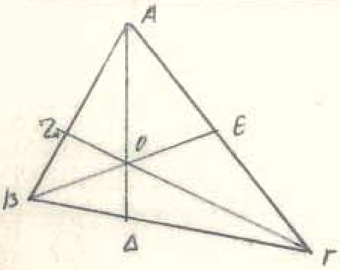
$$\frac{x}{\beta} = \frac{y}{\gamma} = \frac{x+y}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma} \sim x = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma},\quad y = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$$

$$\frac{x^*}{\beta} = \frac{y^*}{\gamma} = \frac{x^*-y^*}{\beta-\gamma} = \frac{\alpha}{\beta-\gamma} \sim x^* = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma} \quad y^* = \frac{\alpha\gamma}{|\beta-\gamma|}$$

$$P_{\text{Απολ.}} = y + y^* = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\alpha\gamma}{|\beta-\gamma|} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{|\beta^2-\gamma^2|}$$

12. $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha = \delta_\alpha^2 + xy = (AI)(AI_\alpha) = xy - \delta_\alpha^{*2} = \rho_\beta\rho_\gamma + \rho\rho_\alpha$. $\{\alpha\beta\gamma = 4RE\}$
13. Θεωρήματα Πτολεμαίου.
14. Θεώρημα Euler. $OI^2 = R(R-2\rho)$ → πόρισμα $\rho \leq \frac{R}{2}$
15. Θεώρημα Carnot.

16. Θεώρημα Van Aubel.



Ο τυχόν. $\rightarrow$ $\dfrac{AO}{O\Delta} = \dfrac{AZ}{ZB} + \dfrac{AE}{E\Gamma}$

1. Αν $O \equiv I$ $\quad \dfrac{AO}{O\Delta} = \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}$

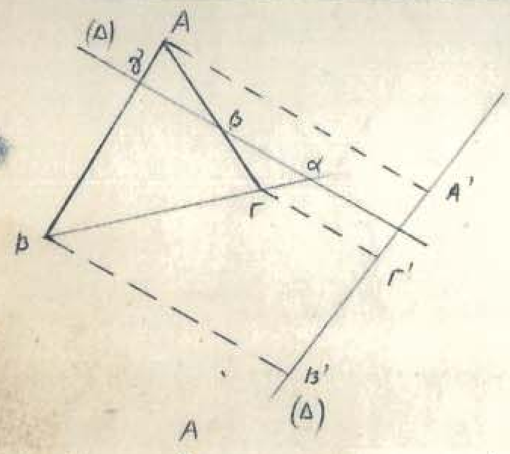
2. » $O \equiv Z$ $\quad \dfrac{AO}{O\Delta} = 2$

3. » $O \equiv H$ $\quad \dfrac{AO}{O\Delta} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}$ (διότι $\dfrac{AZ}{ZB} = \dfrac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi A}, \dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{\varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi A}$)

4. » $O \equiv L$ $\quad \dfrac{AO}{O\Delta} = \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$ (διότι $\dfrac{AZ}{ZB} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}, \dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}$)

5. » $O \equiv G$ $\quad \dfrac{AO}{O\Delta} = \dfrac{\alpha(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ (διότι $\dfrac{AZ}{ZB} = \dfrac{\tau-\alpha}{\tau-\beta}, \dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{\tau-\alpha}{\tau-\gamma}$)

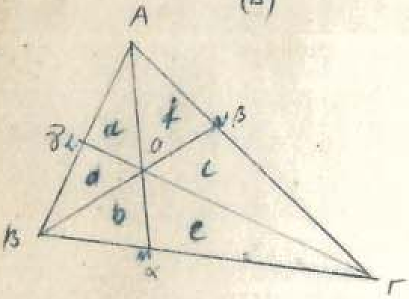
17. Θεωρήματα Ceva - Μενελάου.



(i) $\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha\Gamma}} \cdot \dfrac{\overline{\beta\Gamma}}{\overline{\beta A}} \cdot \dfrac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{I\Gamma'}} \cdot \dfrac{\overline{I\Gamma'}}{\overline{IA'}} \cdot \dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}} = 1.$



(ii) $\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha\Gamma}} \cdot \dfrac{\overline{\beta\Gamma}}{\overline{\beta A}} \cdot \dfrac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1$

$\dfrac{LA}{LB} = \dfrac{OCA}{OCB} \quad \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{OAB}{OAC}, \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{OBC}{OBA}$

$\dfrac{LA}{LB} \cdot \dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} = 1$ ἢ $\dfrac{\alpha B}{\alpha\Gamma} \cdot \dfrac{\beta\Gamma}{\beta A} \cdot \dfrac{\gamma A}{\gamma B} = -1.$

18. Θεώρημα Sylvester. $\quad \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}.$

19. Θεώρημα Ceva - Μενελάου διά στρεβλόν 4πλευρον

Εάν εν επίπεδον τέμνει τας πλευράς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός στρεβλού 4πλεύρου εις τα σημεία Μ, Ν, Ρ, Q, ισχύει την αλγεβρικήν σχέσιν.

$\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{NB}{N\Gamma} \cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QD}{QA} = 1$ και αντιστρόφως.

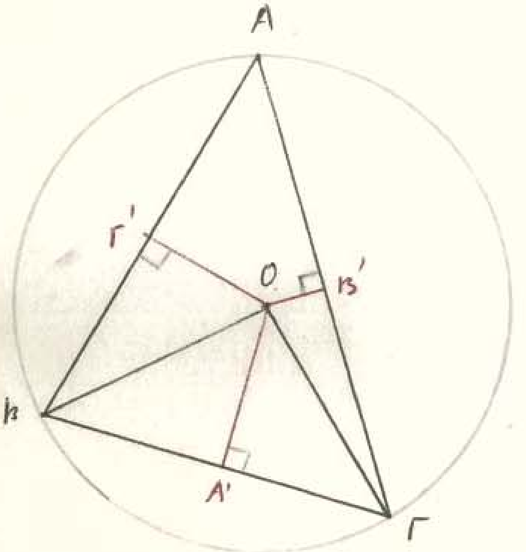
Απόδειξις. Έστω ο το ίχνος τυχούσης ευθείας ΧΨ μετά του επιπέδου (ΜΝΡQ) διά εκάστης κορυφής των 4 πλευρών φέρομεν παράλληλα επίπεδα προς το ΜΝΡQ και έστωσαν a, b, c, d τα σημεία καθ' α τα επίπεδα τέμνουν την ΧΨ

τότε $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{oa}{ob}, \quad \dfrac{NB}{N\Gamma} = \dfrac{ob}{o\gamma}, \quad \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{o\gamma}{od}, \quad \dfrac{QD}{QA} = \dfrac{od}{oa}$. άρα $\dfrac{oa}{ob} \cdot \dfrac{ob}{oc} \cdot \dfrac{oc}{od} \cdot \dfrac{od}{oa} = 1$

Έπεται η απόδειξις.—

ΚΕΝΤΡΟΝ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

(O ≡ σημεῖον τομῆς μεσοκαθέτων)

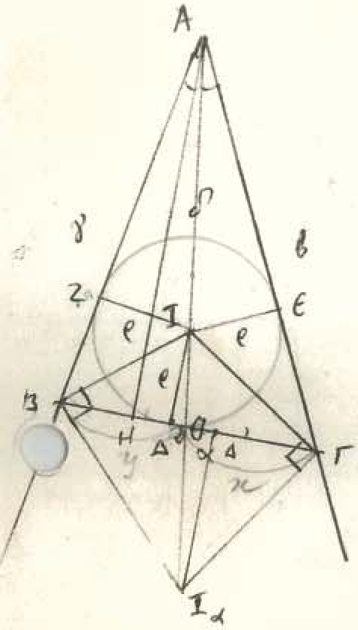


-Δε ὅτι

1. $\sphericalangle B O \Gamma = 2 . A$
2. $\beta\gamma = 2 R \upsilon_\alpha$
3. $R = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4E} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$
4. $R = D_9$ (διαμ. κυκ. O_9)
5. Ἄν $B\Gamma = \alpha_0$, $\sphericalangle A = A_0$, τότε R σταθερόν (ἤ ἄλλως $\alpha = 2R\,\eta\mu A$)
6. $OA' = \dfrac{AH}{2}$ H: ὀρθόκεντρον
7. ΑΗ, ΑΟ ἰσογώνιοι
8. Πόσοι κύκλοι ἴσοι δύνανται νά περιβάλλουν τόν δοθέντα ἐφαπτόμενοι μεταξύ των καί τοῦ δοθέντος;
9. $(I,O)^2 = R^2 - 2R\rho$
10. Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει μέ τάς πλευράς του δύο ἄλλα τρίγωνα. Ἄν R_i εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων γιά τά 6 τρίγωνα $i=1,2,3,4,5,6$. Δεῖξε ὅτι $R_1 R_3 R_5 = R_2 R_4 R_6$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιῆστε τον τύπον $\alpha\beta\gamma = 4RE$.

ΚΕΝΤΡΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

($I \equiv$ σημεῖον τομῆς εσ. διχοτόμων)



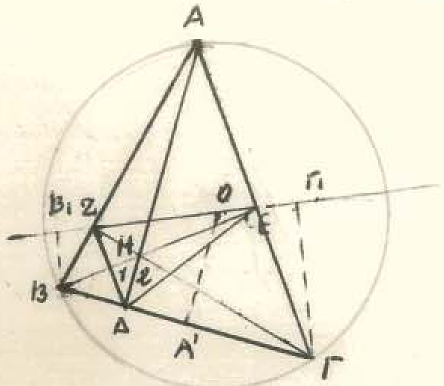
-Δξ ὅτι

1. $\sphericalangle BI\Gamma = 1^{L} + \frac{A}{2}$
2. $\rho = \frac{E}{\tau} = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau}$
3. $\frac{x}{\beta} = \frac{y}{\gamma} = \frac{x+y}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$
4. $\beta\gamma = \delta^2 + xy = (AI)(AI_\alpha) = 2R\upsilon_\alpha = x^{*}y^{*} - \delta^{*2}_\alpha = \rho_\beta\rho_\gamma + \rho\rho_\alpha$
5. $AZ = AE = (\tau-\alpha)$
   $BZ = B\Delta = (\tau-\beta)$
   $\Gamma\Delta = \Gamma E = (\tau-\gamma)$
6. $\rho = (\tau-\alpha)\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = (\tau-\beta)\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = (\tau-\gamma)\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$
7. $\rho_\alpha = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\rho_\beta = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\rho_\gamma = \tau\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$.
8. $\sphericalangle BI_\alpha\Gamma = 1^{L} - \frac{A}{2}$
9. $\Delta\Theta = \Theta\Delta'$ (Θ μέσον τῆς $B\Gamma$)
10. H, A, Δ, Δ' συζυγῆ ἁρμονικά.
11. Εμβ $(\Delta E Z) = ;$
12. $A\Delta$, BE, ΓZ : διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου
13. $AI = 4R\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\beta\gamma\,\tau(\tau-\alpha)}{\tau}}$

13'. $AI_\alpha = 4R\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$.

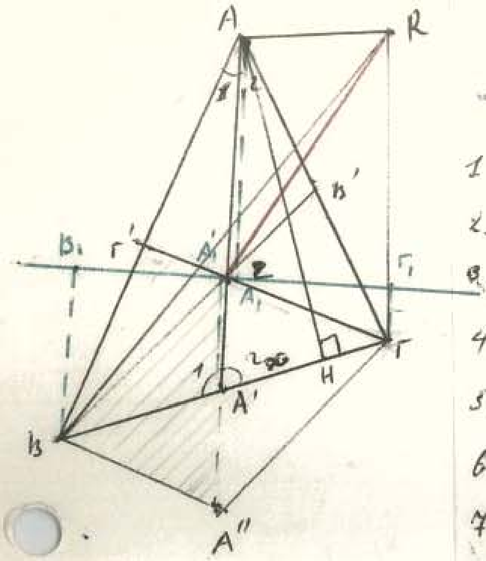
14. $\frac{AI}{I\delta} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha} \rightsquigarrow AI = \delta_\alpha\,\frac{\beta+\gamma}{2\tau}$
15. Δ : ἐκ τῶν I, O, I_α.
16. Ἄν $\sphericalangle BA\Gamma = 60°$ δξ ὅτι $O, H, I, I_\alpha, B, \Gamma$ ὁμοκυκλικά.
17. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνεται κατά σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. ὁ ἐγγρ. εἰς τὸ $A_1 B_1 \Gamma_1$ τέμνεται τῶν σημεῖων εἰς $A_2 B_2 \Gamma_2$ κ.ο.κ. Δξ ὅτι:
    $B_\nu \hat{A}_\nu \Gamma_\nu = 60° + (-2)^{-\nu}\,[B\hat{A}\Gamma - 60°]$
18. Ἄν $A = 1^{L}$: δξ ὅτι $(B\Delta).(\Delta\Gamma) = E$
19. Τὸ κέντρον βάρους τῆς περιμέτρου τριγώνου $(AB\Gamma)$ ὁρίζεται ἐξ τὴν τομήν τῶν διχοτόμων του τριγ. $A'B'\Gamma'$ ὅπου A', B', Γ' μέσα τῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ — (ἀσκ. 16)
20. Δξ ὅτι $\delta_\alpha^2 + \delta_\beta^2 + \delta_\gamma^2 \leqslant \tau^2$.

ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟΝ.



1. $H \equiv$ ὀρθόκεντρον (= σημ. τομῆς ὑψῶν)
2. $\sphericalangle B H \Gamma = 2\llcorner - A$
3. $(AH) = 2(OA')$
4. $\sphericalangle \Delta_1 = \sphericalangle \Delta_2$
5. Τὰ συμμ. τοῦ H ὡς πρὸς $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \odot$
6. $(AZ) = ;$
7. $\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$
8. $OA \perp ZE$, $OB \perp Z\Delta$, $O\Gamma \perp \Delta E$ (Θεώρ. Nagel)
9. $AH = ;$ $H\Delta = ;$ (συναρτήσει πλευρῶν)
10. Ἐμβ. $(\Delta E Z) = ;$
11. Τόπος τοῦ H ἂν $B\Gamma = \alpha$ καὶ $\hat{A} = \upsilon_0$.
12. Ποιὰ τὰ ἀνωτέρω συνθήκη $EZ =$ σταθ.
13. Ἀναγνωρίσατε τὰ ἐγγ. τετράπλευρα
14. Δεῖξε ὅτι $(BE)(BH) + (B\Gamma)(\Delta\Gamma) = (B\Gamma)^2$
15. Ἀναγνωρίσατε τὰ ἰσοσκ. τραπέζια & ὅμ. τρίγωνα
16. Δεῖξε ὅτι $\frac{\Delta H}{\Delta A} + \frac{EH}{EB} + \frac{ZH}{Z\Gamma} = 1$
17. Δεῖξε ὅτι $(B\Gamma)^2 + (AH)^2 = (\Gamma A)^2 + (BH)^2 = (AB)^2 + (\Gamma H)^2$
18. Ἐμβ. $(AB\Gamma) = \frac{(\Delta E) + (EZ) + (Z\Delta)}{2} \cdot R$
19. $(OH) = ;$ (ἐκ τοῦ OG βάσει τοῦ θ. τοῦ Leibnitz)
20. AH, $AO \rightarrow$ ἰσογώνιοι εὐθεῖαι.
21. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$ θ. Sylvester.
22. $(ZB_1) = (E\Gamma_1)$ καὶ $(B_1\Gamma_1) = (\Delta E) + (\Delta Z)$
23. $(AH) + (BH) + (\Gamma H) = 2(R + \rho)$
24. Ἐμβ. $(\Delta E Z) = ;$ γεωμ. καὶ τριγωνομετρικῶς
25. $\sphericalangle E\Delta Z = 180^\circ - 2A$
26. $(AH) = 2R\,\text{συν}A = \alpha\,\text{σφ}A = 2(OA')$
27. $(\Delta H) = 2R\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma$
28. $\Sigma(AH) = 2(R + \rho)$.
29. $(EZ) = \alpha\,\text{συν}A$, $(Z\Delta) = \beta\,\text{συν}B$, $(\Delta E) = \gamma\,\text{συν}\Gamma$.
30. $AH = \frac{\alpha(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$ καὶ ποικίλως
31. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων M τοῦ χώρου γιὰ τὰ ὁποῖα $MA^2 + B\Gamma^2 = MB^2 + \Gamma A^2 = M\Gamma^2 + AB^2$.

→ ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟΝ

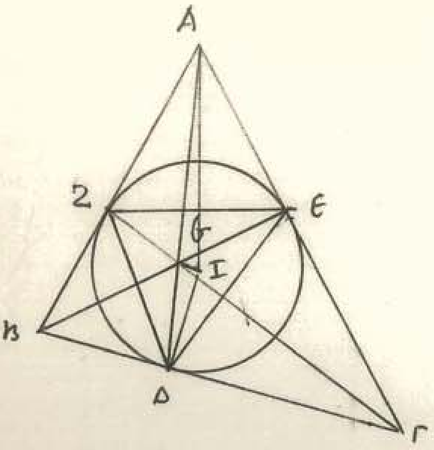


Z ≡ σημείον τομής διαμέσων.

-Δξ ότι :

1. $AZ = \frac{2}{3}\mu_\alpha$, $BZ = \frac{2}{3}\mu_\beta$, $\Gamma Z = \frac{2}{3}\mu_\gamma$
2. $(BZ\Gamma) \simeq (\Gamma Z A) = (AZB)$
3. Αν $\gamma > \beta$ τότε $\sphericalangle A_2 > A_1$ και $A_1' > A_2'$
4. Τρίγωνον BZA''.
5. $\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$
6. $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha x$
7. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3\{AZ^2+BZ^2+\Gamma Z^2\}$
8. $AA_1 = BB_1 + \Gamma\Gamma_1$
9. $(PZ\Gamma) \simeq (PZA)+(PZB)$
10. $\Sigma (PA)^2 = \Sigma (ZA)^2 + 3(PZ)^2$
11. Αν $\beta^2+\gamma^2 = k^2$ τόπος του A ;
12. Αν $\beta^2-\gamma^2 = \lambda^2$ » » A ;
13. Αν $\beta^2+\gamma^2 = 2\alpha^2$ τὸ τρίγωνον πλευρῶν $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ.
14. Αν $BB' \perp \Gamma\Gamma'$ τότε $\beta^2+\gamma^2 = 5\alpha^2$.
15. Αν $B\Gamma = \alpha_0$, $\sphericalangle A = A_0$ τόπος τοῦ Z ;
16. $OZ^2 = R^2 - \frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$
17. $\varepsilon\varphi\, \widehat{BZ\Gamma} = \frac{12E}{\beta^2+\gamma^2-5\alpha^2}$ (→ ἕπεται ἡ 14)
18. Αν $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$ | $\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2 = \mu_\alpha^2$
19. Αν $AZ = B\Gamma$ → $\widehat{BZ\Gamma} = 1L$.
20. $E_{\text{τριγώνου}}(\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma) = \frac{3}{4} E_{\text{τριγώνου}}(\alpha, \beta, \gamma)$.
21. Αν $\mu_\alpha = \frac{3}{2}\alpha$ τότε $\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2 = \mu_\alpha^2$.
22. Δξ ότι $\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2 = \underline{v_\alpha}^2+\underline{v_\beta}^2+\underline{v_\gamma}^2$ ἔνθα $\underline{v_\alpha}$ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α ..κτλ.
23. Δξ ότι $\Sigma \mu_\alpha^4 = \Sigma \underline{v_\alpha}^4$.
24. Δξ ότι $\partial A_{/(ZB\Gamma)} = \partial B_{/Z\Gamma A} = \partial \Gamma_{/ZAB} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$
25. $2\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2 \iff 2\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2+\mu_\gamma^2$.

ΣΗΜΕΙΟΝ Gergonne.



1. G ≡ σημεῖον τομῆς τῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ἔνθα Δ, Ε, Ζ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (I, ρ) μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

— ὅτι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου χρησιμοποιήσατε τὸ θ. Ceva.

2. Ὑπολογίσατε τὰς ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ.
(Χρ. τὸ θεώρημα τοῦ Stewart.)

$$\text{ὅπου} \left.\begin{aligned} ΑΖ &= ΑΕ = τ-α \\ ΒΖ &= ΒΔ = τ-β \\ ΓΔ &= ΓΕ = τ-γ \end{aligned}\right\}$$

3. Ὑπολογίσατε τὰ ἀνώτερα τμήματα AG, BG, ΓG.

Χρησ. τὸ θεώρημα τοῦ Van Aubel.

4. Ὑπολογίσατε τὸ (IG)
Ἐφαρμόσατε τὸ θ. τοῦ St. ἐπὶ τριγώνου ΙΑΔ καὶ [illegible] τέμνουσαν IG.

5. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου (ΔΕΖ) συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

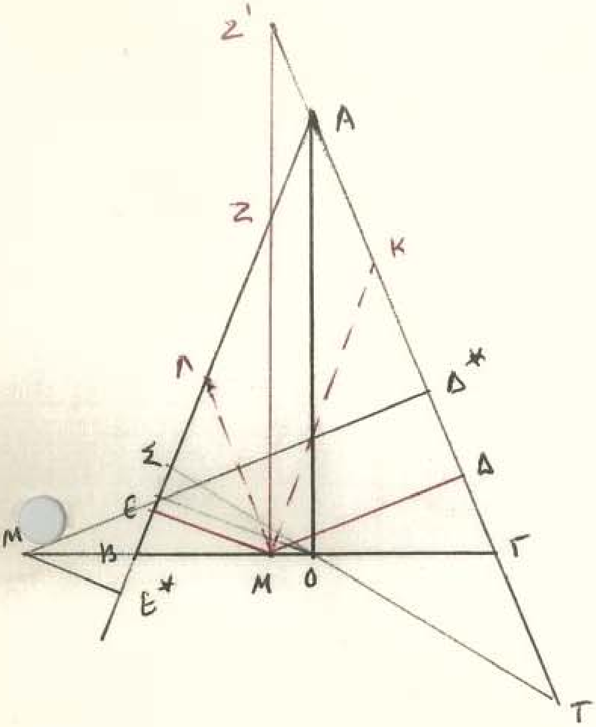
(i) Θεώρημα Van Aubel.

$$\frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{EΓ} = \frac{AG}{GΔ}$$

(ii) Θεώρημα Stewart.

$$β^2(BΔ) + γ^2(ΔΓ) = α \cdot AΔ^2 + α(BΔ)(ΔΓ).$$

ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

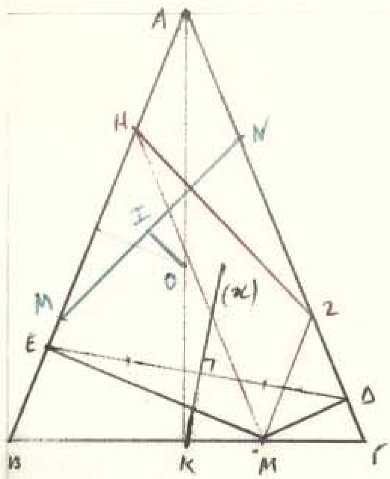


– Δξ ὅτι

1. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
2. $\delta_\beta = \delta_\gamma$ καί ἄν $\delta_\beta = \delta_\gamma \rightarrow \beta = \gamma$
3. $(MΔ) + (MΕ) = ΒΗ$.
3'. $(M^*Δ) - (M^*Ε) = ΒΗ$
4. $(MΗ) + (ΚΑ) + (ΑΛ) + (ΛΜ) =$ σταθ.
5. $(MZ) + (MZ') =$ σταθ.
6. $(ΒΓ)^2 = 2(ΑΓ)(ΓΗ)$
7. $(ΒΗ) =$;
8. $\rho =$;
9. $R =$;
10. περιφ $(ΑΜΒ) =$ περιφ. $(ΑΜΓ)$
11. Ἄν $(MΔ) + (MΕ) = \lambda$ τόπος τοῦ M ;
12. $(ΑΒ)^2 - (ΑΜ)^2 = (ΒΜ)(ΜΓ)$
13. Ἄν $\angle \delta_\beta, \delta_\gamma = 3A$ ποῖαι αἱ Α, Β, Γ
14. $\overline{ΣΟΤ}$; ἵνα εμβ$(ΟΣΒ)$ + εμβ$(ΟΤΓ)$ = εμβ$(ΑΒΓ)$
15. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου τό ὁποῖον δύναται νά χωρισθῇ εἰς δύο ἄλλα ἰσοσκελῆ τρίγωνα. –
16. Ἄν μία γωνία τριγώνου εἶναι τριπλασία ἄλλης καί τρίγωνον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ. –
17. Ἐάν ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς ΒΓ φέρωμεν δύο εὐθείας ΔΕ καί ΔΖ σχηματιζούσας μετά τῶν ΑΓ καί ΑΒ γωνίας ἴσας $\hat{ΔΕΓ} = \hat{ΔΖΒ} = \omega$. Θ. ὅτι $(ΔΕ) + (ΔΖ) =$ σταθερόν.
18. $\dfrac{(ΜΕ)}{(ΜΔ)} = \dfrac{(ΜΒ)}{(ΜΓ)}$
19. Ἄν $\alpha^2 = 4\rho\rho_\alpha$ τότε $\beta = \gamma$
20. Τόπος τοῦ σημείου Μ διά ὅ $MA' = MB' + MΓ'$ ἔνθα MA', MB', $MΓ'$ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπό τάς κορυφάς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. –

συνέχεια ὄπισθεν.

21



Δεξ ότι 1. ΑΕ + ΑΔ = σταθ.

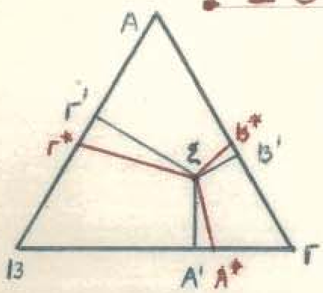
2. ΒΕ + ΓΔ σταθ.

3. Η μεσοκάθετη τ. ΔΕ διέρχ. δια σταθερού σημείου –

4. Η μεσοκάθετη τ. ΖΗ διέρχεται διά σταθερού σημείου.

5. Αν ΑΜ = ΓΝ η μεσοκάθετη τ. ΜΝ διέρχεται δια το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου περί το ΑΒΓ.

ΙΣΟΠΛΕΥΡΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

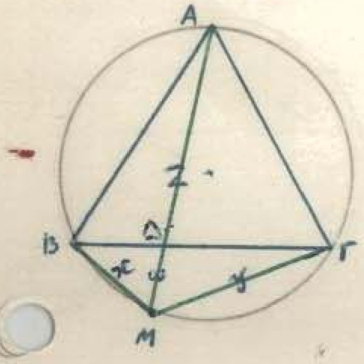


1. Ἂν $O \equiv I \rightarrow AB\Gamma$: ἰσόπλευρον
$O \equiv Z \rightarrow AB\Gamma$ "

2. $(\Sigma A')+(\Sigma B')+(\Sigma \Gamma')=$ σταθ.

3. $(BA')+(\Gamma B')+(A\Gamma')=$ σταθ.

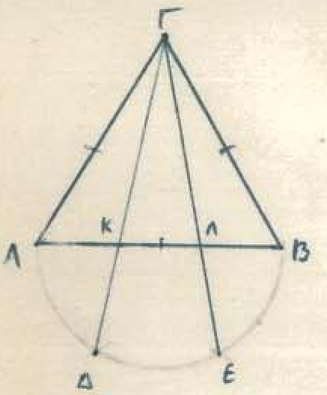
4. $(\Sigma A^*)+(\Sigma B^*)+(\Sigma \Gamma^*)=$ σταθ.



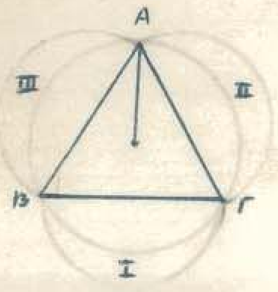
5. (i) $(MA)=(MB)+(M\Gamma)$. (ii) $\frac{1}{\Delta M}=\frac{1}{BM}+\frac{1}{\Gamma M}$ $\left\{ \frac{x}{\omega}=\frac{z}{y}=\frac{x+y}{y} \rightarrow \frac{1}{\omega}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x} \right\}$

6. Ἐγγράψατε εἰς δοθὲν τετράγωνον ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον μίαν κορυφὴν κοινὴν μὲ μίαν κορυφὴν τοῦ τετραγώνου.—

7. Ὑπολογίσατε τὸ E ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει:
α) τῆς πλευρᾶς του $\alpha = 10$ cm
β) τοῦ ὕψους του $h = 8$ cm
γ) τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγ. κύκλου $\rho = 3$ cm
δ) " " " περιγ. " $R = 15$ cm
ε) τῆς " " παρεγγεγρ. κύκλ. $\rho_\alpha = 20$ cm.



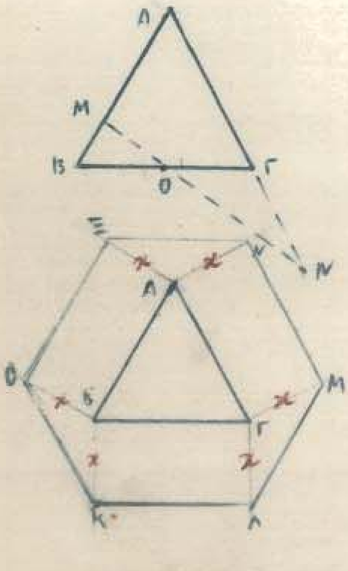
8. $\widehat{A\Delta}=\widehat{\Delta E}=\widehat{EB}$ Δ.ε. ὅτι $(AK)=(K\Lambda)=(\Lambda B)$.



9. Δ.ε. ὅτι $I+II+III=(AB\Gamma)+\frac{1}{8}\pi R^2$

10. Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον μεταξὺ τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν.—

11. Κατασκευάσατε ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς τρόπον ὥστε αἱ κορυφαί του νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τριῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.—



12. Νὰ ἀχθῇ MON εἰς τρόπον ὥστε $(OMB)+(ON\Gamma)=(AB\Gamma)$

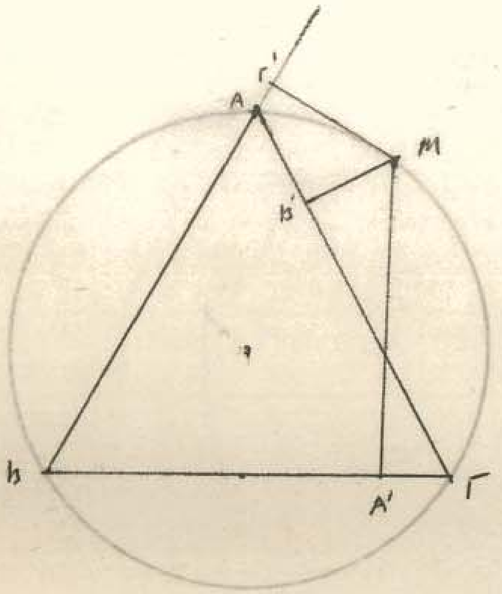
13. Τόπος τοῦ M ἵνα $(MA)^2+(MB)^2+(M\Gamma)^2=\mathcal{A}^2$.

14. Ἂν P σημεῖον τῆς περιφ. περιγ. περὶ ἰσόπλ. τρίγωνον ABΓ δ.ε. ὅτι $PA^2+PB^2+P\Gamma^2=2(AB)^2$ καὶ ἀντιστρόφως.

15. Ὑπολογίσατε τὸ x ἵνα τὸ ΚΛΜΝΞΟ εἶναι 6γωνο κανονικόν

16. Θεωροῦμεν ἰσόπλ. τρίγωνον ABΓ ἐγγ. εἰς κύκλον. Ἔστωσαν Δ τὸ μέσον τοῦ τόξου $\overline{A\Gamma}$, E τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς BΓ. Φέρομεν τὴν ΔE ἥτις τέμνει τὴν περιφ. εἰς Φ. Ὑπολογίσατε ΔE καὶ EΦ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.—

17. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλέξωμεν τὸν πόλον ἀντιστροφῆς ἵνα τὰ ἀντίστροφα τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ ὦσι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου. –

18. 

Δεῖξτε·

(i) $MA' + M\Gamma' - MB' = \upsilon_\alpha$

(ii) $(MA')^2 + (MB')^2 + (M\Gamma')^2 = \upsilon_\tau^2$

(iii) $(MA')(MA) = (MB')(MB) = (M\Gamma')(M\Gamma)$

(iv) $\dfrac{1}{MB'} = \dfrac{1}{MA'} + \dfrac{1}{M\Gamma'}$

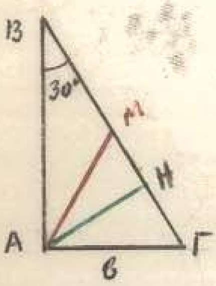
(v) $BA' + \Gamma B' + A\Gamma' = \dfrac{3\alpha}{2}$

(vi) $(BA')^2 + (\Gamma B')^2 + (A\Gamma')^2 = \dfrac{5\alpha^2}{4}$

(vii) $(BA')^3 + (\Gamma B')^3 + (A\Gamma')^3 - 3(BA')(\Gamma B')(A\Gamma') = \dfrac{9\alpha^3}{8}$

19. Αἱ ἀποστάσεις x, y, z σημείου Μ ἐν τῷ ἐσωτερικῷ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Εὕρετε τὸν τόπον τοῦ Μ. –

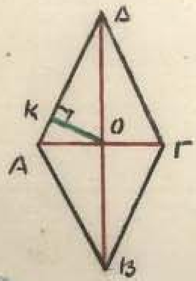
ΗΜΙΙΣΟΠΛΕΥΡΟΝ



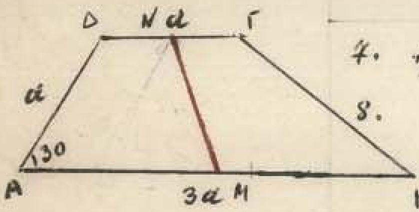
Ἄν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α=1L) εἶναι ∢Β = 30° τότε ἡ ἀπέναντι τῆς 30° πλευρά ἰσοῦται πρὸς τὸ ½ τῆς ὑποτεινούσης.

Ἐφαρμογαί:

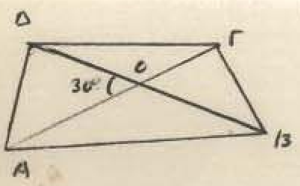
1. Δ.ξ. ὅτι $\widehat{ΓΑΗ} = \widehat{ΗΑΜ} = \widehat{ΜΑΒ}$
2. Ἄν ∢Β = 5Γ. Δ.ξ. ὅτι $(ΑΗ) = \frac{(ΒΓ)}{4}$
3. Ἄν $(ΟΚ) = \frac{(ΑΔ)}{4}$. ∢Α = ;



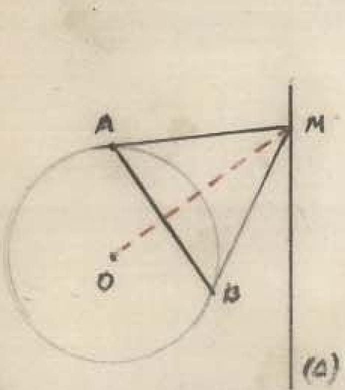
4. Εἰς ΑΒΓ (Α=1L) εἶναι ∢Β = 30°. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ ἐκ τοῦ Β τὴν ΒΕ ⊥ ΑΜ. Εἶτα φέρομεν τὴν ΕΗ. Δ.ξ. ὅτι ΒΕ = ΕΗ = ΑΗ.
5. Εἰς κύκλον Ο φέρομεν διάμετρον ΑΒ καὶ μίαν χορδὴν ΒΓ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΒΑ γωνίαν 30°. Ἐκ τοῦ Μ μέσου τῆς ΒΟ φέρομεν μίαν χορδὴν ΡΝ ⊥ ΑΒ. Δ.ξ. ὅτι ΡΝ = ΒΓ.
6. Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι Α = 60°, ΑΒ = 2α, ΑΓ = 3α (ΒΓ) = ; ὅταν ΑΒ = 78.



7. 1) Ὑπολογίσατε τὴν (ΒΓ); 2) τὴν (ΜΝ); Ἐφαρμογή α = 85 m.
8. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας τριγώνου ΑΒΓ (Α=1L) καὶ πρὸς τὰ ἔξω, κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ὑπολογίσατε τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἑνώνουν τὰς ἐξωτερικὰς κορυφὰς μὲ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι Β = 30° καὶ ὅτι ΒΓ = 2α = 14 cm.—
9. Εἰς ἰσοσκελὲς τραπέζιον αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν μικροτέραν βάσιν ΑΒ = 12 cm. Αἱ γωνίαι Δ καὶ Γ εἶναι ἑκάστη 60°. 1ον εὕρετε τὸ ὕψος ΑΗ, τὸ Ε. καὶ τὴν (ΒΔ). 2ον. Δ.ξ. ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΒΓ.—
10. ∢Β = ; ἄν α = 5, β = 7, γ = 3 m.
11. Ἄν Α = 120° Δ.ξ. ὅτι $α^2 = β^2 + βγ + γ^2$.
12. Εμβ. (ΑΒΓ) = ; 1) Ἄν Α = 30° (ΑΓ) = β, (ΑΒ) = γ
    2) Α = 60° ,
    3) Α = 150 ; ,
    4) Α = 120° ; ,



13. Ἄν $\widehat{ΑΓ, ΒΔ} = 30°$ → εμ(ΑΒΓΔ) = $\frac{1}{2}$(ΑΓ)(ΒΔ)
    Νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις διὰ γωνίαν 60°, 45°.
14. Δύο ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ περιφερείας σχηματίζουν γωνίαν 60°. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β. Εὕρετε τὸ ἐμβ. τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῆς καθέτου ΑΓ, τῆς ἐφαπτομένης ΒΓ καὶ τοῦ τόξου ΑΒ.—
15. Ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἰσοπλεύρου τριγώνου λαμβάνομεν τὰ μήκη ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ' = x. Προσδιορίσατε τὸ x ἵνα $\frac{(Α'Β'Γ')}{(ΑΒΓ)} = μ$.



16. Δίδεται περιφ. καὶ εὐθεῖα (Δ). Εὕρετε ἐπὶ ταύτης σημεῖον Μ ἵνα αἱ ἐξ αὐτοῦ εφ. ἐφαπτόμεναι σχηματίζουν ἰσόπλευρον τρίγωνον μετὰ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ τινὲς ἐπιλυόμεναι μὲ προέκτασιν τῆς ΔΙΑΜΕΣΟΥ

1. Ἂν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ καὶ $\mu_\alpha = \mu'_\alpha$ τότε $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$.

2. Ἂν $A\Gamma > AB$ τότε $\widehat{AM\Gamma} > \widehat{AMB}$ $\wedge$ $\widehat{BAM} > \widehat{MA\Gamma}$.

3. Δεῖξε ὅτι $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$.

4. Ἂν $A = 1^L$ Δεῖξε ὅτι $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$.

5. Ἂν $A > 90^\circ$ $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$
   $A < 90^\circ$ $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$
   $A = 90^\circ$ $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$.

6. Δεῖξε ὅτι $\mu_\alpha < \mu_\beta + \mu_\gamma$.

7. $\triangle$: β, γ καὶ μ_α.

8. $\triangle$: ἐκ τῶν $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$.

9. $\triangle$: υ_α, μ_α καὶ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}$.

10. Δεῖξε ὅτι $(BZA'') = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$

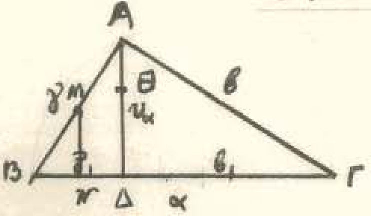
11. Εἰς σκαληνὸν τρίγωνον δεῖξε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας κεῖται μεταξὺ τῆς διαμέσου καὶ τοῦ ὕψους, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.

12. Ἐὰν εἰς τρίγωνον μία διάμεσος εἶναι καὶ διχοτόμος τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.—

13. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Β. Ἐπὶ ταύτης προσδιορίσατε δύο σημεῖα Χ καὶ Ψ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Β καὶ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΧΨ νὰ φαίνεται ἐκ τοῦ Α ὑπὸ γωνίαν ω.

14. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ, κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΦ καὶ ΑΓΗΕ. Ἑνώνομεν τὰ Ε, Φ. Δεῖξε ὅτι ΕΦ = 2(ΑΜ) ὅπου ΑΜ διάμεσος.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

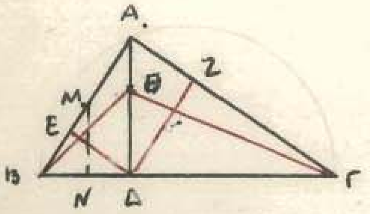


$β^2 = αβ_1$ (1)

$γ^2 = αγ_1$ (2)

$\frac{β^2}{γ^2} = \frac{β_1}{γ_1}$ (3)

$β^2+γ^2 = α^2$ (4)



$αυ_α = βγ = 2E$ (5)

$\frac{1}{υ_α^2} = \frac{1}{β^2} + \frac{1}{γ^2}$ (6)

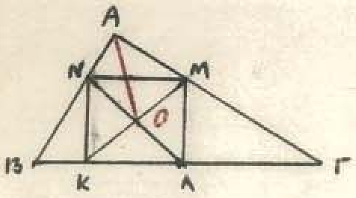
$υ^2 = β_1γ_1$ (7)

$μ_α = \frac{α}{2} = R$ (8)

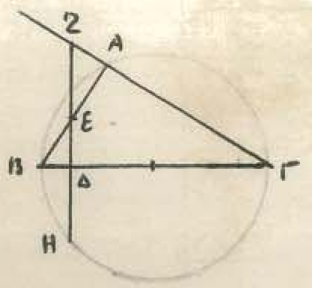
$β+γ = α+2ρ$ (9)

$\frac{\sqrt{2}}{δ_α} = \frac{1}{β} + \frac{1}{γ}$ (10)

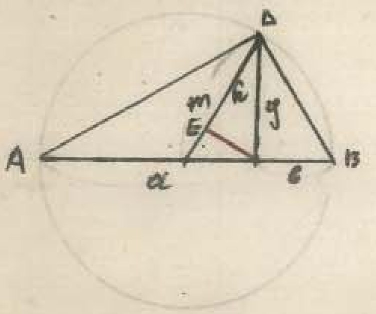
1. Νά ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις (1), (2), (5) & (7) διά τῶν ὁμ. τριγώνων.
2. -Δε ὅτι $υ_α^2 = β(ΔΕ)$ σχ. 2
3. " $\frac{β^3}{γ^3} = \frac{(ΓΖ)}{(ΒΕ)}$ "
4. " $(ΝΓ)^2 - (ΝΒ)^2 = (ΑΓ)^2$ — Ν → προβ. ἐπί ΒΓ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ.
5. " $(ΒΘ)^2-(ΓΘ)^2 = (ΑΒ)^2-(ΑΓ)^2$ — Θ → τυχόν ἐπί τοῦ ΑΔ.
6. " $ρ_1+ρ+ρ_2 = υ_α$ | $ρ_1, ρ, ρ_2$ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τά ΑΒΔ, ΑΒΓ, ΑΔΓ.
7. " $ρ_1^2+ρ_2^2 = ρ^2$
8. " $R_1^2+R_2^2 = R^2$ — R_1, R, R_2 ἀκτ. περιγ. κύκλων.



9. -Δε ὅτι $(ΒΚ)(ΛΓ) = E_{(ΑΒΓ)}$ (σχ. 2)
10. " $(ΜΝ)^2 = (ΒΚ)(ΛΓ)$ σχ(3)
11. " $(ΒΜ)^2+(ΓΝ)^2 = (ΒΓ)^2+(ΜΝ)^2$
12. " $\sphericalangle ΒΑΟ = \sphericalangle ΟΑΓ$
13. " $αα' = ββ'+γγ'$ | (ΑΒΓ ὁμ. Α'Β'Γ') ἐάν
14. " $\frac{1}{υ_αυ_α'} = \frac{1}{ββ'} + \frac{1}{γγ'}$



15. " $(ΔΗ)^2 = (ΔΕ)(ΔΖ)$ (σχ. 3)
16. " $(α+β_1)^2 = 4β^2+γ_1^2$
17. Εἰς ὀρθ. τρίγωνον $ΒΑΓ = 1^L$ Δε ὅτι
   1) ἡ διάμετρος ΑΑ' τοῦ περ. κύκλ. εἶναι ∥ ΒΓ
   2) $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2 = 4R^2$
   3) $(ΗΑ)^2 = (ΗΒ)(ΗΓ)$
   4) $\frac{1}{ΑΗ^2} = \frac{1}{ΑΒ^2} + \frac{1}{ΑΓ^2}$



18₁. -Δε ὅτι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΓ)^2} = \frac{(ΑΗΒ)}{(ΑΒ)^2} = \frac{(ΑΗΓ)}{(ΑΓ)^2}$

18₂. " $E(ΑΗ)^2 = E'(ΑΓ)^2 = E''(ΑΒ)^2$

ἀπόδειξε $\frac{1}{ΑΗ^2} = \frac{1}{ΑΒ^2} + \frac{1}{ΑΓ^2}$.

19. -Δε ὅτι 1) $h \leqslant g \leqslant m$ ὅπου $h = \frac{2αβ}{α+β}$, $g = \sqrt{αβ}$, $m = \frac{α+β}{2}$

   2) $g^2 = mh$

20 —ΔΞ ότι $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

21. " $(\beta+\gamma)^2+\upsilon_\alpha^2=(\alpha+\upsilon_\alpha)^2$

22. Ἄν $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$ τότε εἴτε $B+\Gamma=1^L$ εἴτε $B-\Gamma=1^L$

23. Εὕρετε τάς α, β, γ ἄν αἱ πλευραί εἶναι ἀνάλογοι Γ.Π. Δεῖξον ἀκόμη ὅτι τό υ_α ἀνήκει εἰς τήν πρόοδον.
—ὑπόδειξις ἄν κ ὁ λόγος αἱ πλευραί: $\frac{\alpha}{\kappa^2}, \frac{\alpha}{\kappa}, \alpha$.

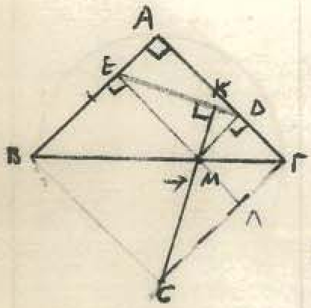
24. $\beta=;\ \gamma=;$ ἄν $\beta+\beta_1=\mu$ $\gamma+\gamma_1=\nu$. Διερεύνησις–

25. $\beta=;\ \gamma=;$ ἄν $\alpha+\beta+\gamma=\lambda$ καί $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\mu^3$.–

26. Δεῖξον αἱ πλευραί ὀρθογωνίου τριγώνου μετρούμεναι, διά ἀκεραίων ἀριθμῶν παρέχονται διά τῶν τύπων.

$$\gamma=\frac{\lambda}{\Delta}(\upsilon^2-u^2),\quad \beta=\frac{-2\lambda u\upsilon}{\Delta},\quad \alpha=\frac{\lambda}{\Delta}(u^2+\upsilon^2)$$

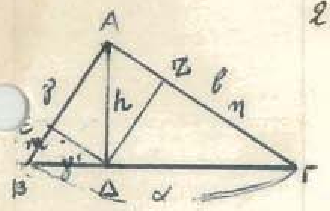
ἔνθα λ τυχών ἀκέραιος καί Δ → Μ.Κ.Δ. τῶν υ^2-u^2, $2u\upsilon$ καί $u^2+\upsilon^2$.–



—ΔΞ ότι ἡ ΜΚ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου C ὅπερ νά καθορισθῇ.
(ΑΔ = CΛ, ΔΓ = ΛΓ ⇒ ΑΔ+ΔΓ = CΛ+ΛΓ ἤ ΑΓ = ΓC C σταθερόν)

—ΔΞ ότι δύο ἰσοπερίμετρα καί ἰσοδύναμα ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα.–

29. Ἐκ τῶν $\frac{\beta\gamma}{2}=\rho\tau$ (1) καί $\beta+\gamma=\alpha+2\rho$ δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ ρ δείξατε ὅτι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$.



ΔΞ ότι
(i) $\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{n^2}=\sqrt[3]{\alpha^2}$
(ii) $3h^2+m^2+n^2=\alpha^2$
(iii) $\alpha m n=h^3$

Ἀπόδειξις. τά ὅμοια τρίγωνα ΒΔΕ, ΒΓΑ δίδουν $\frac{m}{\gamma}=\frac{\gamma'}{\alpha}$ ἤ ἄλλως $\gamma^2=\alpha\gamma'$ → $m=\frac{\gamma^3}{\alpha^2}$ → $\gamma^2=\sqrt[3]{\alpha^4 m^2}$
ὁμοίως $\beta^2=\sqrt[3]{\alpha^4 n^2}$, τότε ἡ $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ δίδει
$\sqrt[3]{\alpha^4 m^2}+\sqrt[3]{\alpha^4 n^2}=\alpha^2=\sqrt[3]{\alpha^6}$ ἀκολούθως $\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{n^2}=\sqrt[3]{\alpha^2}$

(ii) $m^2=\frac{\gamma^6}{\alpha^4}$, $n^2=\frac{\beta^6}{\alpha^4}$ → $m^2+n^2=\frac{\beta^6+\gamma^6}{\alpha^4}=\frac{(\beta^2+\gamma^2)^3-3\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)}{\alpha^4}$
Ἀλλά $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ καί $\beta\gamma=\alpha h$. τότε $m^2+n^2=\frac{\alpha^6-3\alpha^4h^2}{\alpha^4}=\alpha^2-3h^2$
καί $m^2+n^2+3h^2=\alpha^2$.

(iii) $m=\frac{\gamma^3}{\alpha^2}$, $n=\frac{\beta^3}{\alpha^2}$ → $mn=\frac{\beta^3\gamma^3}{\alpha^4}$ → $mn=\frac{h^3}{\alpha}$
τότε $\alpha m n=h^3$.

30. Αν αί πλευραί τριγώνου  συνδέονται διά των σχέσεων $\frac{x+y}{17}=\frac{y+\omega}{18}=\frac{\omega+x}{25}$ δείξη τούτο είναι ορθογώνιον.

Υπόδειξις. Θέσατε έκαστον των λόγων ίσον με λ. και εύρατε τα x, y, ω. κτλ.

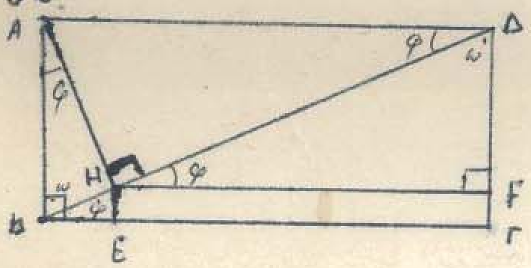
31. Εις πάν ορθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A=1^L$) δείξη:

(i) $\alpha+\beta+\gamma=\rho+\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma$

(ii) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\rho^2+\rho_\alpha^2+\rho_\beta^2+\rho_\gamma^2$

(iii) $(K\Lambda)=\rho\sqrt{2}$ ένθα Κ και Λ τα κέντρα εγγεγραμμένων κύκλων εις τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΑΗΓ υπό ΑΗ ύψος του τριγώνου.—

32.



Δείξατε ότι:

$$HE^{\frac{2}{3}}+HF^{\frac{2}{3}}=A\Gamma^{\frac{2}{3}}$$

Απόδειξις. Έχομεν εκ του ΒΑΔ

$$\frac{HB}{H\Delta}=\frac{AB^2}{A\Delta^2} \quad \text{Άρα} \quad \frac{FC}{FD}=\frac{HB}{HD}=\frac{AB^2}{AD^2}$$

οπόθεν: $\frac{FC}{AB^2}=\frac{FD}{AD^2}=\frac{FC+FD}{AB^2+AD^2}=\frac{CD}{A\Gamma^2}=\frac{AB}{A\Gamma^2}$.

Συνεπώς $HE=FC=\frac{AB^3}{AC^3}$ Ωσαύτως έχομεν $\frac{EB}{EC}=\frac{HB}{HD}=\frac{AB^2}{AD^2}\Rightarrow$

$\frac{EB}{AB^2}=\frac{EC}{AD^2}=\frac{EB+E\Gamma}{AB^2+AD^2}=\frac{BC}{AC^2}=\frac{AD}{AC^2}$ Συνεπώς $HF=EC=\frac{AD^3}{AC^3}$

Έχομεν κατά ταύτα $HE^{\frac{2}{3}}+HF^{\frac{2}{3}}=\frac{AB^2}{AC^{4/3}}+\frac{AD^2}{AC^{4/3}}=\frac{AB^2+AD^2}{AC^{4/3}}=\frac{AC^2}{AC^{4/3}}=$

$AC^{2-\frac{4}{3}}=AC^{\frac{2}{3}}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΛΥΣΙΣ.

$HE=HB\,\eta\mu\varphi=AB\,\eta\mu^2\varphi=A\Gamma\,\eta\mu^3\varphi$ (1)

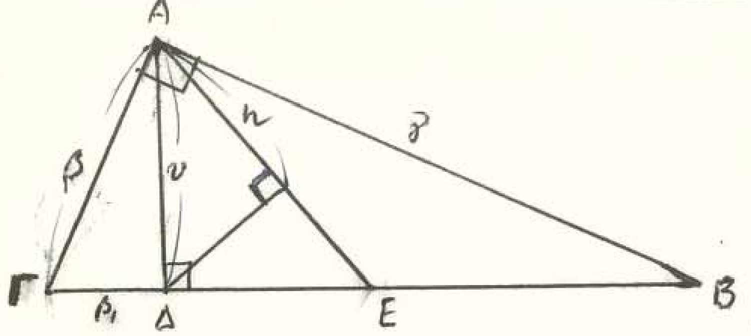
$HF=HD\,\sigma\upsilon\nu\varphi=AD\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi=A\Gamma\,\sigma\upsilon\nu^3\varphi$ (2) $\Rightarrow HE^{\frac{2}{3}}+HF^{\frac{2}{3}}=A\Gamma^{\frac{2}{3}}(\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi)=A\Gamma^{\frac{2}{3}}$

34. Δείξη $\upsilon_1^3=\alpha xy$ όπου x, y αι αποστάσεις του ποδός του ύψους υ_1 από τας πλευράς β και γ.—

Απόδειξις. $\upsilon_1^2=\beta y$, $\upsilon_1^2=\gamma x \Rightarrow \upsilon_1^4=\beta\gamma xy \Rightarrow \upsilon_1^3=\frac{\beta\gamma}{\upsilon_1}xy=\alpha xy$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΟΟΔΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ.

1



$\beta_1, \mu, \gamma_1 \rightarrow$ ἀριθμητική πρόοδος. $\left(\mu = \frac{a}{2} = \frac{\beta_1+\gamma_1}{2}\right)$

$\beta_1, \upsilon, \gamma_1 \rightarrow$ γεωμετρική » $\left(\upsilon^2 = \beta_1\gamma_1,\ \upsilon = \sqrt{\beta_1\gamma_1}\right)$

$\beta_1, h, \gamma_1 \rightarrow$ ἁρμονική » $\left(\frac{2}{h} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1}\right)$

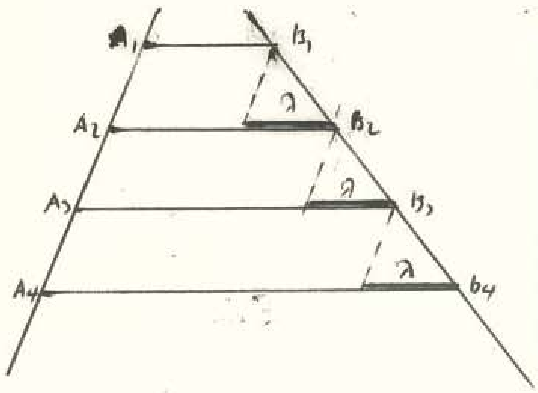
$h \leq \upsilon \leq \mu$

h = μέση αρμονική
υ = μέση γεωμετρική
μ = μέση ἀριθμητική.

Ἀπόδειξις τοῦ ὅτι $\frac{2}{h} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1}$

Ἐκ τοῦ $\overset{\triangle}{AE\Delta}$: $\upsilon^2 = h\mu$. ὅθεν $\frac{2}{h} = \frac{2\mu}{\upsilon^2} = \frac{\beta_1+\gamma_1}{\beta_1\gamma_1} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\beta_1}$.

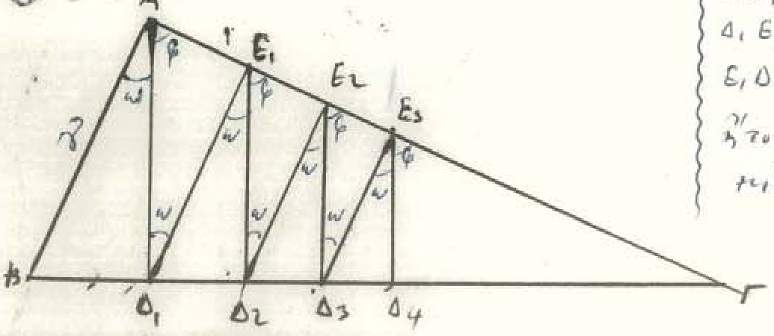
2 ...



Αἱ A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 παράλληλοι μεταξύ των
$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$ (τὸ σχῆμα τοῦ θεωρήματος τοῦ ΘΑΛΟΥ.)

τὰ μήκη τῶν A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 κλπ εἶναι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου με λόγον λ.

3 ...



$A\Delta_1 = \gamma\,\sigma\upsilon\nu\omega$
$\Delta_1E_1 = (\Delta_1A)\,\sigma\upsilon\nu\omega = \gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\omega$
$E_1\Delta_2 = (E_1\Delta)\,\sigma\upsilon\nu\omega = \gamma\,\sigma\upsilon\nu^3\omega \ldots$
ἤτοι $AB, A\Delta_1, \Delta_1E_1, E_1\Delta_2 \ldots$ εἶναι μία γεωμ. πρόοδος.

— Δεῖξατε ὅτι αἱ ἀκολουθίαι
1) $(B\Delta_1), (\Delta_1\Delta_2), (\Delta_2\Delta_3), (\Delta_3\Delta_4) \ldots$
2) $(AE_1), (E_1E_2), (E_2E_3), (E_3E_4)$
εἶναι γεωμ. πρόοδοι.

4 — Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ πλευραὶ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον. Δεῖξτε ὅτι τὸ $υ_1$ ἀνήκει εἰς τὴν πρόοδον —

<u>Ἀπόδειξις.</u> Ἂν κ ὁ λόγος καὶ α ἡ ὑποτείνουσα ἔχομεν $\frac{α}{κ^2}$, $\frac{α}{κ}$, α αἱ πλευραί. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $βγ = αυ_1$ λαμβάνομεν $\frac{α}{κ^2} \cdot \frac{α}{κ} = α \cdot υ_1$ ἢ $υ_1 = \frac{α}{κ^3}$ ἔτσι λοιπὸν τὸ ὕψος εἶναι ὅρος τῆς προόδου. Ἰδοὺ ἡ πρόοδος: $\frac{α}{κ^3}, \frac{α}{κ^2}, \frac{α}{κ}, α$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΙ

Δίδονται δύο περιφέρειαι O_1, O_2 ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α.

1 Ἀν διὰ τοῦ Α ἀχθοῦν δύο διατέμνουσαι $\overline{ΒΑΓ}$, $\overline{ΔΑΕ}$ δείξατε ὅτι ΒΔ // ΓΕ.

2 Ἐάν διὰ τοῦ Α ἀχθῇ διατέμνουσα $\overline{ΗΑΖ}$ τότε αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν εἰς τὰ Η καὶ Ζ εἶναι παράλληλοι.

3 Ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΒΓ, ὅπου ΒΓ ἐξωτερική ἐφαπτομένη τῶν O_1, O_2 ἐφάπτεται τῆς O_1O_2 εἰς τὸ Α.

4 Ἡ περιφέρεια διαμέτρου O_1O_2 ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς σημεῖον Ε.

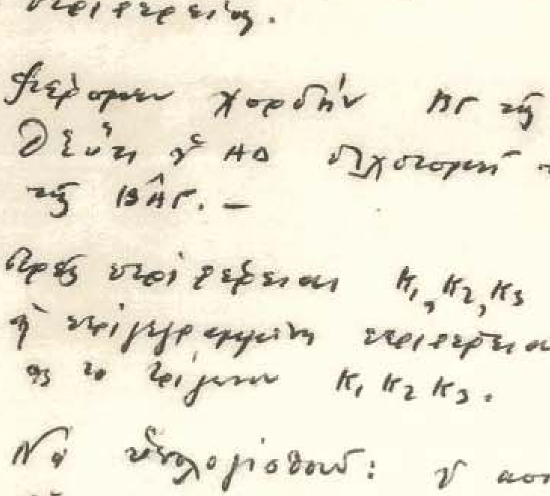
5 Ἡ κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη τῶν διχοτομεῖ τὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας $\overline{ΒΓ}$ καὶ $\overline{Β'Γ'}$.

6 Ἐάν O_1, O_2 σταθερὰ καὶ R_1, R_2 μεταβάλλωνται ὥστε $R_1+R_2=(O_1O_2)$ τότε αἱ κοιναί ἐξωτερικαί ἐφαπτόμεναι ἐφάπτονται σταθερᾶς περιφερείας.

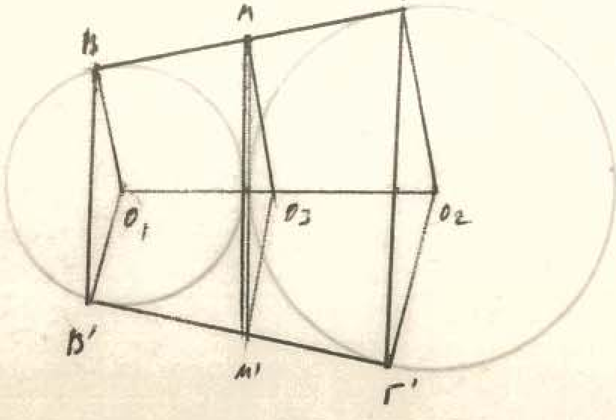
7 Φέρομεν χορδήν ΒΓ τῆς O_1 ἥτις ἐφάπτεται τῆς Δ τῆς O_2. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν τῆς ΒΑΓ.—

8 Τρεῖς περιφέρειαι K_1, K_2, K_3 ἐφάπτονται μεταξύ των εἰς τὰ Δ, Ε, Ζ· ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια περὶ τὸ ΔΕΖ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον $K_1K_2K_3$.

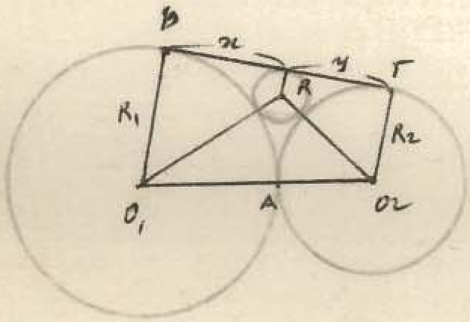
9 Νὰ ὑπολογισθοῦν: ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη ΒΓ. Αἱ χορδαί (ΑΒ), (ΑΓ), τὸ τμῆμα τῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης μεταξὺ Α καὶ Ε, καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΒΓ.



$$(ΒΓ)^2 = (R_1+R_2)^2 - (R_1-R_2)^2 = 4R_1R_2$$
$$(ΒΓ) = 2\sqrt{R_1R_2}$$
$$\frac{ΒΜ}{R_1} = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2} \rightarrow ΒΜ = \frac{2R_1\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2}$$
$$ΑΒ^2 = (ΒΜ)(ΒΓ) = \frac{2R_1\sqrt{R_1R_2}\cdot 2\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2}$$
$$ΑΒ = \frac{2R_1\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1+R_2}}, \quad ΑΓ = \frac{2R_2\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1+R_2}}$$
$$ΑΜ^2 = ΒΜ\cdot ΜΓ = \frac{4R_1^2R_2^2}{(R_1+R_2)^2}$$
$$(ΑΜ) = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$$

10 

— Δξ ὅτι τὸ Β'Γ'ΓΒ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

11 

— Δξ ὅτι $\frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$

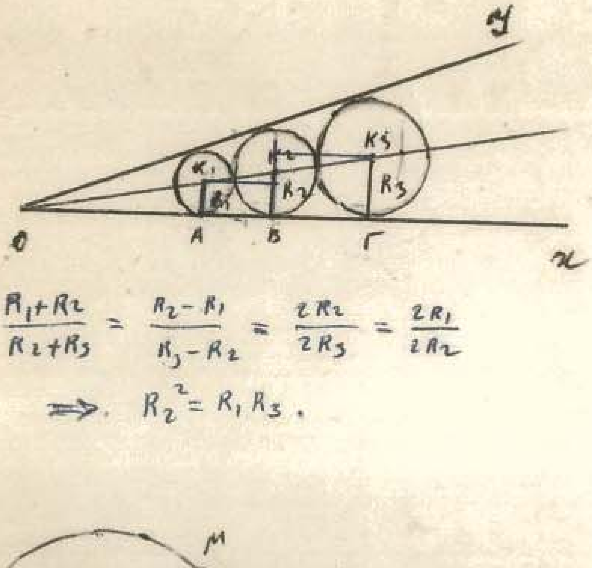
Λύσις. $x = 2\sqrt{R_1 R}$

$y = 2\sqrt{R_2 R}$

$x + y = (ΒΓ) = 2\sqrt{R_1 R_2}$

Συνεπῶς: $2\sqrt{R_1R_2} = 2\sqrt{R_1R} + 2\sqrt{R_2R}$

ἤτοι $\frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$.

12 

$\frac{R_1+R_2}{R_2+R_3} = \frac{R_2-R_1}{R_3-R_2} = \frac{2R_2}{2R_3} = \frac{2R_1}{2R_2}$

$\Rightarrow R_2^2 = R_1R_3$.

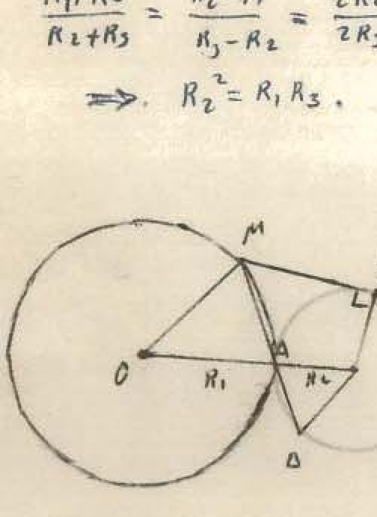
— Δξ ὅτι: $R_2^2 = R_1R_3$

$\frac{OA}{R_1} = \frac{OB}{R_2} = \frac{OΓ}{R_3} = \frac{OB-OA}{R_2-R_1} = \frac{OΓ-OB}{R_3-R_2}$

ἢ $\frac{x}{R_2-R_1} = \frac{y}{R_3-R_2}$ ἢ $\frac{x^2}{(R_2-R_1)^2} = \frac{y^2}{(R_3-R_2)^2}$

ἢ $\frac{4R_1R_2}{(R_2-R_1)^2} = \frac{4R_3R_2}{(R_3-R_2)^2}$ ἢ $(R_1R_3 - R_2^2)(R_3-R_1) = 0$

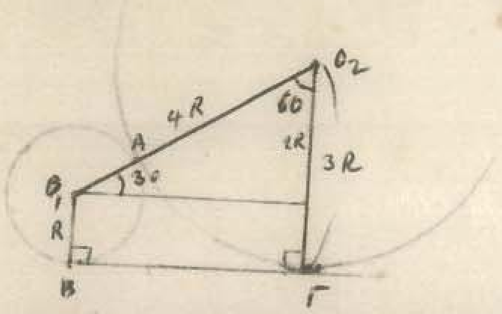
ἢ ἐὰν $R_3 \neq R_1$ μένει $R_2^2 = R_1R_3$.

13 

— Δξ ὅτι $\frac{(MB)}{(MA)} = \sqrt{1+\frac{R_2}{R_1}}$

$\frac{MB}{MA} = \sqrt{\frac{MB^2}{MA^2}} = \sqrt{\frac{MA \cdot MΔ}{MA^2}} = \sqrt{\frac{MΔ}{MA}} = \sqrt{\frac{MA+AΔ}{MA}}$

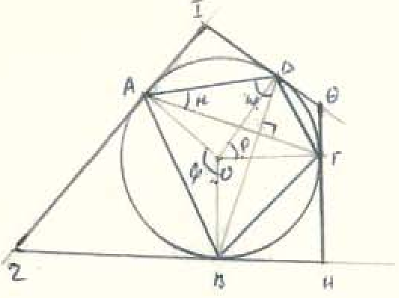
$= \sqrt{1+\frac{AΔ}{MA}} = \sqrt{1+\frac{R_2}{R_1}}$

14 

Εὕρατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ.

4ΠΛΕΥΡΟΝ ΕΓΓΕΓΡ. ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΜΕ ΚΑΘΕΤΟΥΣ ΔΙΑΓΩΝΙΟΥΣ.

1.



Δεῖξαι ὅτι τὸ ΖΗΘΙ εἶναι ἐγγράψιμον.

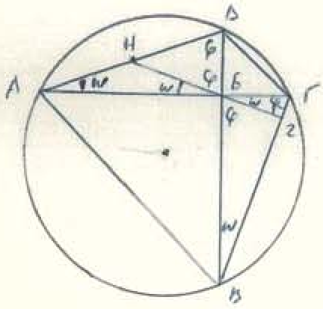
Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\Delta\Theta\Gamma + AZB = 2L$

ἢ $\varphi+\rho = 2L$ ἢ $2\omega+2\mu = 2L$ ἢ

$\omega+\mu = 1L$ ὅπερ ἀληθές.

— Ἐπομένως ΖΗΘΙ → ἐγγράψιμον.

2.



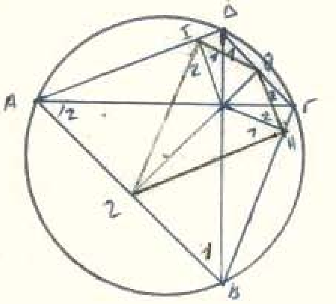
Δεῖξαι ὅτι ἡ $EZ \perp B\Gamma$ προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΑΔ.

Ἀπόδειξις.

ΗΑΕ, ΗΕΔ ἰσοσκελῆ. Ἄρα

Η μέσον τῆς ΑΔ.

3.



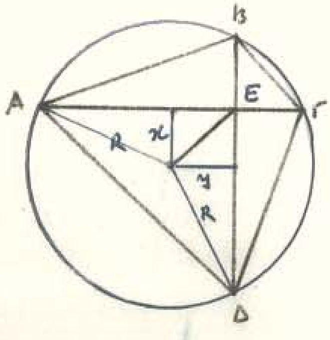
Δεῖξαι ὅτι τὸ ΖΗΘΙ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \Delta_1 \\ I_2 = A_2 \\ H_1 = B_1 \\ H_2 = \Gamma_2 \end{array}\right\} \quad I + H = 2L \text{ ἄρα ἐγγράψιμον}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I_2 \\ Z_1 = Z_2 \\ H_1 = H_2 \\ \Theta_1 = \Theta_2 \end{array}\right\}$$

Αἱ διχοτόμοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἄρα εἶναι περιγράψιμον.—

4.



Δεῖξαι ὅτι $\Delta B^2 + A\Gamma^2 = 8R^2 - 4(OE)^2$

ἔχω $\dfrac{A\Gamma^2}{4} = R^2 - x^2 \rightarrow A\Gamma^2 = 4R^2 - 4x^2$

$\dfrac{\Delta B^2}{4} = R^2 - y^2 \rightarrow \Delta B^2 = 4R^2 - 4y^2$

$\Longrightarrow \Delta B^2 + A\Gamma^2 = 8R^2 - 4(OE)^2$

5.

Δεῖξαι ὅτι $EA^2 + EB^2 + E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 4R^2$

Ἔχω $\Sigma^2 = (EA^2 + E\Gamma^2) + (EB^2 + E\Delta^2) =$

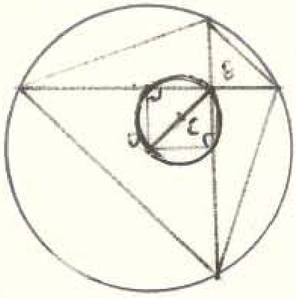
$A\Gamma^2 - 2EA.E\Gamma + B\Delta^2 - 2EB.E\Delta$

$= A\Gamma^2 + B\Delta^2 - 4EA.E\Gamma = 8R^2 - 4OE^2$

$= 4[R^2 - OE^2] = 4R^2.$

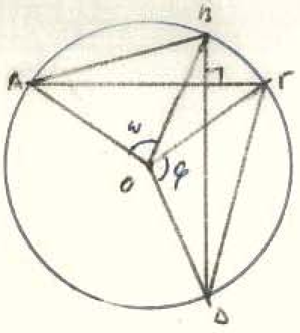
6. Ότι $AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2 = 8R^2$

Άρα $\Sigma^2 = 2[EA^2+EB^2+E\Gamma^2+E\Delta^2] = 2\cdot 4R^2 = 8R^2$.

4. 

Ποίος ο τόπος των μέσων των διαγωνίων όταν Ο, Ε σταθερά και αι διαγώνιοι τέμνονται επί το Ε διατηρούσαι την καθετότητα —

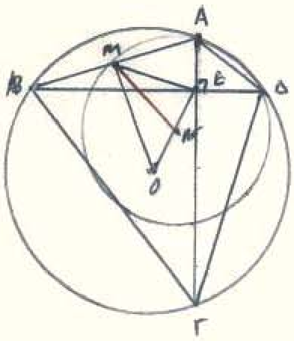
Τόπος η περιφέρεια διαμέτρου ΟΕ.

8. 

Δείξατε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ισοδύναμα.

Απόδειξις. Έχομεν $\omega+\varphi = 2\llcorner$

$$\frac{(OAB)}{(O\Gamma\Delta)} = \frac{R.R}{R.R} = 1 \Rightarrow (OAB) \simeq (O\Gamma\Delta)$$

9. 

Αι $A\Gamma \perp B\Delta$ χορδαί τέμνονται διατηρούσαι την καθετότητα περί το Ε. Εύρετε τον τόπον των μέσων Μ της ΑΒ —

Λύσις. Έστω Ν το μέσον της ΟΕ. τότε

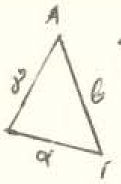
$MO^2+ME^2 = 2MN^2+\frac{OE^2}{2}$ και $MN^2 = \frac{OM^2+ME^2}{2} - \frac{OE^2}{4}$

αλλά ΜΕ = ΑΜ συνεπώς

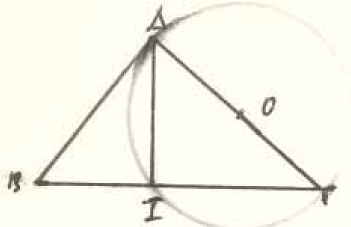
$MN^2 = \frac{OM^2+MA^2}{2} - \frac{OE^2}{4} \Rightarrow \frac{R^2}{2} - \frac{OE^2}{4} = \frac{2R^2-OE^2}{4}$

και $MN = \frac{\sqrt{2R^2-OE^2}}{2}$. Κατά ταύτα τόπος του Μ η περιφέρεια $\left(N, \frac{\sqrt{2R^2-OE^2}}{2}\right)$

Η ορθή γωνία στρεφομένη ταχέως [illegible] όξεως και τόπος όλων το μέσον είναι ίδια περιφέρεια. —

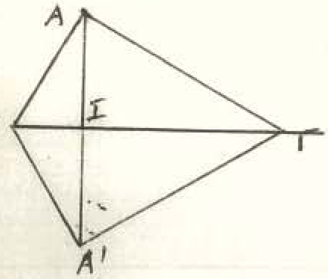


ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΟΜΕΝΑΙ με δύναμιν σημείου



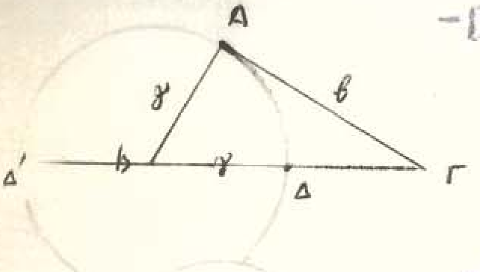
-Δξ ότι $(AB)^2 = (BΓ)(BI)$ ή $γ^2 = αγ_1$

πράγματι η περιφέρεια διαμέτρου ΑΓ διέρχεται διά του Ι, ότι λαμβάνοντες τη δύναμιν του Β ως προς την Ο έχομεν $AB^2 = (BΓ)(BI)$.



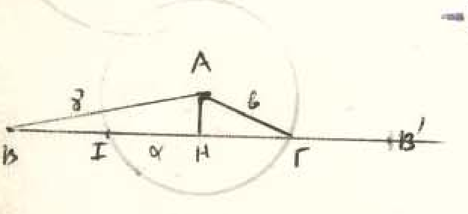
-Δξ ότι $AI^2 = (BI)(IΓ)$

Έστω Α' το συμμ. του Α ως προς ΒΓ. Το ΑΒΑ'Γ εγγράψιμον. Συνεπώς $(IA).(IA') = (BI)(IΓ)$ ή $AI^2 = (BI)(IΓ)$



-Δξ ότι $α^2 = β^2 + γ^2$

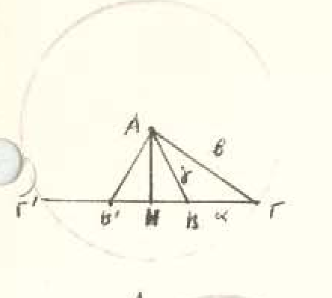
πράγματι $ΓA^2 = ΓΔ . ΓΔ'$ ή $β^2 = (α-γ)(α+γ)$ ή $β^2 = α^2 - γ^2$ ή $β^2 + γ^2 = α^2$.



-Δξ ότι $β^2 = α^2 + γ^2 - 2α(BH)$

Έχομεν $γ^2 - β^2 = α(BI)$ (1) αν $HB' = HB \to BI = ΓB' = BB' - BΓ = 2(BH) - α$ συνεπώς η (1) γράφεται:

$γ^2 - β^2 = α(2BH - α)$ ή $β^2 = α^2 + γ^2 - 2α(BH)$

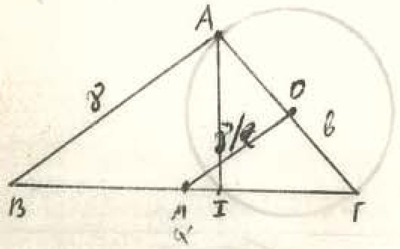


-Δξ ότι $β^2 = α^2 + γ^2 + 2α(HB)$

Έχομεν $γ^2 - β^2 = (BB')(BΓ')$ ή $β^2 - γ^2 = \overline{BΓ} . \overline{Γ'B} = α(Γ'B)$ (1)

αν $HB' = HB$ έχομεν $Γ'B = Γ'B' + 2(HB) = α + 2HB$

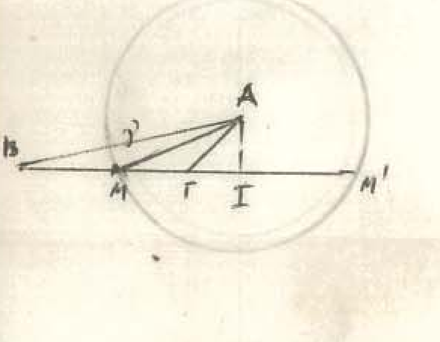
Όθεν η (1) δίδει $β^2 - γ^2 = α(α + 2\overline{HB})$ ή $β^2 = α^2 + γ^2 + 2α(HB)$



-Δξ ότι: $γ^2 - β^2 = 2α(MI)$

$MO^2 - \frac{β^2}{4} = MI . MΓ$ ή $\frac{γ^2}{4} - \frac{β^2}{4} = \frac{α}{2}(MI)$

$\rightsquigarrow$ $γ^2 - β^2 = 2α(MI)$



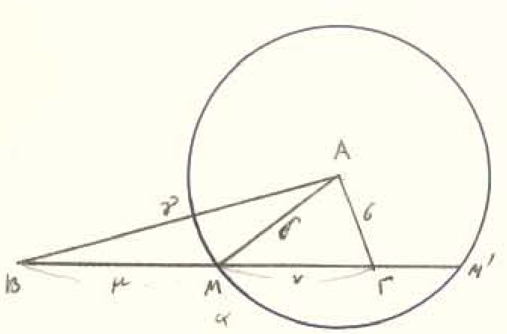
-Δξ ότι $β^2 + γ^2 = 2(AM)^2 + \frac{α^2}{2}$

$\partial_{B/(A,AM)} = γ^2 - AM^2 = (BM)(BM')$ (1)

$\partial_{Γ/(A,AM)} = β^2 - AM^2 = (ΓM)(ΓM')$ ή $β^2 - AM^2 = (BM)(M'Γ)$ (2)

(1) + (2) $\to$ $β^2 + γ^2 - 2(AM)^2 = (BM)[BM' + M'Γ] = \frac{α}{2} . α = \frac{α^2}{2}$

Θεώρημα Stewart. $(\mu\beta^2+\nu\gamma^2=\alpha\delta^2+\alpha\mu\nu.)$



Γράφουμε τήν περιφέρεια (A, AM=δ)

$\mathcal{D}^{B}_{(A,\delta)} = (BM)\cdot(BM') = \gamma^2-\delta^2$

$\mathcal{D}^{\Gamma}_{(A,\delta)} = (\Gamma M)(\Gamma M') = \delta^2-\beta^2$

ἤ αὐτά:

$\gamma^2-\delta^2 = \mu(\alpha+\Gamma M') \Rightarrow \nu\gamma^2-\nu\delta^2=\mu\nu(\alpha+\Gamma M')$ (1)

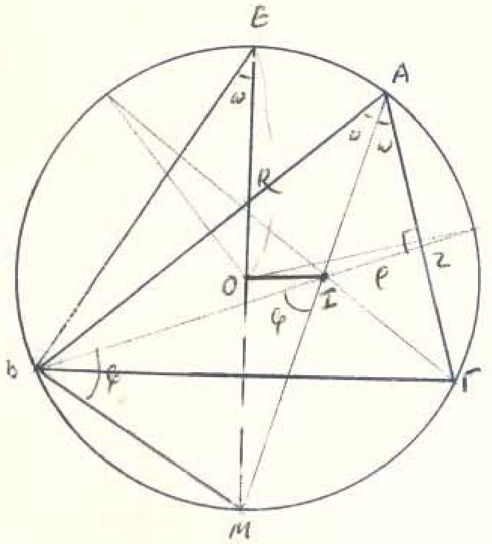
$\delta^2-\beta^2 = \nu\cdot\Gamma M' \Rightarrow \mu\delta^2-\mu\beta^2=\mu\nu\cdot(\Gamma M')$ (2)

δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατά μέλη (1)-(2)

Λαμβάνομεν: $\mu\beta^2+\nu\gamma^2-(\mu+\nu)\delta^2=\mu\nu(\alpha+\Gamma M'-\Gamma M')\Rightarrow$

$$\mu\beta^2+\nu\gamma^2=\alpha\delta^2+\alpha\mu\nu.$$

Θεωρημα Euler: $(OI)^2=R^2-2R\rho.$



$\mathcal{D}^{I}_{O} = (IA)(IM) = R^2-(IO)^2$

τριγ. BMI → ἰσοσκελές μέ $\varphi=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$. $\Rightarrow (MI)=(MB)$

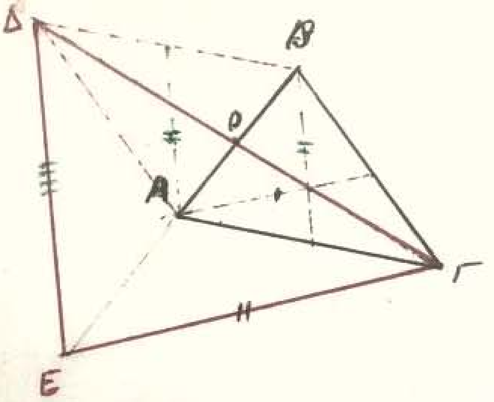
$\overset{\triangle}{AIZ}$ ομ. $\overset{\triangle}{EMB} \Rightarrow \frac{IA}{EM}=\frac{IZ}{BM}$

$\Rightarrow \frac{IA}{2R}=\frac{\rho}{IM}\Rightarrow (IA)(IM)=2R\rho$

Κατά ταῦτα $R^2-(IO)^2=2R\rho$

ἤ $(OI)^2=R^2-2R\rho.$

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑ (τριγώνου)



ΘΕΩΡΙΑ

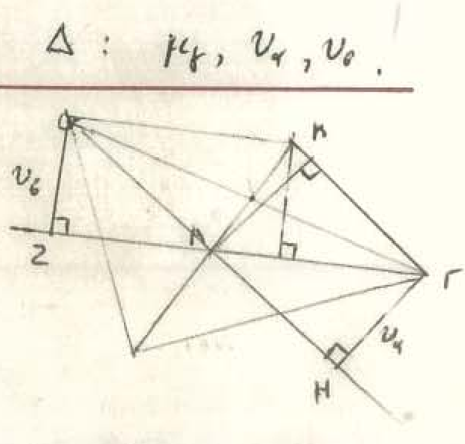
Διά παραλλήλου μεταφοράς μετασχηματίζομεν τό ΑΒΓ → ΓΔΕ, ὥστε ΑΕ = ΑΒ καί ΔΒ = ΑΓ. Αἱ γραμμαί αἱ διαχωροῦσαι ἐκ τοῦ Α ἔχουν τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου καί αἱ ὑπό τό Α σχημ. γωνίαι εἶναι αἱ ζητούμεναι γωνίαι. Ἐπειδή ΔΓ = 2(ΓΟ), αἱ πλευραί τοῦ νέου τριγώνου εἶναι διπλάσιαι τῶν διαμέσων τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου ἐκ τοῦ Α: εἶναι τά σημεῖα τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ νέου τριγώνου. Ἐπειδή Β καί Δ ἀπέχουν ἴσας τῆς ΑΓ τά ὕψη τῶν ΑΒΓ σχηματίζονται ὅλα τρίγωνα ἴσα ἐναντίας Α. Ἐπειδή κατά τήν παράλληλον μεταφοράν αἱ γωνίαι διατηροῦνται αἱ μεταξύ πλευρῶν ὅμως τῶν διαμέσων σχημ. γωνίαι σχηματίζονται καί εἰς τό νέον τρίγωνον. Ἐπειδή Δ ΔΑΓ = Δ ΑΒΓ τό ἐμβαδόν τοῦ ΔΕΓ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΒΓ. Δοθέντων τριῶν στοιχείων καί χαράσσομεν τό ΔΕΓ ἤ ἐν τῶν μικρῶν τριγώνων δυνάμεθα εὐκόλως νά κατασκευάσωμεν τά ἐπί στοιχεῖα εἰς τό Δ ΑΒΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

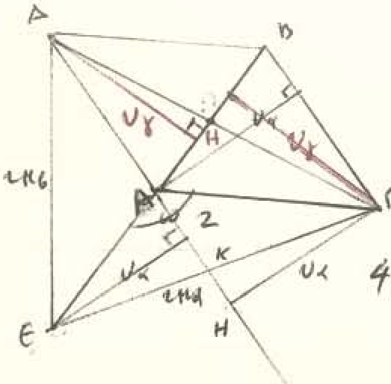
1. Δ: $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$.

ΔΕΓ κατασκευάζομεν ὅταν ΔΕ = $2\mu_\beta$, ΓΕ = $2\mu_\alpha$, ΓΔ = $2\mu_\gamma$. κτλ.

2. Δ: $\mu_\gamma, \upsilon_\alpha, \upsilon_\beta$.



Τρίγωνον ΔΖΓ κατασκευάζομεν.
ΔΗΓ "
Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον τῇ ΖΓ ἐκ τοῦ Γ παράλληλον τῇ ΔΗ. Ἐπιζητοῦμεν τά Α, Β, Γ. —



3. Δ : $υ_α$, $μ_α$, $μ_β$.

Τρίγωνον ΔΕΖ κατασκευάσιμον
» ΕΖΚ »
ισομερίζη καί τρίγωνα ΔΕΓ ἐπί τού αὐτού μεταβαίνομεν εἰς ΑΒΓ.

4. Δ : $υ_α$, $υ_γ$, $μ_β$.

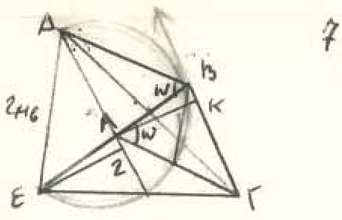
Τρίγωνον ΔΕΖ κατασκευάσιμον
» ΔΕΗ »
Τελεύθεν ἡ κορυφή Α. ἡ Γ ≡ τῇ ἐφαπτομένῃ πρό τήν ΕΗ ἐξ ἀποστάσεων $υ_γ$ καί τῇ παρ. πρός τήν ΑΖ εἰς ἀπόστασιν $υ_α$. τό Β ἡ τετάρτη κορυφή παραλληλογράμμου μέ γωνίας κορυφάς Δ, Α, Γ. —

5. Δ : ∗Α , $υ_α$ $μ_α$

Τρίγωνον ΕΖΚ κατασκευάσιμον. → Α. ἐπί κοινοῦ τόξου ἐγγρ. εἰς Ζ(ΕΚ) καί δεχομένου γωνίαν ΕΑΓ = 180° − Α.

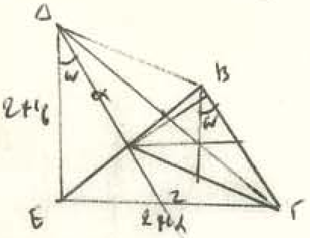
6. Δ : $υ_α$, $μ_α$, $υ_γ$: β

Ἐκ τοῦ προηγουμένου σχήματος ημΑ = $\frac{υ_γ}{β}$ = ημω
Τελεύθεν ω γνωστή· ὅτε ἀνάγομεν εἰς ἐκ τῆς προηγουμένης ἄσκησιν. —



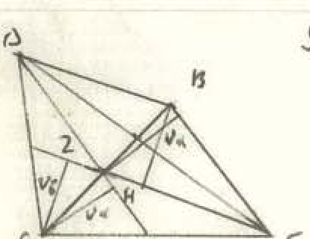
7. Δ : ∗Α , $υ_α$, $μ_β$.

Τό τρίγωνον ΔΕΖ κατασκευάσιμον. ἐξ ἀποστάσεων $υ_α$ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρός τήν ΔΖ, ἐπί τῆς παραλλήλου ταύτης καί ἐπί κοινοῦ τόξου ἐγγρ. εἰς 2μβ καί δεχομένου γωνίαν Α κεῖται τό Β. κτλ.



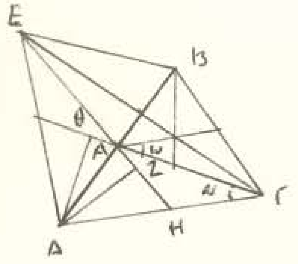
8. Δ : $μ_α$, $μ_γ$ ∗ $μ_β$ α = $ω_0$

ἡ κορυφή Δ κεῖται ἐπί τόξου βάσεως (ΕΖ) καί γωνίας ω.
Ἐπίσης ἐπί περιφερείας (Γ, 2$μ_γ$). Κατασκευάζομεν τότε τό ΔΕΓ ἐπομένως κατά τά γνωστά καί τό ΑΒΓ.



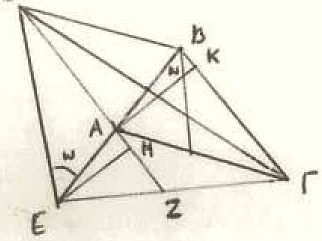
9. Δ : $μ_α$, $υ_α$, $υ_β$

Τρίγωνον ΕΗΘ κατασκευάσιμον. Ὁμοίως ΕΖΓ κατασκευάσιμον. τότε Α ≡ ΘΗ, ΓΖ
Β τό συμμ. τοῦ Ε ὡς πρός Α. Ἰδού τό ΑΒΓ.



10. $\Delta: \ \upsilon_\alpha, \ \upsilon_\beta, \ \sphericalangle \ \widehat{\mu_\alpha \beta} = \omega$

Τρίγωνον ΔΒΓ κατασκευάσιμον.
ὁμοίως ΔΖΗ "
Ἐντεῦθεν τὸ Α ἔτι καὶ τὸ Β.



11. $\Delta: \ \upsilon_\alpha, \ \alpha, \ \sphericalangle \ \widehat{\mu_\beta \gamma} = \omega$

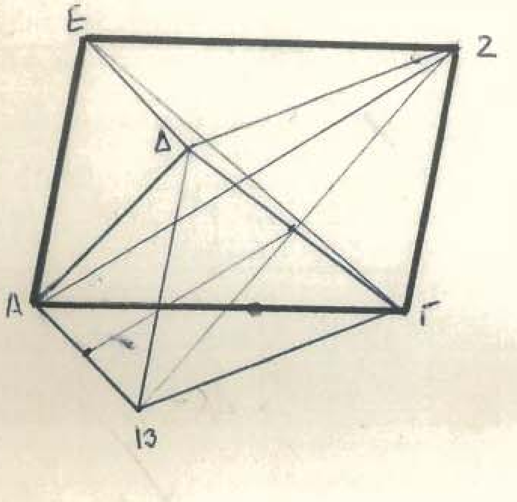
Ἡ κορυφὴ Ε κεῖται ἐπὶ τόξου ἑδραζομένου εἰς τὴν ΔΑ (= α) καὶ δεχομένου γωνίαν ω καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ~~τῆς~~ ΔΑ εἰς ἀπόστασιν υ_α. Τρίγωνον ΔΑΕ κατασκευάσιμον. Ἐντεῦθεν τά Β καὶ Γ.

12. $\Delta: \ \upsilon_\alpha, \ \beta+\gamma = \lambda, \ \dfrac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\gamma} = c.$

Γνωρίζομεν ὅτι $\dfrac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta}$ (1) ἡ ἄλλη $\beta+\gamma=\lambda$ (2)
Αἱ (1) καὶ (2) δίδουν τά β καὶ γ.
Ἐκ τοῦ ἐντεῦθεν σχήματος τὰ τρίγωνα ΒΑΚ, καὶ ΚΑΓ κατασκευάσιμα. Ἄρα καὶ τό ΑΒΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

ΔΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΣΗΡΤΗΜΕΝΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ
(παράλληλος μεταφορά)



Τό παραλληλόγραμμον ΑΓΖΕ ἔχει τάς ἑξῆς ἰδιότητας:

(i) Αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι μέ τάς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου.

(ii) Αἱ γωνίαι του ἴσαι μέ τάς γωνίας τῶν διαγωνίων τοῦ 4πλεύρου.—

(iii) Αἱ διαγώνιοί του εἶναι διπλάσιαι τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τά ὁποῖα συνδέουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ 4πλεύρου καί παράλληλοι πρός αὐτά.—

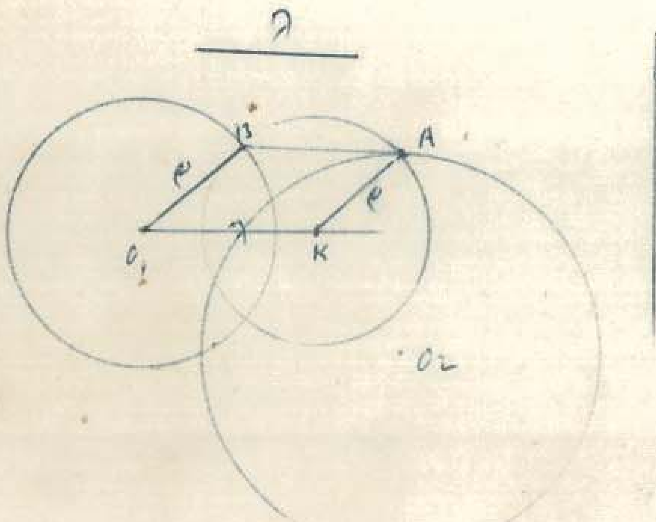
(iv) Τό ἐμβαδόν του εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.—

Αἱ ἰδιότητες αὗται χρησιμοποιοῦνται εἰς τήν κατασκευήν σχημάτων τετραπλεύρων ἰδίως ὅταν μεταξύ τῶν δεδομένων περιλαμβάνονται καί αἱ διαγώνιοι.—

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Μία βασική κατασκευή.

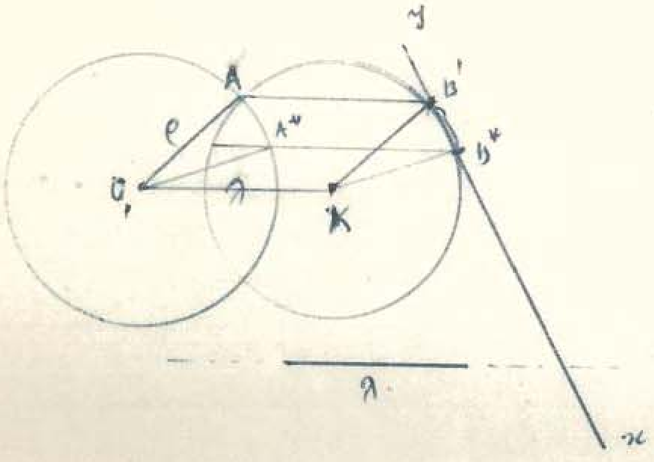
Δίδονται δύο περιφέρειαι. Νά ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον τά ἄκρα του ἐπί δύο περιφερειῶν καί μέ τρόπον ὥστε νά εἶναι παράλληλον καί ἴσον πρός δοθέν εὐθύγραμμον τμῆμα.—



Μεταφέρω τήν (O, B) κατά τμῆμα $O_1K \parallel = \lambda$ καί ὁρίζω τό Α. ἡ ΑΒ ∥ λ τέμνει τήν O_1 εἰς τό Β. ἡ ΑΒ εἶναι ἡ ζητουμένη.—

II. Βασική κατασκευή.

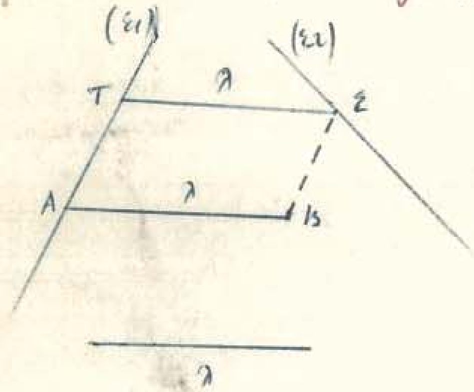
Δίδεται περιφέρεια καὶ εὐθεῖα. Νὰ τοποθετηθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ = λ ἔχον τὴν περιφέρειαν καὶ τὴν εὐθεῖαν διὰ τῶν ἄκρων Α καὶ Β καὶ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy —



Ἡ κατασκευὴ γ' ἀναλύσω.
Μὲ κέντρον τὸ Κ ὅπου Ο,Κ ∥ λ. γράφω περιφέρειαν (Κ, ρ) τέμνει τὴν xy εἰς τὰ Β καὶ Β'. ἔπειτα φέρω Β'Α ∥ λ. καὶ ἰσοδυναμεῖ πάντα τὸ ΑΒ' μὲ τὸ λ. ἔχει τὴν (Ο, ρ) καὶ τὴν xy.

III Δοσμένη κατασκευή·

Νὰ τοποθετηθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα παράλληλον τῇ xy μήκους λ.

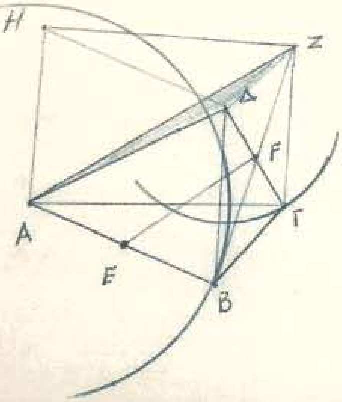


φέρω ΑΒ ∥ xy. καὶ ΑΒ = λ.
ἔπειτα φέρω ΒΣ ∥ ($ε_1$). καὶ τέλος ΣΤ ∥ ΑΒ ἢ xy. ἡ ΤΣ εἶναι ἡ ζητουμένη. —

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ.

(261)

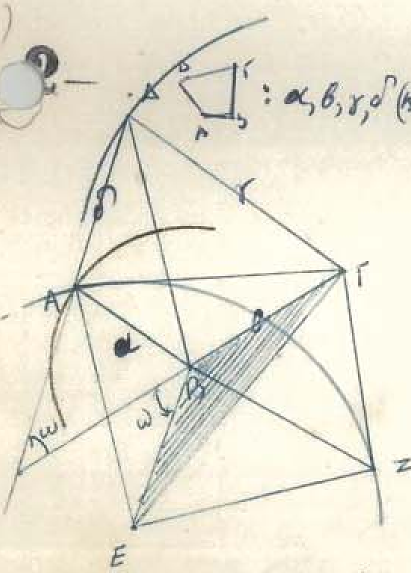
1—  : $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon F)$



Τό τρίγωνον ΑΔΖ κατασκευάζεται.
Αἱ κορυφαί Β, Γ κεῖνται ἀντιστοίχως
ἐπί περιφερειῶν κέντρων Α, Δ καί ἀκτίνων ΑΒ, ΔΓ
μετά ταῦτα ἡ 1η βασική κατασκευή.

(279)

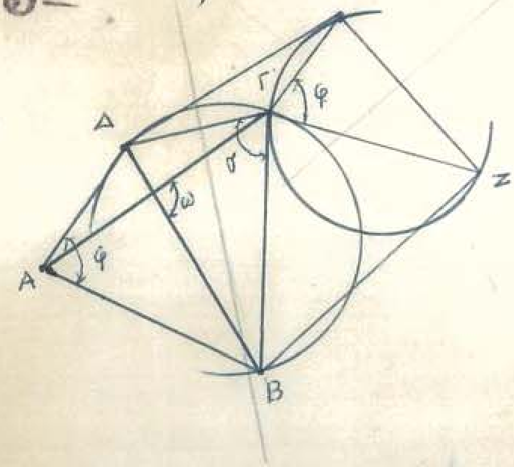
2— : $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ (\widehat{B\Gamma, A\Delta}) = \omega$



Τό ΒΓΕ κατασκευάζεται.
Κατόπιν ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω.
Αφοῦ κατασκευάσωμεν τό τρίγωνον ΑΔ μήκους δ
ἐκ τῶν (Γ, γ) καί (Β, α) ευρίσκομεν τό ΒΕ —

(280)

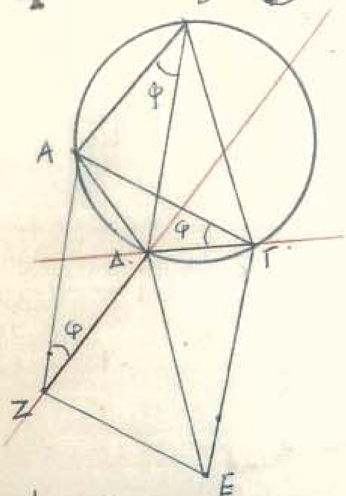
3—
(i) $\delta, \delta_1, \measuredangle(\delta, \delta_1)\ \measuredangle B, \measuredangle \Delta$
(ii) $\delta, \delta_1 \measuredangle(\delta, \delta_1) E\ \measuredangle A, \measuredangle \Gamma.$



Κατασκευάζομεν κατ' ἀρχάς τό παραλληλόγραμμον ΒΔΕΖ. Κατόπιν γράφομεν τόξα χορδῶν ΒΔ, ΕΖ δεχόμενα γωνίας σ καί φ τή τομή τῶν ὁποίων δείξει τό Γ. κτλ……

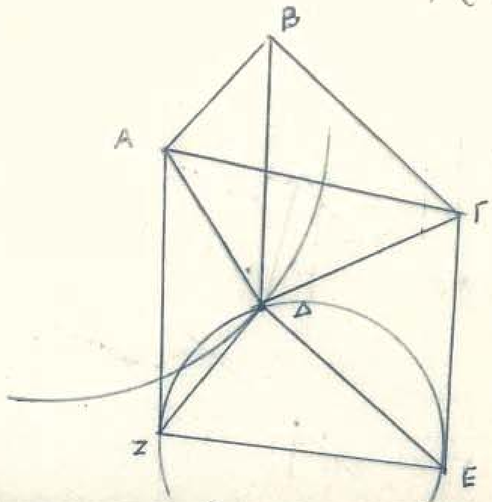
(180) (185)

4 ◯ : $\delta_1, \delta_2 \ast \widehat{\delta_1, \delta_2}$, $\widehat{AB, B\Delta} = \varphi$.



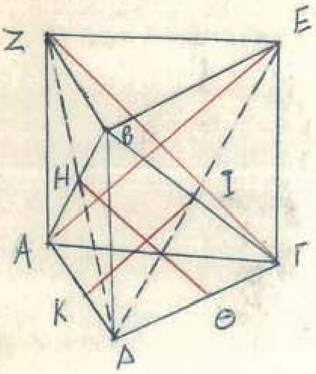
Τό παρ/μον ΑΓΕΖ κατασκευάζεται.
Αἱ διευθύνσεις ΓΔ, ΖΔ εἶναι σταθεραί. Ἐκ τούτων ὁρίζεται τό Δ.
κ.τ.λ...

—5 ◇ : δ_1, δ_2 $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, $\widehat{AB, B\Gamma} = \omega$.
$\sphericalangle(\delta_1, \delta_2)$.



Τό παρ/μον ΑΓΕΖ κατασκευάζεται.
Τό Δ ὁρίζεται ὡς τομή τῶν τόπων:
α) $Z\hat{\Delta}E = \varphi$, $\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \lambda$. κτλ...

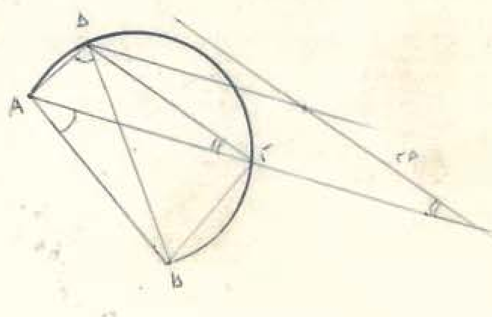
—6 A◇Γ : ∗Β, Δ, ΚΙ, ΘΗ, ε

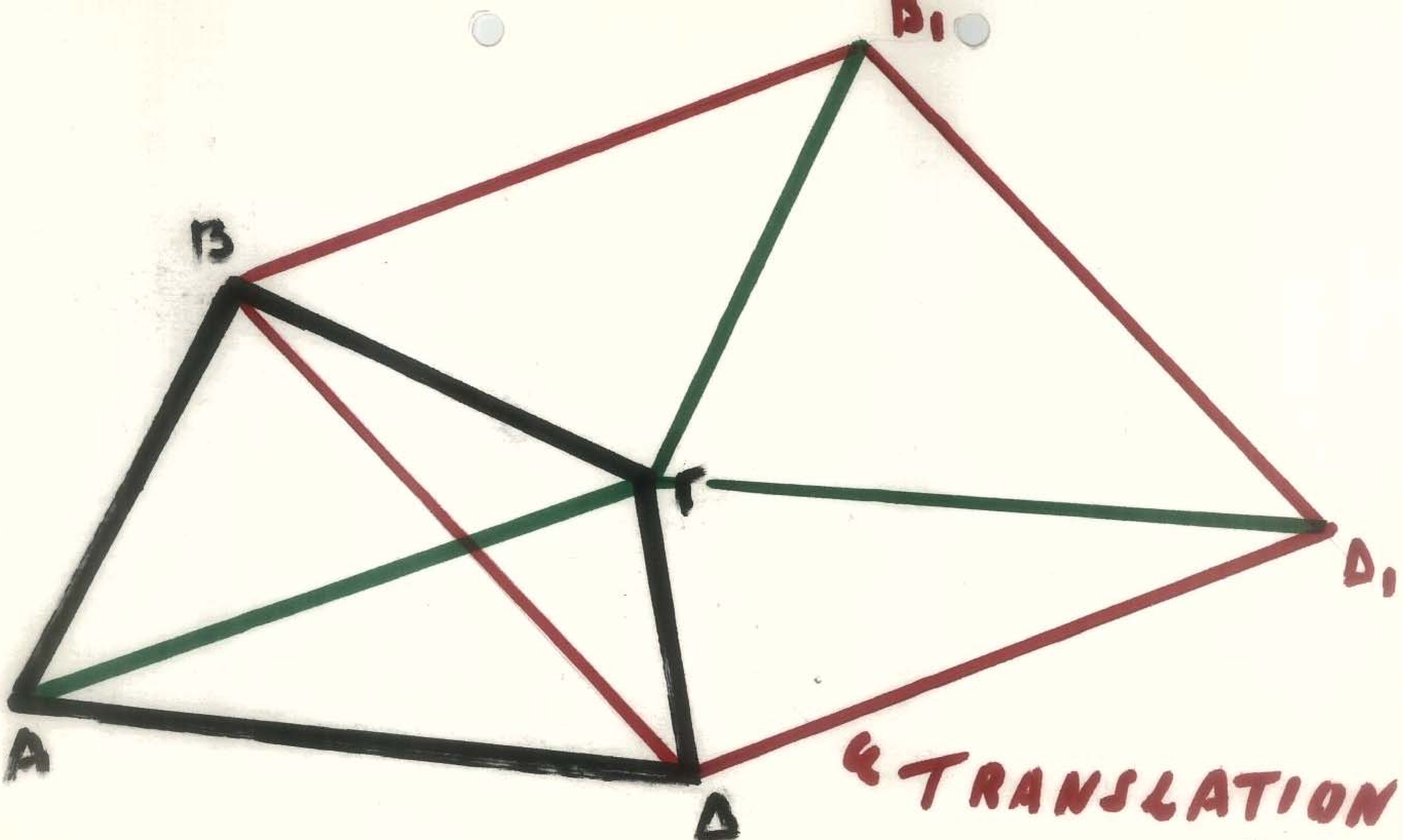


Ἔχομεν (ΑΓΕΖ) = 2(ΑΒΓΔ),
(ΑΕ) = 2(ΚΙ) (ΓΖ) = 2(ΘΗ) ἄρα
τό ΑΓΕΖ κατασκευάζεται...
Βλέπε ἀνωτέρω ἄσκησιν 3
κ.τ.λ...

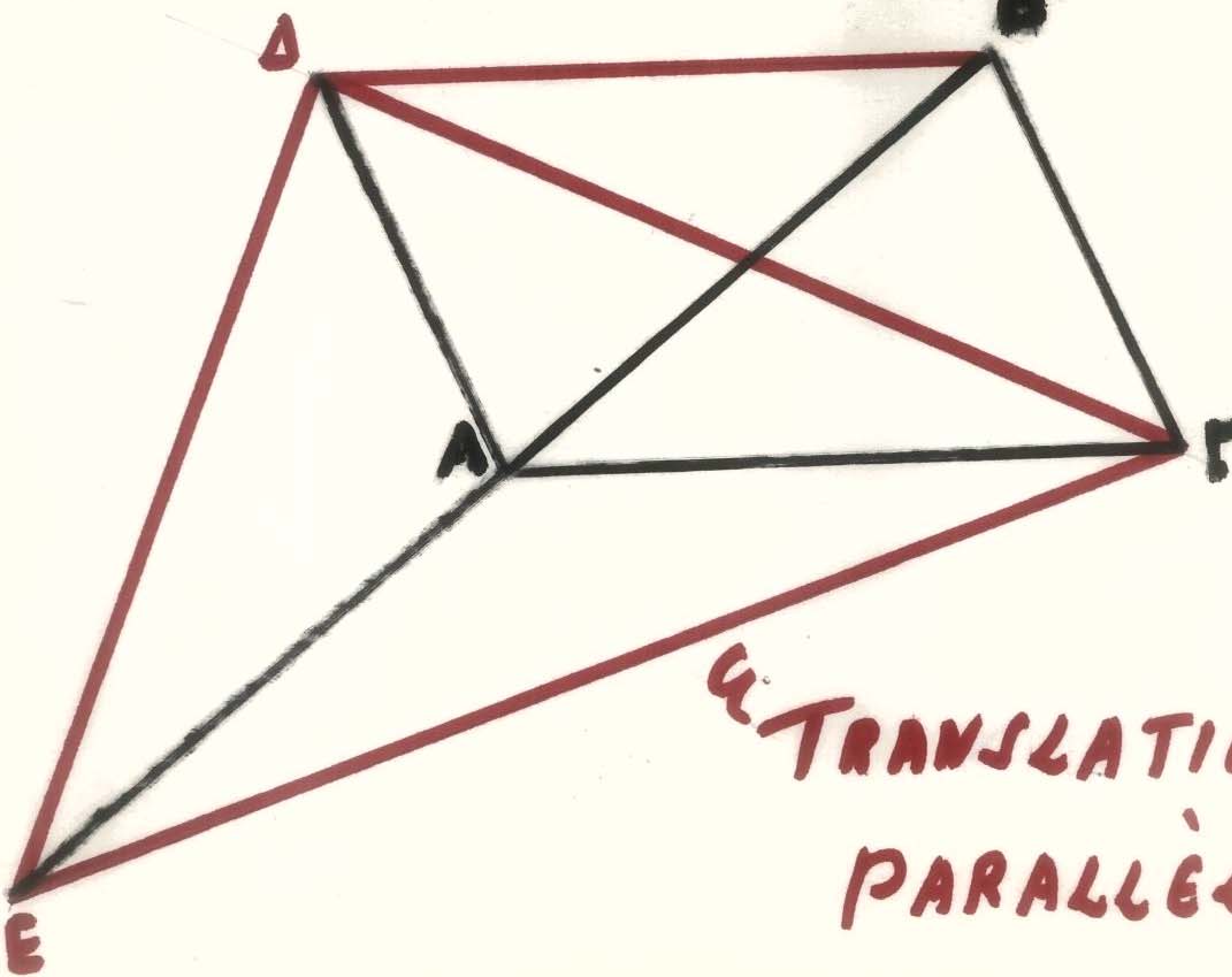
—6.

7 — A◇Γ : ΑΒ, ΓΔ ∗ ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΒΔΑ.





« TRANSLATION PARALLÈLE »



«TRANSLATION PARALLÈLE»

ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΘΗ 4ΠΛΕΥΡΟΝ:

- Ἐκ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ∡ΒΑΓ, ∡ΑΓΔ καὶ ΒΔΑ. —

- Ἐκ δύο ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ἐξ ὅλων τῶν γωνιῶν. —

- Ἐκ τριῶν πλευρῶν καὶ τῶν περιεχομένων ὑπ' αὐτῶν — πλευρῶν γωνιῶν.

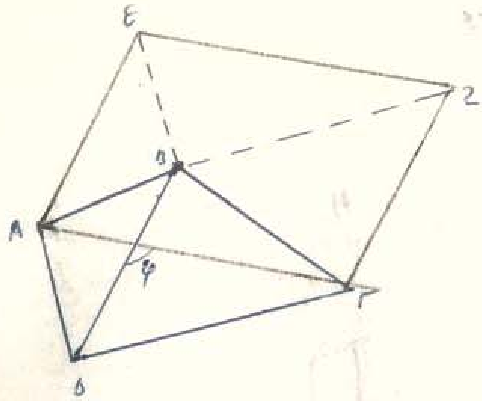
- Ἐκ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΑΓ καὶ ∡ΑΒΔ καὶ ∡ΒΔΓ. —

- Ἐκ τῶν διαγωνίων, τῆς γωνίας των καὶ τῶν ∡ΒΓΑ, ∡ΓΑΔ.

- Ἐκ τῶν διαγωνίων, δύο ἀπέναντι πλευρῶν καὶ τῆς γωνίας των.

- Ἐκ τεσσάρων πλευρῶν καὶ τῆς εὐθείας ἥτις ἑνώνει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων

◇ : ΑΓ, ΒΔ, $\widehat{ΑΓ, ΒΔ} = φ$, $ΑΒ + ΒΓ = λ$ καί $ΓΔ^2 - ΑΔ^2 = κ^2$



Τό παραλληλόγραμμον κατασκευ-
-άζεται. Ἐπειδή $ΓΔ^2 - ΑΔ^2 = κ^2$
θα εἶναι καί $ΒΖ^2 - ΒΕ^2 = κ^2$
ὁπότε. Τόπος τῆς Β γνωστός. (μιά
εὐθεῖα).
Ἐξ ἄλλου $ΑΒ + ΒΓ = λ$. Ἴσως τό
Β ἀνήκει εἰς ἔλλειψιν μέ Α καί Γ ἑστίες
μέ ἄθροισμα σταθερόν. Τότε
εἶναι κύκλου περιφερείας ....
Βγαίνει ἀνώτερο πρόβλημα —

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ττ. ΤΡΙΓΩΝΩΝ μέ $2α = β+γ$.

Δ.ξ. ὅτι

1. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθεῖαν τήν συνδέουσαν τά κέντρα ἐγγεγραμμένου καί περιγεγραμμένου κύκλου.

> Ἀπόδειξις. Προεκτείνω τήν ΑΙ μέχρις ὅτου τμηθῇ τήν (O,R) εἰς Δ. Κατά τό θ. τοῦ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ἔχω $ΑΔ \cdot ΒΓ = ΑΒ \cdot ΓΔ + ΑΓ \cdot ΒΔ = ΒΔ(ΑΒ+ΑΓ) = (ΒΔ)2(ΒΓ)$
> $\rightarrow ΑΔ = 2(ΒΔ)$. Ἀλλά $ΒΔ = ΔΙ$ διότι $\widehat{ΙΒΔ} = \widehat{ΒΙΔ}$ ὅθεν $ΑΔ = 2(ΑΙ)$ δηλαδή τό Ι εἶναι μέσον τῆς ΑΔ καί ἡ $ΟΙ \perp ΑΔ$.

2. Ὑπολογίσατε τά ΒΔ, ΔΓ καί $δ_α$.

3. Ἄν $υ_α = ρ_α$ τότε $2α = β+γ$.

4. $υ_α = OA' + OM + ON$ ἔνθα Ο τυχόν σημεῖον τῆς διχοτ. $δ_α$.

(ἄν. $O \equiv I$, $υ_α = 3ρ$.)

> Πράγματι $αυ_α = α(OΛ) + 2α(OM)$ ἤ
> $υ_α = OΛ + 2OM \rightarrow υ_α = OΛ + OM + ON$.

5. $βγ = 6Rρ$.

> Ἀπόδειξις. $2E = αυ_α = 2τρ$ ἀλλά $2τ = α+β+γ = 3α$. ὅτι $αυ_α = 3αρ$ καί $υ_α = 3ρ$
> ἀλλά $βγ = 2Rυ_α$ ἤ $βγ = 2R3ρ \rightarrow βγ = 6Rρ$.

6. Ἄν ΙΖ ∥ ΒΓ. Δεῖξατε: $β+γ = 2α$.

7. Ἡ διχοτόμος τῆς Α εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθεῖαν τήν συνδέουσαν τό κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης μετά τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.—

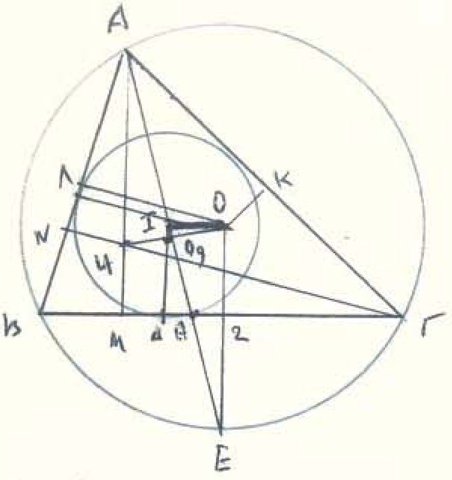
8. Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας κάθετος ἀπόστασις ἀπό τῆς μέσης πλευρᾶς εἶναι ἴση πρός $R-ρ$.

9. Τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπό τῶν β καί γ ἰσοῦται πρός $2ρ$.

$x+y+z = R+ρ$
$z = R-ρ$ $\Rightarrow x+y = 2ρ$

10. Τό κέντρον Ι καί τό κέντρον τῆς περιφερείας τοῦ Euler ἀφίστανται ἐπί εὐθείας καθέτου ἐπί τήν μέσην πλευράν.

8. Η ἐκ τοῦ κέντρου Ο κάθετος ἐπὶ τῆς μέσης πλευρᾶς $= R - \rho$.



Ἔχομεν $2\alpha = \beta + \gamma$. $IA = IE$ καὶ $I\Theta = \frac{AI}{2}$ (διότι $IZ \parallel B\Gamma$

Ἐκ τούτων προκύπτει $I\Theta = \Theta E$.

Ἀλλὰ $\overset{\triangle}{I\Delta\Theta} = EZ\Theta$ (διότι $I\Theta = \Theta E$ ∧ $\Delta\hat{I}\Theta = Z\hat{E}\Theta$. Συνεπῶς $ZE = I\Delta = \rho$

Ὅθεν $OZ = OE - ZE = R - \rho$.

Συμπλήρωσις $\frac{AI}{I\Theta} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2 \to AI = 2(I\Theta) \to I\Theta = \frac{AI}{2}$

καὶ $I\Theta = \Theta E$. $\to ZE = \rho$ κτλ.

9. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων ἰσοῦται πρὸς 2ρ.

$\Sigma = OK + O\Lambda + OZ = R + \rho$. Ἐκ τούτου $OK + O\Lambda = R + \rho - OZ = R + \rho - (R - \rho) = 2\rho$.

10. Δεῖξαι ὅτι $\overline{IO_g} \perp B\Gamma$.

Τὰ ὀρθογώνια $\overset{\triangle}{\Theta A M}$ καὶ $\overset{\triangle}{\Theta I \Delta}$ ὅμοια $\Theta\Delta : \Theta M = \Theta I : \Theta A = 1 : 3$

ἢ $3\Theta\Delta = \Theta M$ ἢ $2\Theta\Delta = \Delta M$ (ἐπειδὴ $\Delta\Theta = \Theta Z$, $\Delta Z = \Delta M$.)

Συνεπῶς ἡ διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τραπεζίου ΜΗΟΖ εἶναι παράλληλη πρὸς τὰς βάσεις ΜΗ, ΖΟ αὐτοῦ δηλ. εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν μέσην πλευρὰν α τοῦ ΑΒΓ. Ὅθεν $\overline{IO_g} \perp B\Gamma$. —

11. Δεῖξαι ὅτι $\frac{2}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma}$

ΤΡΙΓΩΝΑ · μέ $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

-Δξ ὅτι:

1 $2(AH)^2 = (BH)^2 + (\Gamma H)^2$

(Ἡ ἀπόδειξις: ἐφαρμόσατε τό θ. τῆς ὀξείας γωνίας διά τό ΑΗ εἰς τά τρίγωνα ΑΗΒ και ΑΗΓ και προσθέσατε κατά μέλη)

II. $OH = 2(OH')$ κτλ.

2 $2\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$

3 $AH^2 + B\Gamma^2 = BH^2 + \Gamma A^2 = \Gamma H^2 + AB^2$

4 Ἡ περιφέρεια ΑΖΒ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς τό Β.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν $4(AM)^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \to AM^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \sim AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, $ZM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$. Ἐπομένως $AM \cdot MZ = \frac{\alpha^2}{4} = BM^2$. Και ἐπειδή $BM = B\Gamma/2$ ἐφάπτεται τῆς ΑΖΒ εἰς τό Β.

5 Τό ΑΒΓ: ὅμοιον μέ τό ἔχον πλευράς τάς διαμέσους.

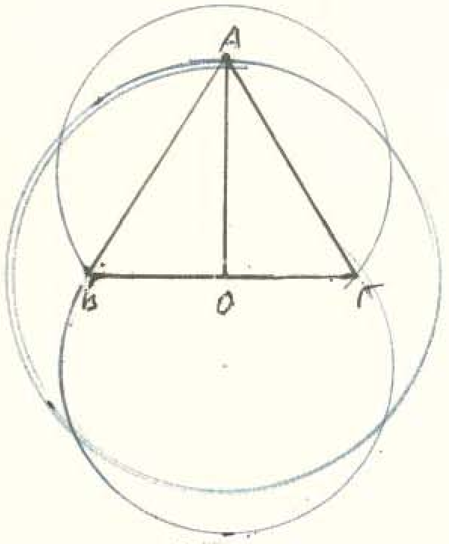
6 Τό 4πλευρον ΒΖΗΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

7 Ἄν ΒΕ, ΓΖ ὕψη τοῦ ΑΒΓ δεῖξατε ὅτι ἡ ΖΕ διέρχεται ἀπό τό μέσον τῆς διαμέσου ΑΔ.

8 Ἐπί τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα Α'ΒΓ και Α''ΒΓ. Δεῖξατε ὅτι ἡ γωνία Α'ΑΑ'' εἶναι ὀρθή.—

Ἀπόδειξις. Ἐάν Δ τό μέσον τῆς ΒΓ τότε $AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 2\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2$ ἤ $B\Gamma^2 = A\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$ ἤ $A\Delta = \frac{B\Gamma\sqrt{2}}{2}$. Ἄρα $A\Delta = \Delta A' = \Delta A''$ και τότε Α''ΑΑ' ὀρθογώνιον.—

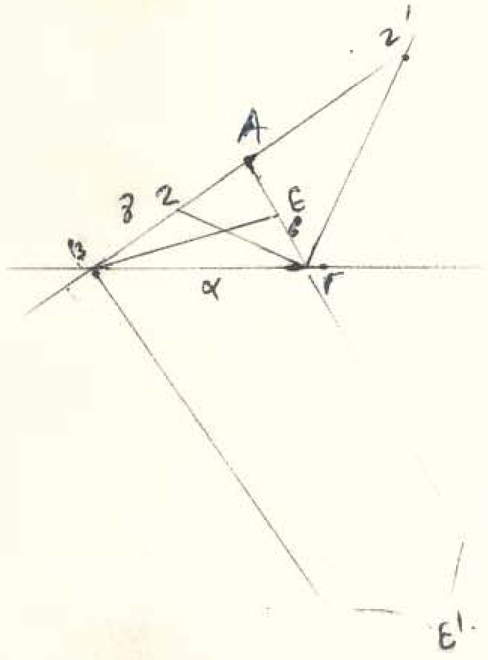
Δίδεται ἡ γωνία Α. Μεταξύ τίνων ὁρίων πρέπει νά περιέχεται αὕτη ἵνα εἶναι δυνατόν νά συμπληρωθοῦν αἱ Β και Γ.



Αν α γνωστή. Τόπος της κορυφής Α. Είναι τόξον εδραζόμενον επί ΒΓ = α και δεχόμενον γωνίαν Α.

Εξ άλλου η σχέση $2\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ επειδή $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Βλέπομεν ότι ένα η τετάρτη κορυφή ευρίσκεται δια των τόξων τομή και αφού η Α να ευρίσκεται μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{3}$ για τη ύπαρξη σχήματος. Εν τούτοις το ΑΒΓ είναι ισόπλευρον.—

9 Αν Ε, Ε' και Ζ, Ζ' οι ίχνη εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου από γωνιών Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ με $\beta < \alpha < \gamma$ και $2\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ δείξτε ότι $(EE') = (ZZ')$.



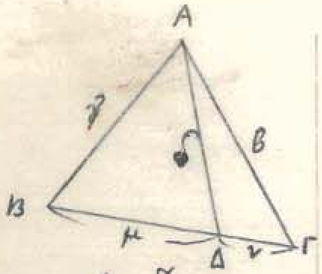
Απόδειξη.

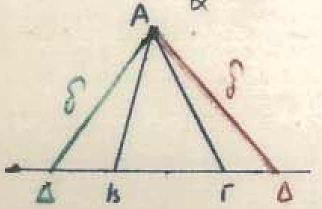
Έχουμε $EE' = \frac{2\alpha\beta\gamma}{\gamma^2-\alpha^2}$

$ZZ' = \frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2}$

Επειδή $2\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$. Έπεται ότι $(EE') = (ZZ')$.

ΘΕΩΡΗΜΑ
STEWART & ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.



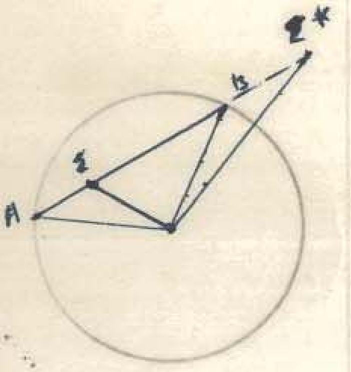


1. — Δε ότι (i) $\beta^2\mu+\gamma^2\nu = \alpha\delta^2+\alpha\mu\nu$.

(ii) $\beta^2\mu-\gamma^2\nu = \alpha\delta^2-\alpha\mu\nu$.

(iii) $\gamma^2\nu-\beta^2\mu = \alpha\delta^2-\alpha\mu\nu$.

2. Εύρετε τό ν_α συναρτήσει τών α, β, γ
» τάς $\delta_\alpha, \delta^*_\alpha$ » »
» » μ_α » »
» » m_α (συμμετροδιάμεσον)
» το ΑΔ. όπου Δ σημείον τυχόν τού
γεωμ. κείμενον μετά τής ΒΓ. —



3. Υπολογίσατε τάς διαγωνίους τραπεζίου συναρτήσει α, β, γ, δ.

— Δε ότι (i) $(A\Sigma)(\Sigma B) = R^2-(O\Sigma)^2$

(ii) $(\Sigma^*B)(\Sigma^*A) = (O\Sigma^*)^2-R^2$

4. Εύρετε τόν τόπον τών σημείων Α διά τά οποία $p(AB)^2 \pm q(A\Gamma)^2 = \lambda^2$ ένθα $(B\Gamma)=c$ δοθέντα μεγέθη.

5. Νά ευρεθή ό Γ. ΤΟΠΟΣ τών σημείων τών οποίων τό άθροισμα τών τετραγώνων τών αποστάσεων από τάς κορυφάς δεδομένου τριγώνου νά είναι ίσον πρός δοθέν τετράγωνον.

6. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ έχον τάς πλευράς ΒΓ=α, ΓΑ=β, ΑΒ=γ. Λαμβάνομεν επί τής πλευράς ΒΓ σημείον D, τοιούτον ώστε ο λόγος $\frac{DB}{D\Gamma}=k$ μέ $k\neq 1$. Υπολογίσατε τό μήκος ΑD συναρτήσει τών α, β, γ, k.

Εφαρμογή. (i) διά $k=-1$ ευρίσκομεν τό μ_α = ;
(ii) διά $k=-\frac{\gamma}{\beta}$ » τό δ_α.
(iii) διά $k=\frac{\gamma}{\beta}$ » τό δ^*_α.

7. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ λαμβάνομεν μεταβλητὸν σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ. Δείξατε ὅτι $(AM)^2 + (ΓM)(MB) = (AB)^2$.

Αι. 39 / p 12 / I λογ. Εκ. P/ιων.

8. Εὕρετε διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Stewart τὸν τόπον τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν δύο δοθέντων σημείων νὰ εἶναι σταθερὸν Κ. —

9. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Ρ ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας. Δείξατε:

$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BΓ} + \overline{PB}^2\cdot\overline{ΓA} + \overline{PΓ}^2\cdot\overline{AB} + \overline{BΓ}\cdot\overline{ΓA}\cdot\overline{AB} = 0$$

(ii) ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅταν τὸ Ρ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Q ἡ προβολὴ τοῦ Ρ ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Ἔχομεν $PA^2 = PQ^2 + QA^2$, $PB^2 = PQ^2 + QB^2$, $\overline{PC}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2$ καὶ ἡ σχέσις τοῦ Stewart δύναται νὰ γραφῇ·

$$(PQ^2+QA^2)\overline{BΓ} + (\overline{PQ}^2+\overline{QB}^2)\overline{CA} + (\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2)\overline{AB} + \overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB} = 0$$

ὁ συντελεστὴς τοῦ $\overline{PQ}^2$ εἶναι $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}$ ἴσον 0 · ὁ ἀνεξάρτητος ὅρος τοῦ $\overline{PQ}^2$ εἶναι:

$\overline{QA}^2\cdot\overline{BΓ} + \overline{QB}^2\cdot\overline{CA} + \overline{QC}^2\cdot\overline{AB} + \overline{BΓ}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$. ἄρα ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι 0 ἐπειδὴ Q εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

---

10. Ἂν Ζ τὸ βαρύκεντρον τριγώνου ΑΒΓ δείξατε ὅτι ἡ δύναμις τοῦ Α ὡς πρὸς περιγεγραμμένον κύκλον περὶ τὸ ΒΖΓ ἰσοῦται πρὸς $\frac{α^2+β^2+γ^2}{3}$.

Ἀπόδειξις. Ἐφαρμόζομεν τὸ θ. τοῦ St.-ἐπὶ ΚΑΜ καὶ ἐπειδὴ τέμνονται τὴν ΚΖ. ὅπου Κ τὸ κέντρον τῆς ΒΖΓ καὶ ΑΜ διάμεσος τοῦ τριγώνου —

ΑΠΟΛΛΩΝΕΙΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα βλέπομεν δύο δοθείσας περιφερείας ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

2. Δίδονται 4 σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Εὕρετε σημεῖον Ρ τοιοῦτον ὥστε $\angle ΑΡΒ = \angle ΒΡΓ = \angle ΓΡΔ$.

3. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $υ_α$, $μ_α$ καὶ $β/γ = κ/λ$.

4. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων διὰ τοῦ Α καὶ κατὰ τρόπον ὥστε αἱ περιφέρειαι νὰ φαίνωνται ἐκ τοῦ Β ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

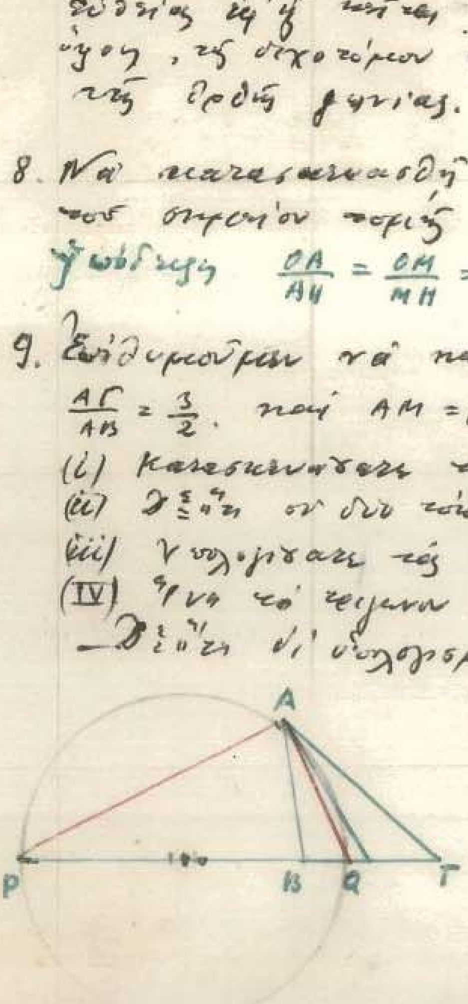
5. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ ὕψη. ($\frac{α}{2}/β = \frac{υ_β}{2υ_α} \to Γ$.)

6. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (x) καὶ (y) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῶν κείμενα. Νὰ ἀχθῇ κάθετος ΜΝ μεταξὺ αὐτῶν τῶν παραλλήλων τοιαύτη ὥστε ΜΑ : ΝΒ = μ : ν.

7. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον γνωρίζοντες ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται ἡ ὑποτείνουσα τοὺς πόδας Η, Δ καὶ Μ τοῦ ὕψους, τῆς διχοτόμου καὶ τῆς διαμέσου ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας.

8. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον γνωστῆς R, γνωστῶν Ο, Η καὶ τοῦ σημείου τομῆς Δ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου μετὰ τῆς ΟΗ.
Ὑπόδειξις $\frac{ΟΑ}{ΑΗ} = \frac{ΟΜ}{ΜΗ} = k \to$ Α ἐπὶ Ἀπολλ. περιφ. καὶ ἐπὶ τῆς (Ο,R)

9. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐὰν ΒΓ = α, $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{3}{2}$ καὶ ΑΜ = μ. (ΒΜ = ΜΓ)
(i) Κατασκευάσατε τοὺς 2 τόπους τοῦ ὁποίου τυχὸν εἶναι τὸ Α.
(ii) Δείξατε ὅτι οἱ δύο τόποι τέμνονται ἐὰν $\frac{α}{10} < μ < \frac{5α}{2}$
(iii) Ὑπολογίσατε τὰς ΑΓ, ΑΒ συναρτήσει τῶν α καὶ μ.
(IV) Ἵνα τὸ τρίγωνον ὑφίσταται δέον ΑΓ − ΑΒ < ΒΓ < ΑΓ + ΑΒ.
— Δείξατε δι' ὑπολογισμοῦ ὅτι αὕτη ἡ σχέσις ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἐρώτημα (ii)



$\frac{AB}{AΓ} = \frac{3}{2}$, $\frac{PB}{PΓ} = \frac{QB}{QΓ} = \frac{2}{3}$, $\frac{PB}{PΓ - PB} = \frac{2}{3-2}$, $\frac{PB}{α} = 2$

PB = 2α ὁμοίως εὑρίσκομεν $QB = \frac{2α}{5}$

(ii) Οἱ δύο τόποι θὰ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον ἐὰν MQ < μ < MP

ἀλλά $MQ = \frac{α}{2} - \frac{2α}{5} = \frac{α}{10}$, $MP = 2α + \frac{α}{2} = \frac{5α}{2}$

$\rightarrow \frac{\alpha}{10} < \mu < \frac{5\alpha}{2}$

(iii) $\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{2}$ καί $A\Gamma^2 + AB^2 = 2\mu^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

$\frac{A\Gamma}{\sqrt{A\Gamma^2+AB^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\frac{AB}{\sqrt{A\Gamma^2+AB^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad A\Gamma = \frac{3\sqrt{2\mu^2+\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{13}}$

$AB = \frac{2\sqrt{2\mu^2+\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{13}}$

[illegible]· $\frac{\sqrt{2\mu^2+\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{13}} < \alpha < \frac{5\sqrt{2\mu^2+\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{13}}$ ἢ $2\mu^2+\frac{\alpha^2}{2} < 13\alpha^2$

$2\mu^2 < \frac{25}{2}\alpha^2$ $\quad \mu < \frac{5\alpha}{2}$, $50\mu^2 + \frac{25\alpha^2}{2} > 13\alpha^2$, $50\mu^2 > \frac{\alpha^2}{2}$, $\mu > \frac{\alpha}{10}$

10. Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι. Νά εὑρεθῇ σημεῖον ἀπό τό ὁποῖον νά βλέπωνται αἱ τρεῖς περιφέρειαι ὑπό τήν αὐτήν γωνίαν.

11. Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι. Νά εὑρεθῇ σημεῖον ἀπό τό ὁποῖον νά βλέπωνται αἱ περιφέρειαι ὑπό γωνίας $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

12. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, $\beta/\gamma = \mu/\nu$ καί ἐκ τῶν (i) $\hat{A}$ (ii) ὕψους υ_1 (iii) δ_1 ἢ δ_1' (iv) $\frac{\delta_1}{\delta_1'} = \frac{\rho}{\sigma}$.

13. Παριστῶμεν διά ΑΔ τήν ἐσωτερικήν διχοτόμον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀγομένην ἐκ τῆς κορυφῆς Α.
(i) Ὑποθέτομεν γνωστά τα Α καί Δ καί τόν λόγο $\frac{AB+A\Gamma}{B\Gamma}$. Εὕρετε τούς λόγους $\frac{BA}{B\Delta}$ καί $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}$. Ἀποφανθῆτε ἐκ τούτου τήν θέσιν τῶν Β καί Γ.
(ii) Δ: ἐκ τῶν ΑΔ, ΒΓ καί $AB+A\Gamma=\lambda$.

14. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καί ἐκτός αὐτῆς δύο σημεῖα Α καί Β. Σταθερόν τμῆμα $\Gamma\Delta=\lambda$ ὀλισθαίνει ἐπί τῆς (ε). Νά καθορισθῇ ἡ θέσις τοῦ ΓΔ ἐπί τῆς (ε) ὥστε νά εἶναι: $\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ [ὀρθογωνίων: τριγώνων.]

$\triangle$:
1) $\beta,\ \alpha-\gamma=\lambda$
2) $\beta,\ \rho$
3) $\sphericalangle B,\ \rho$
4) $\alpha,\ B-\Gamma=\omega_0$
5) $\upsilon_\alpha,\ \mu_\alpha$
6) $\sphericalangle B,\ \alpha-\gamma=\lambda$
7) $\alpha,\ \beta-\gamma=\lambda$
8) $\sphericalangle B,\ \alpha+\gamma=\lambda$
9) $\alpha,\ \upsilon_\alpha$
10) $\alpha,\ \mu_\beta$
11) $\rho,\ R$
12) $\rho,\ \beta+\gamma=\lambda$ $\left\{\begin{array}{l}\beta+\gamma=\lambda\\ \beta^2+\gamma^2=\alpha^2\\ \beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\rho\end{array}\right\}$ $(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma=\alpha^2$, $\lambda^2-(\alpha+\lambda)\rho=\alpha^2 \to \alpha$
13) $\upsilon_\alpha,\ \rho$

1. $\triangle$: $\alpha,\ \beta+\gamma=\lambda$
2. $\triangle$: $\beta,\ \alpha-\gamma=\mu$
3. $\triangle$: $\beta-\gamma=\lambda,\ \rho$

Λύσ. ΙΟ σταθερά γνωστῶν ὀρθ. τριγώνων μέ ρ, $\frac{\alpha}{2}$.
$IO^2=R(R-2\rho) \to \rho$ γνωστή
ἄρα $\triangle_{;} = \triangle(\alpha,\rho)$ γνωστή/κατασκ.

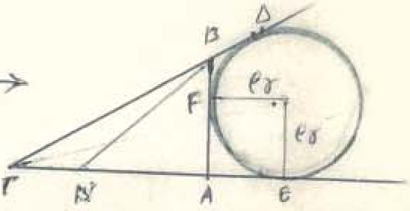
4.  : $\sphericalangle A,\ \upsilon_\alpha-\alpha=\lambda$

ΑΕΓ → κατασκευάσιμον ((ΑΕ=λ), ΕΑΓ = $\frac{A}{2}$, ΑΕΓ = ...
... ΕΔΓ ...

14) — Ἐγγράψατε εἰς κύκλον ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραί νά διέρχωνται διά δύο δεδομένων σημείων P καί Q. —

Στογ. σ. 56 15) — Νά κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τοῦ λόγου τῶν καθέτων πλευρῶν καί τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων τῶν εἰς τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν. ἐνῶ ΑΔ ὕψος τοῦ τριγώνου —

16. $\mu_\beta,\ \mu_\gamma$ ⟶

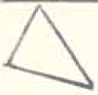


17. $\beta-\gamma=\lambda$ καί ρ_γ.
18. $H_\alpha,\ D_\alpha,\ M_\alpha$.
19. α, ΒΔ {Δ → σημ. διχοτόμου ΓΔ}
{φέρω **ΕΒ** ⊥ ΒΓ ὅτι ΔΒΕ ἰσοσκελές}

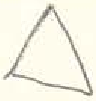
$$\Gamma B=\Gamma\Delta-BF=(\Gamma E+\rho_\gamma)-(BF+\rho_\gamma)$$
$$=(\Gamma A+2\rho_\gamma)-(BA)=$$
$$=(\Gamma A-BA)+2\rho_\gamma=\lambda+2\rho_\gamma$$

Συνεπῶς ΓΒ γνωστή καί $\Gamma B'B=135^\circ$ κτλ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΥΧΟΝΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ



1) (I, ρ), $(I_\alpha \rho_\alpha)$
2) $(I_\alpha \rho_\alpha)$ $(I_\gamma \rho_\gamma)$
3) α, μ_β μ_γ
4) α, μ_α, μ_β
5) β, γ, μ_α
6)* α, υ_α, μ_β
7) α, μ_α, υ_β
8) $\measuredangle B, \Gamma$, ρ
9) $\measuredangle A$, α, ρ
10)* υ_α, δ_α μ_α
11) $\measuredangle B, \Gamma$ $\beta+\gamma=\lambda$
12) $\measuredangle B, \Gamma$, 2τ
13) $\measuredangle B, \Gamma$, R
14)* μ_α μ_β, μ_γ
(πετ II) ση 136 → 15)* α, $\measuredangle A$, $\beta+\gamma=\lambda$
16) α, $\measuredangle A$, $\beta-\gamma=\lambda$
17) $\measuredangle A$, $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\kappa}{\nu}$, δ_α.
18) α, υ_α, $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\kappa}{\nu}$
19) υ_α, μ_α, $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\kappa}{\nu}$
20) β, γ, δ_α.
21) α, $\measuredangle A$, $\beta\gamma=k^2$
22) υ_α, υ_β, υ_γ.
23) $\measuredangle A$, δ_α, 2τ {Φέρομεν ἐφαπτ. ἐκ τῆς κορυφῆς οἱ ἀν (Iα ρα) γνωστὰ ἀφοῦ γνωστὸν τὸ τ.}
24)* ρ, ρ_α δ_α. $\left\{ \frac{\tau-\alpha}{\tau}=\frac{\rho}{\rho_\alpha} \rightarrow \upsilon_\alpha=\frac{2\rho\rho_\alpha}{\rho_\alpha-\rho} \text{ γνω} \right\}$
25) ρ, ρ_α, $\beta-\gamma=\lambda$
26) α, ρ, $\beta+\gamma=\lambda$
27) α, ρ $\beta-\gamma=\lambda$
28) υ_α, ρ, $\alpha+\beta+\gamma$ (γνωρίζομεν τὸ α)
29) α, ρ_β ρ_γ.
30) ρ_α, ρ_β, $\alpha+\beta=\lambda$.
31) α, $\beta+\gamma=\lambda$, δ_α
32)* α, A, $\beta+n\gamma=\lambda$

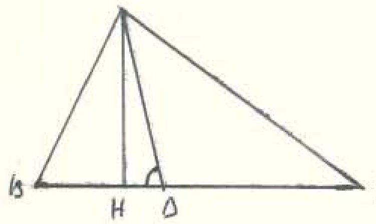


1) A, M_α, O {ΣΗΜΕΙΑ}
2) A, M_α, H
3) B, Γ, H.
4) B, Γ, I
5) B, Γ, I_α
6) B, Γ, I_β
7) H, I H_α ;
8) H_α, H, O
9) H_α, H_β, H_γ
10) M_α, M_β, M_γ
11) A, H, I
12) I, O, I_α
13) I, I_α, I_β
14) I_α, I_β, O
15) B, O, O_α
16) Z, O, A' → (μέσον τῆς ΒΓ)

17)* Δ : α, H_α, $\beta-\gamma=\lambda$

Πού παρουσιάζεται η διαφορά |Β−Γ| των γωνιών ενός τριγώνου.

1\.

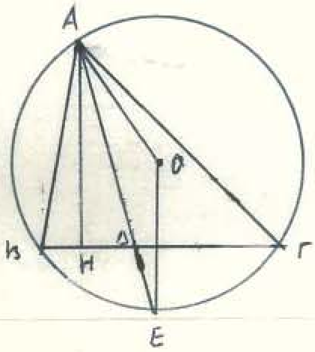


Μεταξύ ύψους και εσωτερικού διχοτόμου

$H\hat{A}\Delta = 1^L - \Delta = 1^L - \left(\frac{A}{2}+\Gamma\right) = \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}-\frac{A}{2}-\Gamma$

$H\hat{A}\Delta = \frac{B-\Gamma}{2}$.

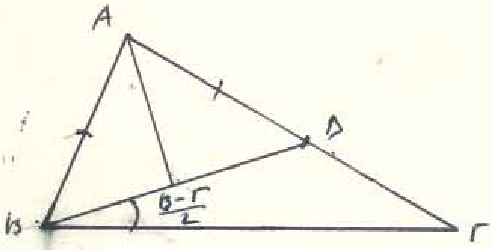
2\.



Μεταξύ διχοτόμου και διαμέτρου ΑΟ του περιγεγραμμένου κύκλου.

Πράγματι $H\hat{A}E = A\hat{E}O = E\hat{A}O$. (Διότι $AH \perp B\Gamma$, $OE \perp B\Gamma$ και $OE = OA$.)

3\.

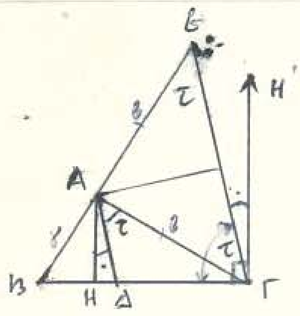


Μεταξύ της βάσεως ΒΓ και της ΒΔ ενός Δ σημείου της ΑΓ τοιούτου ώστε ΑΒ = ΑΔ.

$\Gamma\hat{B}\Delta = 2^L - \Gamma - \Delta = 2^L - \Gamma - \left(1^L + \frac{A}{2}\right) = 1^L - \Gamma - \frac{A}{2}$

$= \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2} - \Gamma - \frac{A}{2} = \frac{B-\Gamma}{2}$

4\.



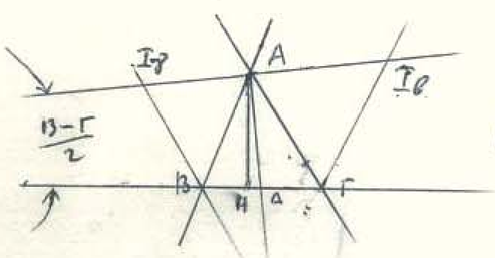
Μεταξύ της βάσεως ΒΓ και της ΓΕ όπου Ε σημείον της προεκτάσεως της ΒΑ ώστε ΑΕ = ΑΒ.

Φέρω $\Gamma H' \perp B\Gamma$ τότε:

$H\hat{A}\Delta = E\hat{\Gamma}H' = 1^L - B\hat{\Gamma}E$ ή $\frac{B-\Gamma}{2} = 1^L - B\hat{\Gamma}E$

ή $B\hat{\Gamma}E = 1^L - \frac{B-\Gamma}{2}$

5\.

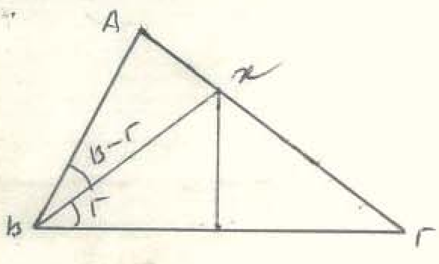


Μεταξύ της ΒΓ και της $I_\gamma I_\beta$

πράγματι $\widehat{I_\beta I_\gamma, B\Gamma} = HA\Delta = \frac{B-\Gamma}{2}$

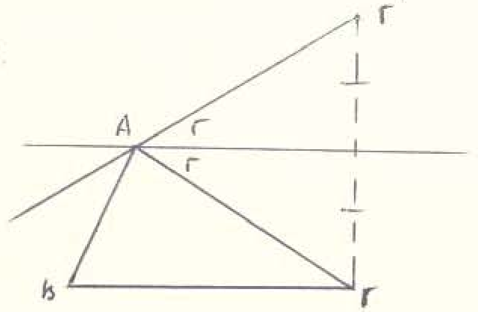
(έχουν τας πλευράς ανά μίαν καθέτους)

6\.



Μεταξύ της ΑΒ και της Βx όπου $\Gamma\hat{B}x = \Gamma$.

7.

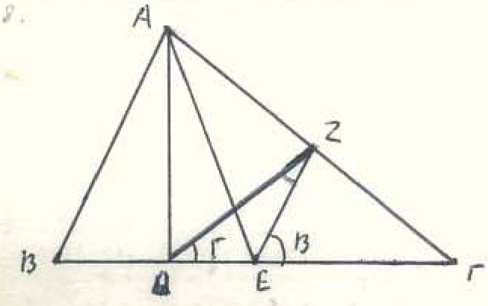


Αν Γ' το συμμετρικόν του Γ ως προς την $Ax \parallel B\Gamma$ τότε $\widehat{\Gamma' A B} = 2∟ - (B-\Gamma)$

πράγματι: $\Gamma' A B = A + 2\Gamma = A + B + \Gamma + \Gamma - B$

$= 2∟ - (B - \Gamma)$

8.

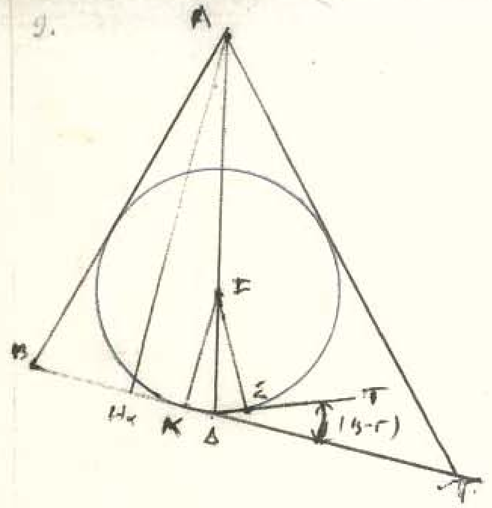


Αν ΑΔ το ύψος, ΑΕ διάμεσος και Ζ το μέσον της ΑΓ τότε $\widehat{\Delta Z E} = B - \Gamma$

πράγματι $\widehat{ZE\Gamma} = B$, $Z\Delta\Gamma = \Gamma \rightsquigarrow B = \Gamma + Z$

και $\widehat{\Delta Z E} = B - \Gamma$.

9.



Αν ΔΤ η εφαπτομένη εκ του Δ εις τον (Ι,ρ) δείξατε $\Gamma\Delta T = |B - \Gamma|$.

Απόδειξη.

$\widehat{\Gamma\Delta T} = \Sigma I K = 2\widehat{KI\Delta} = 2 \widehat{H_\alpha A \Delta} = 2\left|\frac{B-\Gamma}{2}\right|$

$= |B - \Gamma|$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ἐκ τῆς διαφορᾶς $Β-Γ=ω_0$ & ἄλλων στοιχείων

1. Δ: $α$, $β+γ=λ$ καί $Β-Γ=ω_0$
2. Δ: $α$, $Β-Γ=ω_0$ καί μιᾶς εὐθείας ἐφ' ἧς ἡ κορυφή Α.
(Λάβετε τὸ συμμ. τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν κυ ... ὅτι Β'ΑΓ ... .)
3. Δ: $α$, $υ_α$ καί $Β-Γ=ω_0$. (ὡς ἀνωτέρω)
4. Δ: $α$, $β-γ=λ$ καί $Β-Γ=ω_0$
5. Δ: $γ$, $δ_α$ καί $Β-Γ=ω_0$.
6. Δ: $υ_α$, R καί $Β-Γ=ω_0$.
7. Δ: $β$, $γ$ καί $Β-Γ=ω_0$ ([illegible])
8. Δ: $β-γ=δ_0$, $ρ$ καί $Β-Γ=ω_0$ (Λαμβάνω $ΑΔ=ΑΒ$ ὅτε $ΔΓ=δ_0$. ΒΙΔΓ ἐγγρ. τόπος τοῦ Ι τόξον $Δ\hat{Ι}Γ=ω_0/2$ ἐπὶ τῆς $δ_0$. καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ εἰς ἀπόστασιν $ρ$.)
9. Δ: $δ_α$, $\frac{β+γ}{α}=λ$ καί $Β-Γ=ω_0$.
10. Δ: $ρ_β$, $ρ_γ$ καί $Β-Γ=ω_0$
11. Δ: $α$, $μ_α$, $Β-Γ=0$ ($ΑΔ.ΔΜ=ΒΔ^2=\frac{α^2}{4} \Rightarrow ΔΜ=\frac{α^2}{4μ_α}$. Ἂν $ΑΕ \parallel ΒΓ$ (Ε ἐπὶ τῆς Ο,R) τότε $Α\hat{Ο}Η=ΑΜΕ=ΑΒΕ=ω_0$ ἢ $ΑΟΔ=180°-ω_0$ ἔπεται ἡ κατασκευή —)
12. Δ: $μ_α$, $βγ=λ^2$ καί $Β-Γ=ω_0$ (Φέρω $ΑΔ \perp ΒΓ$, Ε μέσον τῆς ΑΓ τότε $ΔΕ=\frac{β}{2}$ καί $ΜΕ=\frac{γ}{2}$, $ΔΕΜ=Β-Γ=ω_0$.
Ἐπειδή ΔΜΕ = σταθ. ἆρα $ΔΕ.ΔΜ=\frac{βγ}{4}=\frac{λ^2}{4}$ καί ΑΔΜ = σταθ. ΑΔΜ κατασκευάζεται, τότε ὅρι... καί τὸ Ε ἐπὶ τόξου δεχ. γωνίαν $ω_0$ καί ἐπὶ παραλλήλου ἀπεχούσης ἀπὸ τῆς ΒΓ $υ_α/2$.
Ὁρισθέντος τοῦ Ε κατασκευάζεται εὐκόλως τὸ ΑΒΓ)
13. Δ: $δ_α$, $\frac{β}{γ}=\frac{μ}{ν}$, $Β-Γ=ω_0$
14. Δ: $α$, $Β-Γ=ω_0$ καί $βγ=k^2$.
15. Δ: $υ_α$, $ρ$, $Β-Γ=ω_0$
16. Δ: $α$, $δ_α$, $Β-Γ=ω_0$
17. Δ: R, $ρ$, $Β-Γ=ω_0$
18. Δ: $υ_α$, $ΒΔ-ΔΓ=λ$ (ΑΔ ὕψος) καί $Β-Γ=ω_0$.
19. Δ: R, $β+γ=λ$, $Β-Γ=ω_0$. (Φέρω $ΑΑ' \parallel ΒΓ$ (Α' ἐπὶ τῆς Ο,R) τότε $ΑΓΑ'=ω_0$ ΑΑ' σταθερά. τόπος τοῦ Δ; ὁ (Α, β+γ=λ) καί τὸ κυκλικὸν τόξον ΑΑ' γωνίας ω/2. ἡ ΑΔ ὁρίζει τὸ Γ. εἶτα φέρω $ΓΒ \parallel Α'Α$ ὅτε καθορίζω τὸ Β. —)

ΕΜΒΑΔΑ

<u>Αἱ ἐπιφάνειαι</u> εἶναι μεγέθη ἀριθμήσιμα. Καλοῦμεν ἐμβαδὸν πολυγώνου τὸν ἀριθμὸν τοῦ μετρᾷ τὴν ἐπιφάνειάν του.

ΕΜΒΑΔΟΝ

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ. $E = \alpha\beta$.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ $E = \alpha^2$

ΤΡΙΓΩΝΟΥ $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$.

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

$E = \tau\rho = (\tau-\alpha)\rho_\alpha = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma$

$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\,\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$

$E = \frac{\alpha^2\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu A}$.

Ἂν $A = A'$ ἢ $A + A' = 2∟$ $\frac{E}{E'} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$ $(\eta\mu A = \eta\mu A')$

<u>ΙΣΟΠΛΕΥΡΟΥ</u>. $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

ΤΡΙΓ. $\measuredangle A = 60°$ $E = \frac{\beta\gamma\sqrt{3}}{4}$

ΤΡΙΓ. $\measuredangle = 30°$ $E = \frac{\beta\gamma}{4}$

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜ. $E = \beta\upsilon$ ἢ $\alpha\beta\,\eta\mu A$.

ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ $E = \frac{B+\beta}{2}\cdot\upsilon = \delta\cdot\upsilon = \lambda d$.

δ = διάμεσος λ ἡ ἑτέρα και d ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπὸ τῆς λ.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ (γεν. περ. τ.) $E = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2\,\eta\mu\omega$.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ με $\delta_1 \perp \delta_2$ $E = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2$

ΡΟΜΒΟΥ $E = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2$

ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓ. $E = \frac{1}{2}$ περίμετρος $\times$ ἀπόστημα.

– Δξ ὅτι 1° $\tau\alpha = \rho_\alpha(\rho_\beta + \rho_\gamma)$ 2° $\tau^2 = \rho_\beta\rho_\gamma + \rho_\gamma\rho_\alpha + \rho_\alpha\rho_\beta$

3° $S^2 = \rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$ 4° $\frac{2}{\upsilon_\alpha} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma}$

5° $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma}$ 6° $\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} - \frac{1}{\upsilon_\alpha}$

7° $\frac{\alpha}{\rho_\alpha(\rho_\beta+\rho_\gamma)} = \frac{\beta}{\rho_\beta(\rho_\gamma+\rho_\alpha)} = \frac{\gamma}{\rho_\gamma(\rho_\alpha+\rho_\beta)}$

Ἐμβαδὸν κύκλου. Εἶναι τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του ἀπεριορίστως αὐξάνει. $E_\epsilon < E < E_{\epsilon'}$.

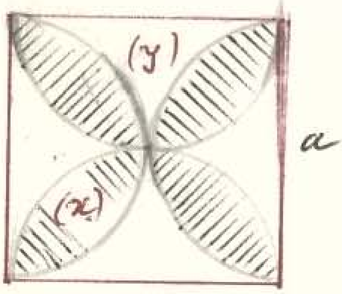
$E = \frac{1}{2}$ περίμετρο × ἀπόστημα $= \frac{1}{2}\cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2 = \pi D^2/4$

ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ. $E = \pi(R^2 - \rho^2) = 2\pi\rho^* \cdot \varepsilon \quad (\rho^* = \frac{R+\rho}{2},\ \varepsilon = R-\rho)$

ΚΥΚ. ΤΟΜΕΩΣ. $E_\Delta = \pi R^2 \frac{\mu^\circ}{360}$

ΚΥΚ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ. $E_\beta =$ τομεὺς − τρίγωνον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

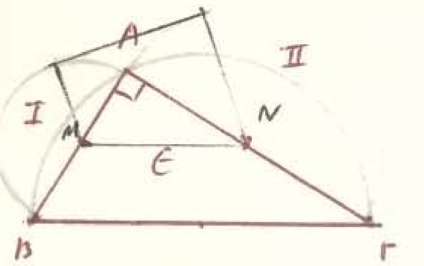


$4x + 4y = \alpha^2$ (ἐμβ. τετραγώνου)

$2x + y = \frac{\pi\alpha^2}{8}$ (ἐμβ. ἡμικυκλίου)

ἀπαλείφοντες τὸν y εὑρίσκομεν

$E_{\text{τετραφύλλου}} = 4x = \alpha^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$



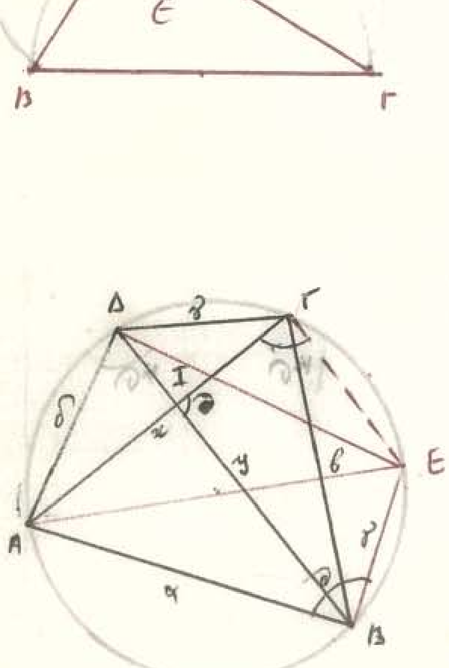
−Δε ὅτι $E_{ΑΒΓ} = (I) + (II)$

$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$

$\frac{(ΒΓ)^2}{8} = \frac{(ΑΒ)^2}{8} + \frac{(ΑΓ)^2}{8}$

$(ΑΒΓ) + (Μ) + (Ν) = (I) + (Μ) + (II) + (Ν)$

$\rightarrow (ΑΒΓ) = (I) + (II)$



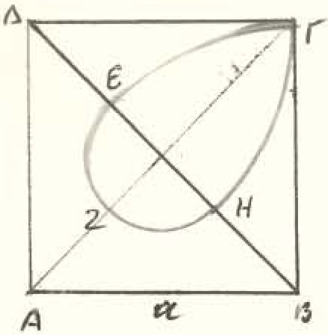
ΓΕ ∥ ΒΔ

−Δε ὅτι 1) ἐμβ.(ΑΒΓΔ) = ἐμβ(ΑΒΕ) + ἐμβ(ΑΔΕ) καὶ $xy = \alpha\gamma + \beta\delta$

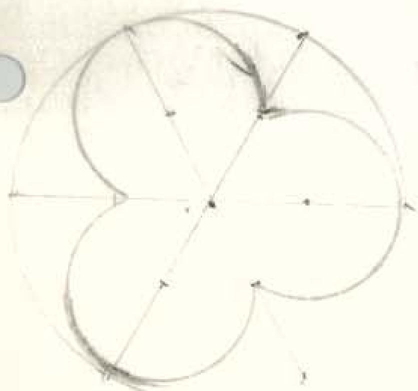
2) $(ΑΒΓ) + (ΑΔΓ) = (ΒΑΔ) + (ΒΓΔ)$ καὶ $\frac{x}{y} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$

3.) Ὑπολογίσατε τὰ x καὶ y.

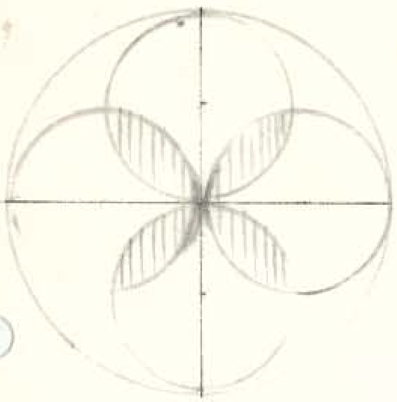
ΕΜΒΑΔΑ



Εμβαδόν (ΓΕΖΗ) = ;

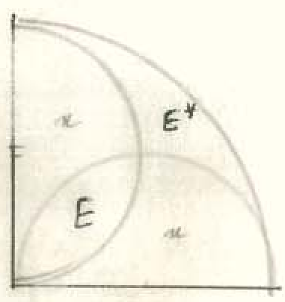


- Δ.ξ. ότι : $E_{τριφύλλου} = \frac{R^2}{8}(4\pi + 3\sqrt{3})$



- Δ.ξ. ότι $E_{4φύλλου} = \frac{R^2}{2}(\pi - 2)$

- Δ.ξ. ότι $E = E^* = ;$

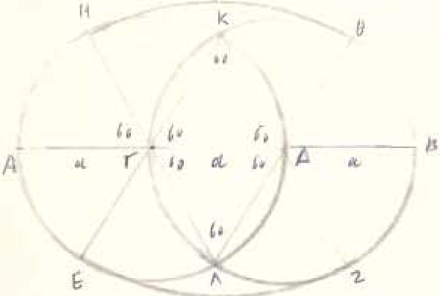


$x + E = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \to 2$

$2x + E + E^* = \frac{1}{4}\pi R^2$

$\left.\begin{aligned} 2x + 2E &= \pi \frac{R^2}{4} \\ 2x + E + E^* &= \frac{\pi R^2}{4} \end{aligned}\right\} \quad 2x + 2E = 2x + E + E^*$

$\rightsquigarrow E = E^*$.



Ἐμβαδὸν ὠοειδοῦς ἐπιφανείας;

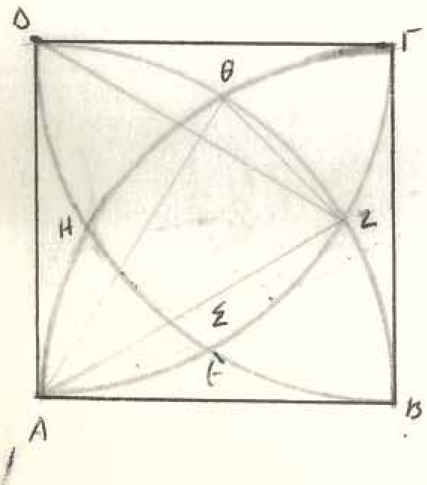
E_π = (κυκλ. τομή ΓΗΑΕ) + (κ.τ. ΔΘΒΖ) + (κ.τ. ΛΗΘ − ρόμβος ΚΓΛΔ) + (κ.τ. ΚΕΖ)

$$= \pi\alpha^2\frac{120^\circ}{360} + \pi\alpha^2\frac{120^\circ}{360} + \pi(2\alpha)^2\frac{60}{360} - 2\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \pi\cdot(2\alpha)^2\frac{60}{360} = \alpha^2\left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Περίμετρος. S = τόξ $\overset{\frown}{EAH}$ + τόξ $\overset{\frown}{\Theta BZ}$ + τόξ $\overset{\frown}{H\Theta}$ + τόξ $\overset{\frown}{EZ}$ =

$$2(\text{τόξ } EAH + \text{τόξ } H\Theta) = 2\left(2\pi\alpha\frac{120^\circ}{360} + 2\pi(2\alpha)\frac{60}{360}\right)$$

$$= \frac{8\pi\alpha}{3}.$$



Εμβ. καμπυλογράμμου 4γώνου.

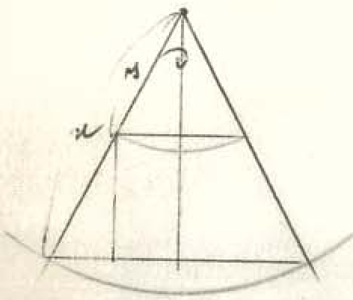
$$E = \text{τετραγώνου} - 4(ABZEA)$$

$$= \text{τετραγώνου} - 4\left[\text{τομεύς }(ABZ) - \Sigma\right]$$

$$= \alpha^2 - 4\left[\pi\alpha^2\frac{30^\circ}{360^\circ} - \left\{\pi\alpha^2\frac{60}{360} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\right\}\right]$$

$$= \alpha^2\left[\frac{\pi + 3(1-\sqrt{3})}{3}\right]$$

ABAT-ZOUR



Ἐπιθυμοῦμεν νά κατασκευάσωμεν ἕνα abat-jour σχήματος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς μέ διαμέτρους ἀνοιγμάτων 32 cm καί 8 cm. καί ὕψος 9 cm. Προσδιορίσατε τάς διαστάσεις τοῦ ἀναπτύγματος — γωνία ἀνοίγματος καί ἀκτῖνας.—

Λύσις. $32\pi = \dfrac{\pi x\theta}{180}$ (1)

$8\pi = \dfrac{\pi y\theta}{180}$ (2)

$(x-y)^2 = 9^2 + 12^2$ (3) $\langle 12 = 16-4 \rangle$

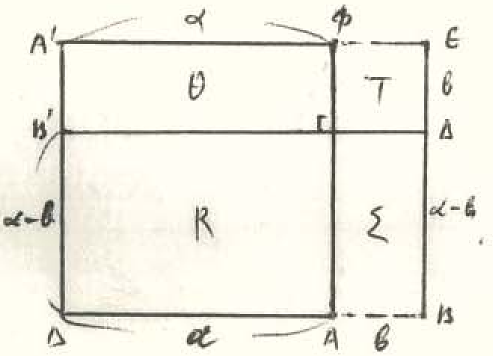
$\rightarrow \theta^\circ = 288^\circ$ καί $x = 20$ cm, $y = 5$ cm.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ τῶν ΣΧΗΜΑΤΩΝ

– Δξ ότι (i) $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

(ii) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha\beta$

(iii) $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$



$R+\Sigma = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ (1)

ἀλλά ΑΒΕΦ ≃ Β'ΓΦΑ' →

$\Sigma+T = \Theta$ ἤ οὖ $\Sigma = \Theta - T$

καί ἡ (1) δίδει

$R+\Sigma = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = R+\Theta-T$

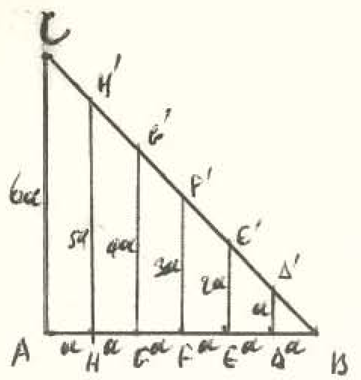
ἀλλά $R+\Theta = \alpha^2$ καί $T = \beta^2$

συνεπῶς $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

– Δξ ότι $1+3+5+\dots\nu = \nu^2$ ν περιττός ἀριθμός.

→ Ἔστω ὅτι διαιρ. τήν ΑΒ εἰς 6 μέρη π.χ.

$(AB\Gamma) = \frac{6\alpha \cdot 6\alpha}{2} = \frac{6^2\alpha^2}{2}$



$B\Delta\Delta' = \frac{\alpha\cdot\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$

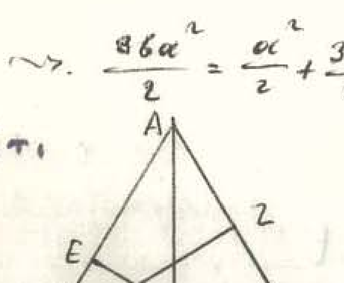
$(\Delta E E'\Delta') = \quad = \frac{3\alpha^2}{2}$

$(EZZ'E') = \quad = \frac{5\alpha^2}{2}$

$HA\Gamma H' = \quad = \frac{11\alpha^2}{2}$

→ $\frac{36\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}+\frac{3\alpha^2}{2}+\frac{5\alpha^2}{2}+\frac{7\alpha^2}{2}+\frac{9\alpha^2}{2}+\frac{11\alpha^2}{2}$ ἤ $6^2 = 1+3+5+7+9+11$

– Δξ ότι $(M\Delta)+(ME) = BZ$.



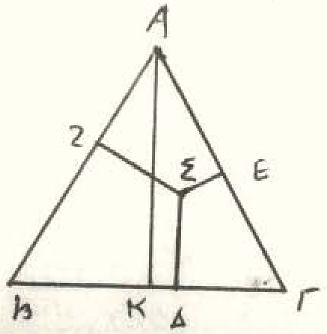
Ἄν ΑΔ=δ διχοτόμος τῆς $A=1^L$ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ

Δξ ὅτι $\frac{\sqrt{2}}{\delta_\alpha} = \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$.

ἀπόδειξις. $\frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\beta\delta\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\gamma\delta\frac{\sqrt{2}}{2}$.

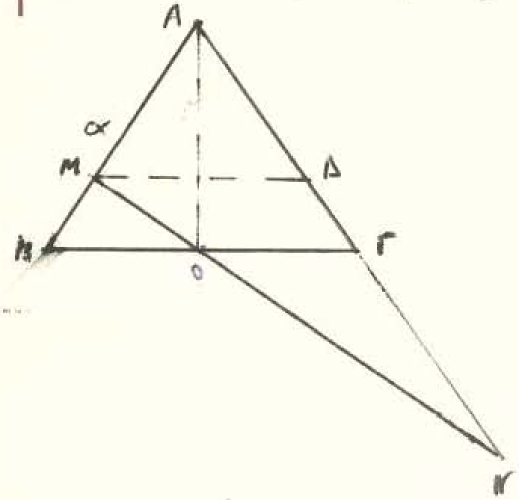
Αν ύψη AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται εις H
Δ.ε. ότι $\frac{HA'}{AA'} = \frac{HB'}{BB'} = \frac{H\Gamma'}{\Gamma\Gamma'} = 1$.

Δ.ε. ότι $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ (γεωμετρικώς.)



Δ.ε. ότι $(\Sigma\Delta)+(\Sigma E)+(\Sigma Z) = \upsilon_\alpha$.

Δίδεται ισοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν διά του μέσου Ο της ΒΓ μίαν ευθείαν, η οποία τέμνει εις Μ την ΑΒ και εις Ν την προέκτασιν της ΑΓ. Ζητείται ώστε να είναι:
$(OMB)+(ON\Gamma) = (AB\Gamma)$.



Έχομεν $(OMB)+(ON\Gamma) = 2$ τριγ(OAB) (1)

τριγ. $(OMB) = \frac{h}{2}(AB)$
τριγ. $(ON\Gamma) = \frac{h}{2}(N\Gamma)$
τριγ. $(OAB) = \frac{h}{2}(AB)$

Υποθέτοντες $AB = \alpha$ και $AM = x$
ότι $MB = \alpha - x$. Ευρίσκομεν την $N\Gamma$.

$\frac{N\Gamma}{N\Delta} = \frac{O\Gamma}{M\Delta}$ ή $\frac{N\Gamma}{N\Gamma+\Gamma\Delta} = \frac{O\Gamma}{M\Delta}$ ή ...

$\frac{u}{u+\alpha-x} = \frac{\alpha}{2x} \rightarrow u = N\Gamma = \frac{\alpha(\alpha-x)}{2x-\alpha}$

η (1) τότε γίνεται $\alpha - x + \frac{\alpha(\alpha-x)}{2x-\alpha} = 2\alpha$

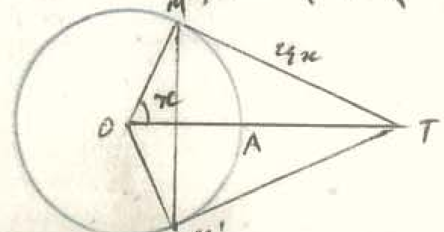
ή $f(x) = x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$ (3)

δεκτή η θετική ρίζα $= \frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2}$

περιλαμβανομένη μεταξύ $\frac{\alpha}{2}$ και α

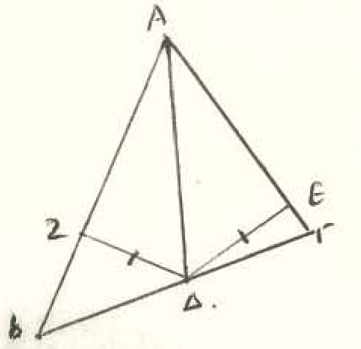
διότι $f(\frac{\alpha}{2}) < 0$ και $f(\alpha) > 0$.

Δ.ε. ότι ημ$x < x <$ εφx εάν x είναι το μέτρον της επίκεντρου γωνίας θετικής μικροτέρας της μιας ορθής.



Υπόδειξη. τριγ.$(OM'M)$ < τομεύς $(OM'AM)$ < τρ.(MTM')

Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α. Δείξτε ότι, συγκρίνοντας τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ ότι η ΑΔ διαιρεί την ΒΓ σε δύο τμήματα ανάλογα προς τις προσκείμενες πλευρές.—



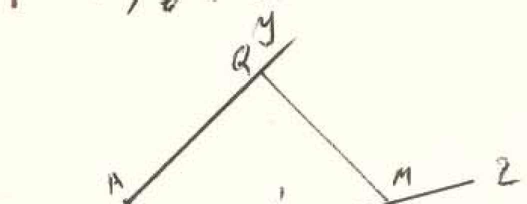
Πράγματι $\frac{(ΑΓΔ)}{(ΑΔΒ)} = \frac{ΔΓ}{ΒΔ}$

$\frac{(ΑΓΔ)}{(ΑΔΒ)} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$

$\leadsto$. $\frac{ΔΓ}{ΔΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$ ή $\frac{ΔΓ}{ΑΓ} = \frac{ΔΒ}{ΑΒ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ+ΑΓ}$

$\leadsto$. $ΔΓ = \frac{αβ}{β+γ}$, $ΔΒ = \frac{αγ}{β+γ}$.

Δίδεται γωνία xOy, λαμβάνομεν επί της Ox, OB = β επί της Oy, OA = α. Εύρετε τον τόπον των σημείων Μ εσωτερικού της γωνίας ώστε ο λόγος των αποστάσεών του από τις πλευράς Ox και Oy να είναι α/β.—



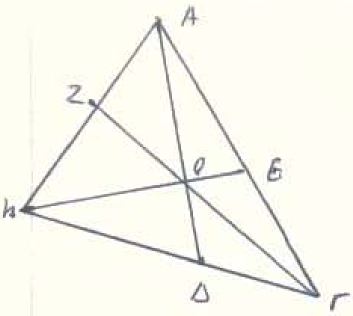
Έχομεν $\frac{(OBM)}{(OAM)} = \frac{\frac{1}{2} β\cdot(MP)}{\frac{1}{2} α\cdot(MQ)} = \frac{β(MP)}{α(MQ)}$

Ίνα $\frac{MP}{MQ} = \frac{α}{β}$ δέον το β' μέλος να ισούται με 1 ή (OBM) = (OAM) αν φέρωμεν OM η οποία βαίνει σε φέρωμεν τις ΑΑ', ΒΒ' ⊥ OM θα είναι ΑΑ' = ΒΒ' ή ΙΑ = ΙΒ κατά συνέπεια λοιπόν είναι ν σημειώ η OZ περνάει το O και το μέσον της ΑΒ το Ι.—

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Σημείο Ο εις το εσωτερικόν του και τρία σημεία Α'Β'Γ' τέμνοντα αντιστοίχως επί των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Αν ΑΑ'', ΒΒ'' ΓΓ'' είναι παράλληλοι προς τις ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' συναντούμενα της πλευράς δείξτε ότι

$$\frac{OA'}{AA''} + \frac{OB'}{BB''} + \frac{OΓ'}{ΓΓ''} = 1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ τοῦ VAN AUBEL.



Δ.ξ. ὅτι $\frac{AO}{O\Delta}=\frac{AZ}{ZB}+\frac{AE}{E\Gamma}$

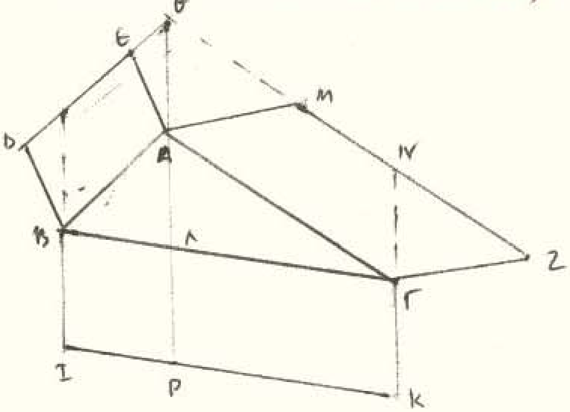
Ἔχομεν $\frac{AO}{O\Delta}=\frac{AOB}{BO\Delta}=\frac{AO\Gamma}{\Gamma O\Delta}=\frac{AOB+AOB}{BO\Gamma}$

$\frac{AZ}{ZB}+\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{AO\Gamma}{BO\Gamma}+\frac{AOB}{BO\Gamma}=\frac{AO\Gamma+AOB}{BO\Gamma}$

$\Rightarrow \frac{AO}{O\Delta}=\frac{AZ}{ZB}+\frac{AE}{E\Gamma}$.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ AΓ τριγώνου ABΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ παραλληλόγραμμα ABΔE, AΓZH. Ἔστω Θ = ΔE∩ZH. Φέρομεν BI ∥ καὶ κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμο BIKΓ. Δ.ό.:

$(AB\Delta E)+(A\Gamma ZH)=(BIK\Gamma)$.



Εἶναι ABΔE ≃ ABMΘ (1)

ABMΘ ≃ BIPΛ (2)

(1),(2) → ABΔE = BIPΛ (3)

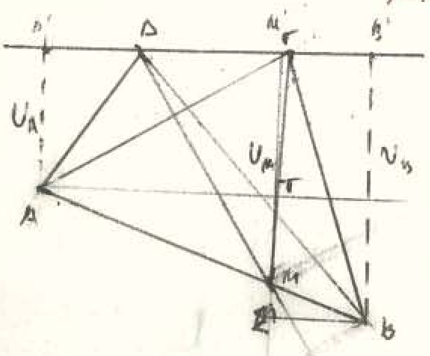
ὁμοίως AΓZH = ΓKΛP (4)

Ἀπὸ (3),(4) ἔχομεν

ABΔE + AΓZH = BIKΓ.

Δίδεται τραπέζιον ABΓΔ καὶ σημεῖον M τῆς πλευρᾶς AB τ.ω. $\frac{AM}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$

Δ.ό. $(\Delta M\Gamma)=\frac{\mu(\Delta B\Gamma)+\nu(\Delta A\Gamma)}{\mu+\nu}$.



Φέρω AA', MM', BB' ⊥ ΓΔ καὶ ἔστω AA' = $υ_A$, MM' = $υ_M$, BB' = $υ_B$.

Ἔχω $\overset{\triangle}{ATM}$ ὅμ. $\overset{\triangle}{B\Sigma M}$ $\Rightarrow$

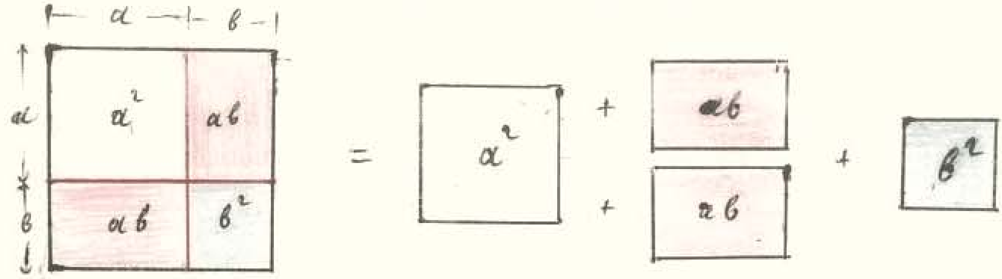
$\frac{\mu}{\nu}=\frac{υ_M-υ_A}{υ_B-υ_M} \Rightarrow \mu(υ_B-υ_M)=\nu(υ_M-υ_A)$

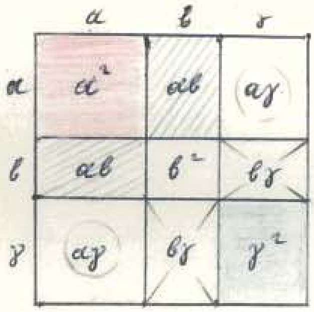
$\Rightarrow \mu υ_B+\nu υ_A=(\mu+\nu)υ_M \rightarrow \frac{1}{2}(\Gamma\Delta)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu(\Gamma\Delta)υ_B+\frac{1}{2}\nu(\Gamma\Delta)υ_A=\frac{1}{2}(\mu+\nu)\Gamma\Delta\, υ_M$;

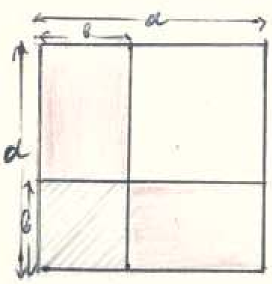
$\mu(\Delta B\Gamma)+\nu(\Delta A\Gamma)=(\mu+\nu)\Delta M\Gamma$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΕΝΙΩΝ ΑΛΓ. ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ.

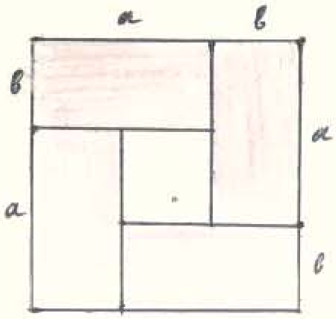




$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha\beta.$$



$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

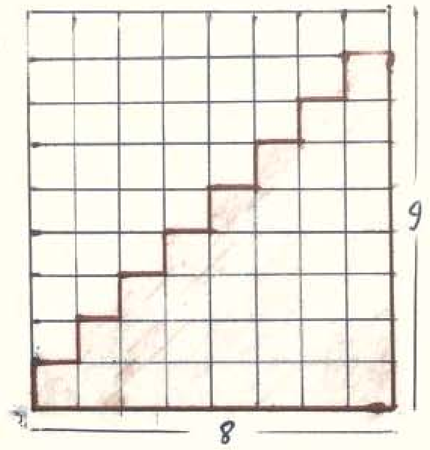


$$(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$$

Πρὸς ἐπαλήθευσιν μετρήσατε τὰ πάνω σχήματα.

$$(\alpha+\beta)^2-\beta^2 = \alpha^2+2\alpha\beta$$

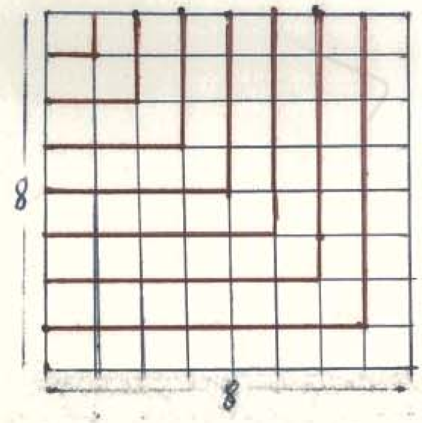
$$\alpha^2-(\alpha-\beta)^2 = 2\alpha\beta-\beta^2$$



$$1+2+3+4+5+6+7+8 = \frac{8.(9)}{2}$$

pěkný!

$$1+2+3+ \cdot \qquad +\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$



$$1+3+5+7+9+11+13+15 = 8^2$$

ani pěkný

$$1+3+5+ \ldots +(2\nu-1)^2 = \nu^2$$

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΟΔΗΓΙΑΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

1 Εάν εις τρίγωνον δίδεται **διάμεσος**

α) προεκτείνομεν την διάμεσον κατ' ίσον τμήμα

β) χρησιμοποιούμεν τα θεωρ. των διαμέσων

γ) χρησιμοποιούμεν την ισότητα ότι $ΑΜΒ \cong ΑΜΓ$.

2 Εάν δίδεται **διχοτόμος**

α) χρησιμοποιούμεν το θ. των διχοτόμων

β) η διχοτόμος διέρχεται δια του μέσου του τόξου ΒΓ.

3 Εάν δίδεται το **ύψος**.

α) Το συμμετρ. του Η κείται επί της περιγ. περιφερείας

β) χρησιμοποιούμεν τους τύπους $αυ_α = 2E$ ή $βγ = 2Rυ_α$

4 Εάν δίδεται:

1) το $β+γ$ προεκτείνομεν την $β$ κατά $γ$.

2) το $β-γ$ επί του $β$ λαμβάνομεν τμήμα $γ$.

3) το $β^2+γ^2$. Εφαρμόζομεν το α΄ θ. διαμέσων

4) το $β^2-γ^2$ " " β΄ " "

5) το $\frac{β}{γ}$ θεωρούμεν την Απολλ. περιφέρειαν

6) το $βγ$ χρησιμοποιούμεν το $βγ = 2Rυ_α$ ή $βγ = δ^2+κμ$.

5 Εάν δίδεται η ακτίς ρ του εγγ. κύκλου

α) Χρησιμοποιούμεν τον τύπον $ρ = \frac{E}{τ}$

β) Χρησιμοποιούμεν την ισότητα $ΑΔ = τ - α$ κ.λ.π.

6 Εάν δίδεται η διαφορά $Β - Γ = ω$

Χρησιμοποιούμεν τας σχέσεις.

1) $\widehat{υ_α δ_α} = \frac{Β-Γ}{2}$ 2) $\widehat{υ_α 2K} = Β-Γ$

3) $ΓΑ'Β = 180 - (Β-Γ)$ ένθα Γ' το συμμετρ. του Γ ως προς την $Αx \parallel ΒΓ$.

4) $\widehat{ΔΖΕ} = Β-Γ$ ένθα ΑΔ ύψος ΑΕ διάμεσος, Ζ μέσον της ΑΓ.

5) $ΑΘΕ = 180 - \frac{Β-Γ}{2}$ Θ = τομή περιγ. ΑΕ διχοτόμος

6) $\widehat{ΑΒΗ} = Β-Γ$ ένθα $ΑΗ \parallel ΒΓ$ και Η επί της (Ο,R)

7) $ΗΓΒ' = 90 - \frac{Β-Γ}{2}$ ένθα $\overline{ΒΑΒ'} = β+γ$

8) $\widehat{ΘΒΓ} = \frac{Β-Γ}{2}$ ένθα επί της ΑΓ λαμβάνομεν $ΑΘ = ΑΒ$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ.

7 — 1. Ν' αχθή μεσοκάθετος εις δοθέν ευθ. τμήμα.
2. Ν' αχθή κάθετος εις δοθείσαν ευθ. ευθείαν.
3. Να ευρεθή το μέσον τόξου.
4. Να κατασκευασθή γωνία ίση και δοθείσαν.
5. Να γραφή τόξον δοθείσης χορδής και γωνίας.
6. Ν' αχθή εκ σημείου παράλληλος προς ευθείαν.
7. Να κατασκευασθή τρίγωνον εκ τριών στοιχείων.
8. Δ: εκ των β, γ, A.
9. Δ: εκ των α, B, Γ.
10. Να κατασκευασθή η τετάρτη ανάλογος των α, β, γ.
11. x; αν $x^2 = \alpha\beta$.
12. x; αν $x = \alpha\sqrt{n}$ n. δοθείς ακέραιος. πχ 5.
13. Εκ του A γραφή εφαπτομένης προς κύκλον (O,R)
14. Ν' αχθή κοινή εξωτερική εφαπτομένη των (O,R) και (O',R')
15. Να γραφή περιφέρεια δια τριών σημείων διερχομένη.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΑ ΟΡΓΑΝΑ.

ΚΑΝΩΝ — ΔΙΑΒΗΤΗΣ.

8

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Καθ' αυτήν ερευνώμεν αν με τα δεδομένα στοιχεία ευρίσκομεν μίαν ή και περισσοτέρας λύσεις του ζητουμένου. Ούτως εξετάζομεν αν εκάστη των επί μέρους κατασκευών δύναται να περιορισθή ή όχι και ειδικά προσπαθούμεν να εύρωμεν τας αναγκαίας και ικανάς συνθήκας, τας οποίας δέον να πληρούν τα δεδομένα, ίνα το πρόβλημα να δέχεται μίαν ή ίσως και περισσοτέρας λύσεις.

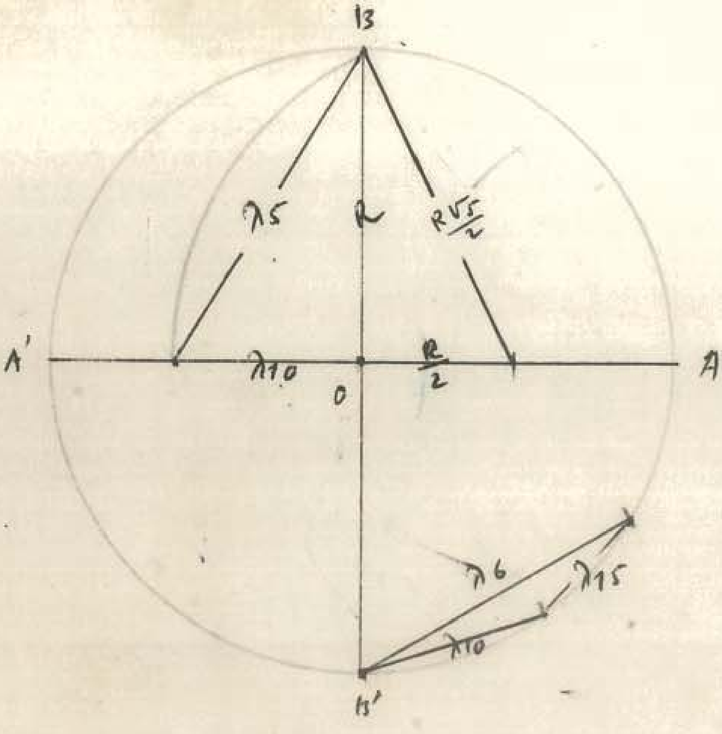
— Αν εις τα δεδομένα περιλαμβάνονται και γωνίαι και μία τουλάχιστον δια να περιλαμβάνη και τριγωνομετρικούς αριθμούς του γωνιών αυτών.
Απαιτείται λοιπόν εξαιρετική σκέψις και προσοχή.

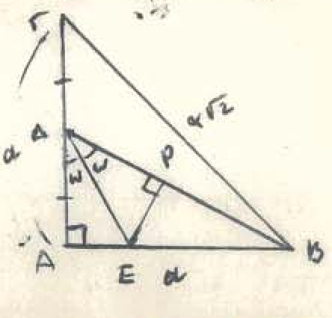
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ.

τα έχοντα πλευράς και γωνίας ίσας.
το άθροισμα των γωνιών των είναι $2\nu - 4$.
η γωνία των $A = \frac{2\nu-4}{\nu} = 2 - \frac{4^{\llcorner}}{\nu}$
Κεντρική γωνία των $\Omega = \frac{4^{\llcorner}}{\nu}$

Συνεπώς $A + \Omega = 2^{\llcorner}$

Είδος πολυγώνου	Πλευρά (λ_ν)	Απόστημα (α_ν)	Εμβαδόν (E_ν)	Παρατηρήσεις.
3 γωνον	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$	$E_3 = (R\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{2} = 1,4142$
4 γωνον	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$E_4 = (R\sqrt{2})^2$	$\sqrt{3} = 1,7321$
6 γωνον	$\lambda_6 = R$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$E_6 = 6 R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$	$E_{\Delta} = \alpha^2\frac{\sqrt{3}}{4}$
8 γωνον	$\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$E_8 = 2R^2\sqrt{2}$	$\lambda_5^2 = \lambda_{10}^2 + \lambda_6^2$
5 γωνον	$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\alpha_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$	$E_5 = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{6}$ πφ. $- \frac{1}{10}$ πφ $= \frac{1}{15}$ υφ.
10 γωνον	$\lambda_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$E_{10} = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	ημ $18 = \frac{1}{2}\lambda_{10}$
15 γωνον	$\lambda_{15} = \frac{R}{2}(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15}+\sqrt{3})$			$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
12 γωνον	$\lambda_{12} = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\alpha_{12} = \frac{R}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$E_{12} = 3R^2$.	$\lambda_{2\nu} = \sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2})}$





1° $PB = 2 \cdot AE$

2° $AE = AB \cdot \frac{A\Delta}{A\Delta + \Delta B} = \frac{\alpha}{4}(\sqrt{5}-1)$

3° $P\Delta = A\Delta = \frac{\alpha}{2}$

* 4° $BP = B\Delta - P\Delta = \frac{\alpha}{2}\sqrt{5} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$

* 5° $E\Delta = (A\Delta^2 + AE^2)^{1/2} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

6° $\rho_{\Gamma\Delta B} = \frac{\alpha}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

7° $R(\Gamma\Delta B) = \frac{\alpha}{4}\sqrt{10}$

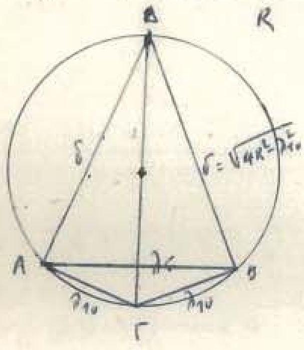
8° $\rho_\alpha(AB\Gamma) = \frac{\alpha}{2}(2+\sqrt{2})$

Να υπολογισθῇ ἡ πλευρά κανονικοῦ 5γώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R. τῇ βοηθείᾳ τοῦ Θ. τοῦ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ.—

Λύσις Ἄν $AB = \lambda_5$ καὶ Γ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΔ καὶ κατὰ τὸ Θ. τοῦ Πτολεμαίου θὰ ἔχωμεν:

$2\delta \cdot \lambda_{10} = 2R \cdot \lambda_5$ ὅπου $\delta = B\Delta = \sqrt{4R^2 - \lambda_{10}^2}$. Ἐπειδή $\lambda_5 = \frac{\lambda_{10} \cdot \sqrt{4R^2 - \lambda_{10}^2}}{R}$ ἢ

$$\lambda_5 = \frac{\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2}}{R} = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΠΙ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1 Δ.ξ. ότι ο αριθμός π περιλαμβάνεται μεταξύ 3 και 4.

2 Εάν δύο κανονικά σχήματα ν πλευρών είναι το ν εγγεγραμμένον, το άλλο περιγεγραμμένον εις τον αυτόν κύκλον [illegible]. αύτη είναι μέση ανάλογος μεταξύ της εγγ. περιμ. εις το σχήμα και της περιγεγραμμένης περιμ. εις το 1^{ov} σχήμα.

3 Αι διαγώνιοι κανονικού 5γώνου τέμνονται ή μέσον και άκρον λόγον.

4 Μία επίπεδος επιφάνεια δύναται να καλυφθή με κανονικά πολύγωνα [illegible] πλευρών κ.λπ. Δ.ξ. ότι $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{2}$

5 Κανονικά πολύγωνα πλευράς λ καλύπτουν μίαν επίπεδον επιφάνειαν. π.χ.

6 Κανονικόν πολύγωνον πολλών πλευρών [illegible] δεν δύναται να έχη δύο γωνίας [illegible].

7 Δίδεται κυρτόν κανονικόν 5γωνον ΑΒΓΔ. Η ευθεία ΟΑ συναντά την πλευράν ΓΔ εις F και την διαγώνιον ΔΕ εις G. Δ.ξ. ότι τα σημεία F και G είναι συζυγή αρμονικά των Ο και Α.

8 Γεγονός κανονικόν 5γωνον ΑΒΓΔΕ πλευράς α. Αι διαγώνιοι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται εις Ι. Θέτομεν $ΙΔ=x$ και $ΙΕ=y$. $(x>y)$ Δ.ξ. ότι το y είναι πλευρά κανονικού 10γώνου εγγεγραμμένου εις κύκλον ακτίνος x.

9 Δίδεται κανονικόν 7γωνον ΑΒΓΔΕΖΗ. Δ.ξ. ότι:

(i) $ΑΔ^2=ΑΓ(ΑΔ+ΑΓ)$ (ii) $ΑΓ^2-ΑΒ^2=ΑΓ(ΑΔ-ΑΒ)$ (iii) $\frac{1}{ΑΒ}=\frac{1}{ΑΓ}+\frac{1}{ΑΔ}$

IV. ότι η εύρεσις της πλευράς του [illegible] 3 βαθμού [illegible] δεν κατασκευάζεται διά του κανόνος και του διαβήτου —

10 Εάν $Α_1Α_2Α_3Α_4Α_5$ είναι κανονικόν 5γωνον εγγεγραμμένον εις κύκλον και Μ τυχόν σημείον του τόξου $Α_1Α_5$ να δειχθή ότι $ΜΑ_1+ΜΑ_3+ΜΑ_5=ΜΑ_2+ΜΑ_4$.

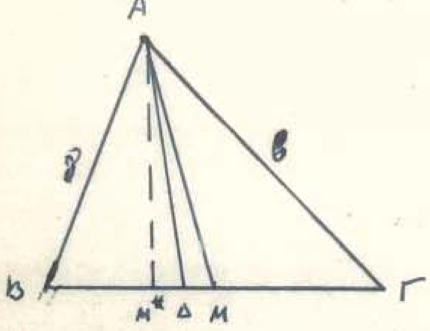
11 Δ.ξ. άνευ υπολογισμού ότι $α_5=(λ_{10}+λ_6)/2$.

12 Εάν ~~Αα~~ άκρα Α και Β της πλευράς ΑΒ κανονικού 5γώνου εγγεγραμμένου εις κύκλον ακτίνος R ενωθούν με το μέσον Μ του τόξου της [illegible] πλευράς. Να δειχθή ότι $ΜΑ-ΜΒ=R$ και $ΜΑ\cdot ΜΒ=R^2$. Κατόπιν τούτου [illegible] της γωνίας τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, β, γ [illegible] ότι $α-β=R$, $αβ=R$ όπου R η ακτίς της περιγεγραμμένης περιφερείας κύκλου περί το τρίγωνον ΑΒΓ.

13 Κυρτού πολυγώνου με 2ν πλευράς όλαι αι γωνίαι είναι ίσαι, αι πλευραί όμως [illegible] ίσαι προς β και [illegible] α. Δ.ξ. ότι το πολύγωνον είναι εγγράψιμον εις κύκλον

(ii) εάν $ν=3$ τότε $R^2=\frac{1}{3}(α^2+αβ+β^2)$.

ΣΗΜΕΙΟΝ LEMOINE



$L \equiv$ σημεῖον τομῆς συμμετροδιαμέσων
(Συμμετροδιάμεσος : ἡ συμμετρική τῆς διαμέσου ὡς πρὸς τὴν ὁμώνυμον διχοτόμον. —)

1 Ἑκάστη συμμετροδιάμεσος τριγώνου χωρίζει τοῦτο εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν προσκειμένων πλευρῶν.

Πράγματι. $\dfrac{(AMB)}{(AM^*\Gamma)} = \dfrac{(AB)(AM)}{(A\Gamma)(AM^*)}$ (1) $\dfrac{(AM^*B)}{(AM\Gamma)} = \dfrac{(AB)(AM^*)}{(A\Gamma)(AM)}$ (2)

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη ἐπιτυγχάνομεν $\dfrac{(AM^*B)}{(AM^*\Gamma)} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$ ὅ.ἐ.δ.

2. Συμμετροδιάμεσος εἶναι ὁ Γ.Τ. τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν δύο περιεχουσῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς ταύτας.

Πράγματι. $\dfrac{AM^*B}{AM^*\Gamma} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$ (1) ἀλλά $\dfrac{(AM^*B)}{(AM^*\Gamma)} = \dfrac{\gamma z}{\beta y}$ (2)

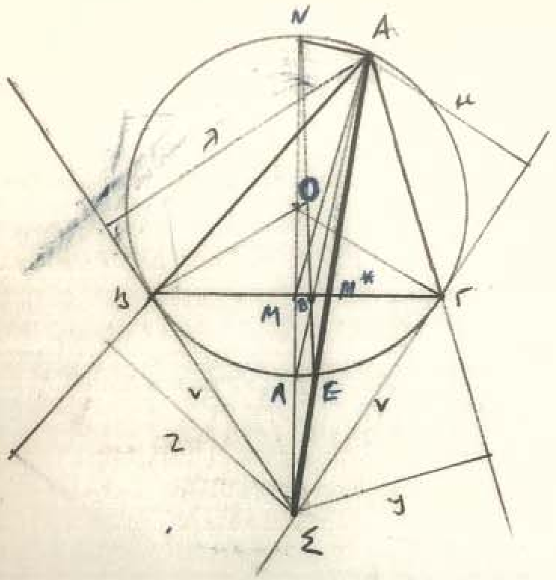
ἐξ ὧν $\dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma}$ κ.λ.π.

3. Αἱ συμμετροδιάμεσοι τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

4 Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν συμμετροδιαμέσων ὡς καὶ τὰ ἀνάλογα τμήματα τούτων.
Ὑπόδειξις. Ἐφαρμόσατε τὰ θεωρήματα Stewart & van Aubel.

5. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ L ἀπὸ τὰς πλευράς εἶναι min.
Ὑπόδειξις. Ἐφαρμόσατε τὴν ταυτότητα τοῦ Lagrange διὰ τοὺς ἀριθμοὺς $\begin{matrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$ ὁπότε $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma}$.

6. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὰ Β καὶ Γ αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Σ. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΣ εἶναι συμμετροδιάμεσος τοῦ ΑΒΓ.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

I τρόπος.

$2(ΑΒΣ) = \gamma z$
$2(ΑΓΣ) = \beta y$
$2(ΑΒΕ) = \nu\lambda$
$2(ΑΓΕ) = \nu\mu$.

$\dfrac{(ΑΒΣ)}{(ΑΓΣ)} = \dfrac{\gamma z}{\beta y} = \dfrac{\lambda}{\mu}$ ἀλλά

$\gamma^2 = 2R\lambda$
$\beta^2 = 2R\mu \rightarrow \dfrac{\gamma^2}{\beta^2} = \dfrac{\lambda}{\mu}$

ἐπομένως $\dfrac{\gamma}{\beta}\cdot\dfrac{z}{y} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2} \longrightarrow \dfrac{z}{y} = \dfrac{\gamma}{\beta}$,

ἤτοι ΑΣ συμμετροδιάμεσος.

II τρόπος.

Ἐκ τοῦ ΟΒΣ $\rightarrow R^2 = (ΟΣ)(ΟΜ)$ ἢ $\dfrac{R}{ΟΜ} = \dfrac{ΟΣ}{R}$ ἢ $\dfrac{R-ΟΜ}{R+ΟΜ} = \dfrac{ΟΣ-R}{ΟΣ+R}$

ἢ $\dfrac{ΜΛ}{ΜΝ} = \dfrac{ΣΛ}{ΣΝ}$ ἤτοι ΑΛ ἐσωτερική διχοτόμος τῆς ΜΑΣ ἡ δὲ ΑΝ ἐξωτερική διχοτόμος αὐτῆς. Οὕτω ἡ ΑΣ εἶναι συμμετροδιάμεσος τῆς ΑΒΓ.—

III τρόπος.

Αἱ ΝΕ καὶ ΑΛ τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας τοῦ Σ παραλλήλου τῆς ΒΓ. Κατόπιν τούτου $Λ\hat{Α}Ε = Λ\hat{Ν}Ε = Μ\hat{Ν}Δ = Μ\hat{Α}Δ$ ἤτοι $Μ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Μ^*$. Κατὰ ταῦτα $ΑΜ^*$ συμμετροδιάμεσος τοῦ ΑΒΓ.

7. Ἐάν τρεῖς συμμετροδιάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Α'Β'Γ', αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι συμμετροδιάμεσοι τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

8. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ Απολλώνιος περιφέρεια βάσεως ΒΓ με λόγον $\frac{\gamma}{\beta}$. Δεῖξτε ὅτι ὁ ριζικός ἄξων αὐτῆς καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Α συμμετροδιάμεσος.—

9. Ἄν ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Κ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τότε τὸ Κ εἶναι κ.β. τοῦ ΔΕΖ.

10. Ἐάν ἐκ τοῦ σημείου Κ τριγώνου ΑΒΓ φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς, οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων ὁρίζουν τρίγωνα τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου

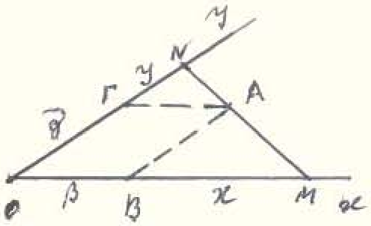
11. Ἄν ἡ συμμετροδιάμεσος ΑΑ' τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΗ τότε $\beta^4+\gamma^4 = \alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$.

12. $\triangle: \alpha, \mu_\gamma, \mu_\alpha$

ΕΥΘΕΙΑ μὲ ΓΩΝΙΑΝ καὶ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

ΒΑΣΙΚΑΙ ΤΙΝΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1

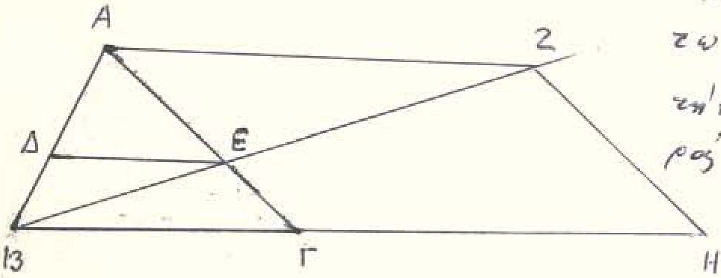


Διὰ δοθέντος σημείου Α ἄγεται τέμνουσα ΜΑΝ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας xOy. Ποία ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ τμήματα ΟΜ, ΟΝ.

Φέρομεν ΑΒ∥Οy, ΑΓ∥Οx τότε ΟΒ=β ΟΓ=γ σταθερά. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΜ ΝΟΜ δίδουσιν $\frac{AB}{ON}=\frac{BM}{OM}$ ἢ $\frac{\gamma}{ON}=\frac{OM-\beta}{OM}$ ἢ $\frac{\beta}{OM}+\frac{\gamma}{ON}=1$

Ἂν ΒΜ = x καὶ ΓΝ = y τὰ ΑΒΜ καὶ ΝΓΑ δίδουν $\frac{AB}{x}=\frac{y}{A\Gamma}$ ἢ $\frac{\gamma}{x}=\frac{y}{\beta}$ καὶ $xy=\beta\gamma$ = σταθ.

2

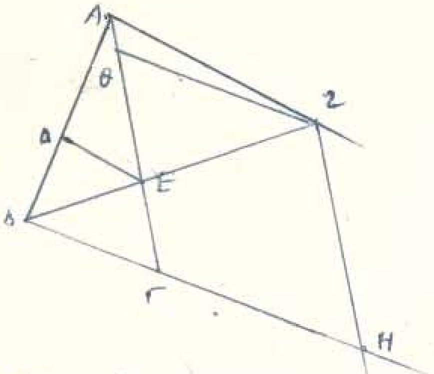


Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀχθήτω εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε κατὰ τρόπον ὥστε ΒΔ + 2(ΓΕ) = ΔΕ

Φέρω ΑΖ∥ΒΓ καὶ ΖΗ∥ΑΓ. Ἔχω $\frac{\Delta E}{AZ}=\frac{B\Delta}{AB}=\frac{BE}{BZ}=\frac{E\Gamma}{ZH}$ καὶ ἐπειδὴ ΖΗ = ΑΓ εἶναι $\frac{\Delta E}{AZ}=\frac{B\Delta}{BA}=\frac{E\Gamma}{A\Gamma}$ ἢ $\frac{\Delta E}{AZ}=\frac{B\Delta+2(\Gamma E)}{BA+2(A\Gamma)}$

Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι (ΑΖ) = (ΒΑ) + 2(ΑΓ) δηλαδὴ προσδιορίζεται τὸ Ζ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Α παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν γνωστὸν τμῆμα ΒΑ + 2(ΑΓ). Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ἡ ΔΕ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Σημείωσις. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἐπιλύονται ὅλα τὰ προβλήματα ὅπου δίδεται μεταξὺ τῶν ΒΔ, ΓΕ, ΔΕ μία σχέσις γραμμικὴ κ.λ.π.!
Ἐλευθερίου —



Δ, Ε, ; ὥστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ
Φέρω ΑΖ∥ΔΕ, ΖΗ∥ΑΓ, (ΖΗ)=(ΑΓ)
ἐπίσης ΖΘ∥ΒΓ. Ἔχω
$\frac{\Delta E}{AZ}=\frac{B\Delta}{A\Delta}=\frac{\Gamma E}{\Gamma\Theta}$ καὶ ἐπειδὴ
ΔΕ = ΒΔ = ΕΓ ⇒ ΑΖ = ΑΒ = ΓΘ.
⇒ τὸ Ζ εὑρίσκεται ἐπὶ περιφερείας Α,(ΑΖ = ΑΒ) καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ἐκ τοῦ Θ πρὸς τὴν ΒΓ. — ἡ ΒΖ καθορίζει τὸ Ε καὶ ἡ παράλληλος τὸ Δ.

3 . Δίδεται σημείον A εις το εσωτερικόν γωνίας xOy. Ν' αχθή τέμνουσα $BA\Gamma$ εκ τριγώνου ώστε $(OB\Gamma) \rightarrow min$.

4 . Διά σημείου M εντός γωνίας xAy. Ν' αχθή τέμνουσα σχηματίζουσα μετά των πλευρών της δοθείσης γωνίας τρίγωνον ίσον κ^2.

5 . Ν' αχθή ευθεία παράλληλος προς δοθείσαν ευθείαν, τέμνουσα τας πλευράς δοθείσης γωνίας εις δύο σημεία Δ και E ώστε το τμήμα ΔE να φαίνεται εκ δοθέντος σημείου Γ υπό δοθείσαν γωνίαν ω.

6 . Διά δοθέντος σημείου ν' αχθή ευθεία τέμνουσα τας πλευράς AB και $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ εις Δ και E ώστε $\frac{B\Delta}{\Gamma E} = \frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν τμήματα.

7 . ομοίως ίνα $B\Delta + \Gamma E = \lambda$.
ή $B\Delta - \Gamma E = \lambda$.

8 . Ν' αχθή παράλληλος προς δοθείσαν και τέμνουσα τας πλευράς AB και $A\Gamma$ τριγώνου εις Δ και E ούτως ώστε $B\Delta = \Gamma E$ ή $\frac{B\Delta}{\Gamma E} = \frac{\mu}{\nu}$
ομοίως ίνα $B\Delta + \Gamma E = \mu$ ή $B\Delta - \Gamma E = \lambda$.

9 . Δίδεται γωνία xOy και σημείον A εντός αυτής. Ν' αχθή ευθεία παράλληλος προς δοθείσαν και τέμνουσα τας πλευράς εις B και Γ εις τρόπον ώστε $AB = A\Gamma$. ομοίως ίνα $AB : A\Gamma = \mu : \nu$

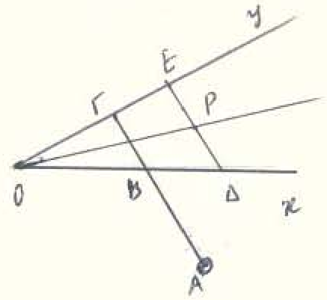
10 . Δίδεται γωνία xOy και σημείον A εντός. Ν' αχθή διά του A ευθεία τέμνουσα τας πλευράς εις B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$.

11 . ομοίως ώστε $(AB)(A\Gamma) = \kappa^2$ όπου κ δοθέν τμήμα.
ή ώστε $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$

12 . Διά δοθέντος σημείου A εκτός γωνίας xOy κειμένου ν' αχθή τέμνουσα τας πλευράς εις B και Γ ώστε $(AB):(A\Gamma) = \mu : \nu$
— ομοίως $(AB).(A\Gamma) = (OA)^2$.
— ομοίως. ώστε το Γ να χωρίζη εις μ. και άκρον λόγον το AB.

13 . — ομοίως αν το A ευρίσκεται εντός.
— ομοίως ώστε η περίμετρος του $OB\Gamma$ να είναι δοθείσα.

14. Δίδεται γωνία xOy καί σημεῖον A ἐκτός. Νά ἀχθῇ διά τοῦ A εὐθεῖα τέμνουσα τάς πλευράς εἰς B καί Γ οὕτως ὥστε $OB + O\Gamma = \mu . B\Gamma$ ὅπου μ δοθείς ἀριθμός.—

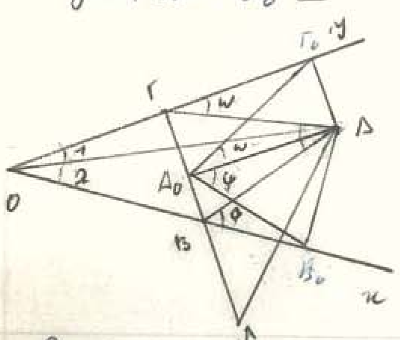


Πᾶσα παράλληλος ΔΕ πρός τήν BΓ ἔχει τήν ἰδιότητα αὐτήν. Ἐάν ἡ ΔΕ τέμνῃ τήν διχοτόμον εἰς τό P θά εἶναι $\frac{O\Delta}{\Delta P} = \frac{OE}{PE} = \frac{O\Delta + OE}{\Delta E} = \mu$
Συνεπῶς $\frac{O\Delta}{\Delta P} = \mu$. Ἄν ἤδη ἐκλέξωμεν τό P αὐθαιρέτως ἐπί τῆς διχοτόμου δυνάμεθα νά εὕρωμεν τό Δ (λύσις περιφερείας) ἡ ζητουμένη εὐθεῖα θά εἶναι ἡ ἐκ τοῦ A παράλληλος πρός τήν ΔP.—

15. Δίδεται γωνία xOy καί δύο σημεῖα A καί B ἐπί τῶν πλευρῶν. Νά ἀχθῇ διά τοῦ O εὐθεῖα ὥστε ἄν AA' καί BB' εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτήν νά εἶναι $(AA').(BB') = K^2$.

16. ὁμοίως ἵνα εἶναι $OA' + OB' = K$.

17. Νά ἀχθῇ διά δοθέντος σημείου A εὐθεῖα τέμνουσα τας πλευράς δοθείσης γωνίας xOy εἰς B καί Γ ὥστε τό τμῆμα BΓ νά φαίνεται ἀπό ἄλλο δοθέν σημεῖον Δ ὑπό δοθεῖσαν γωνίαν ω_0 —

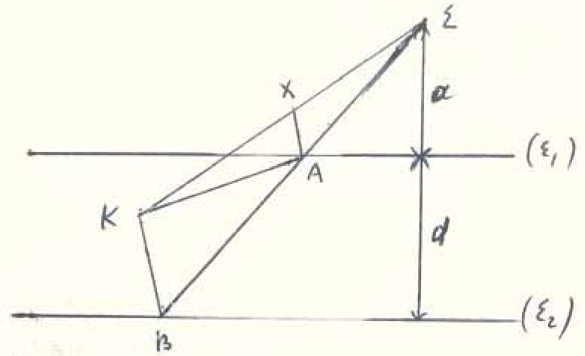


Φέρω $\Delta\Gamma_0 \perp Oy$, $\Delta B_0 \perp Ox$, $\Delta\Delta_0 \perp AB\Gamma$
Εἶναι $\omega + \varphi = \psi + \omega_0 = $ σταθ. $B_0\Gamma_0$ σταθ.
Συνεπῶς τό ἴχνος τοῦ Δ_0 ἐφ' ἑνός μέν τόξον $B_0\Delta_0\Gamma_0$ δεχομ. γωνίαν $\psi + \omega_0$. καί ἐφ' ἑτέρου περιφερείᾳ διαμέτρου AΔ. ἡ τομή αὐτῶν καθορίζει τό Δ_0 ἔτσι ἔχομεν τήν $AB\Delta_0\Gamma$ ἥτις ἡ ζητουμένη.—

18. Δίδεται γωνία xOy καί σημεῖον A ἐκτός. Νά ἀχθῇ διά τοῦ A τέμνουσα τάς πλευράς εἰς B καί Γ ὥστε $OB - O\Gamma = \mu.(B\Gamma)$. μ δοθείς

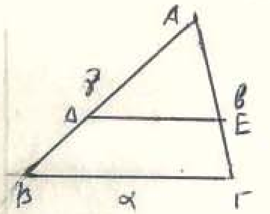
19. Δίδεται γωνία xOy. Νά εὑρεθοῦν ἐπί τῶν πλευρῶν της δύο σημεῖα A καί B ὥστε ἡ AB να ἔχῃ δοθέν μῆκος καί τό ἐμβαδόν OAB νά εἶναι δοθέν.—

20. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), σημεῖον Κ μεταξύ αὐτῶν καί ἕτερον Σ ἐκτός τούτων. Ν' ἀχθῆ τέμνουσα ΣΑΒ, ἐξ τρόπου ὥστε γων.$(AKB) = \omega_0$.



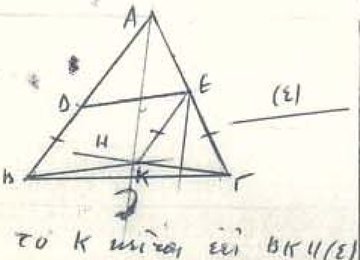
Ἔστω ΣΑΒ ἡ ζητουμένη ἐνῶ $AKB = \omega_0$. Φέρω $AX \parallel BK$ τότε $\frac{\Sigma X}{\Sigma K} = \frac{\Sigma A}{\Sigma B} = \frac{\alpha}{\alpha+d}$ → Χ σταθερόν ἐπί τῆς ΣΚ. Τότε Α κεῖται ἐπί τῆς (ε_1) καί του κυκλικοῦ τόξου δεχ. γωνίαν ω_0 καί ἐδραζομένου ἐς ΚΧ σταθερόν.—

21. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ· προσδιορίσατε ἐπί τῆς ΑΒ σημεῖον Δ τοιοῦτον ὥστε φέροντες $\Delta E \parallel B\Gamma$ (Ε ἐπί τῆς ΑΓ) νά ἔχωμεν $B\Delta + \Gamma E = 2(\Delta E)$

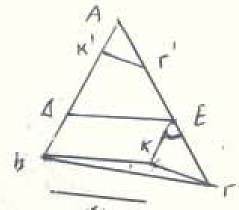


Ἄς εἶναι $A\Delta = x$. Ἔχομεν $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$ ἤ $\frac{x}{\gamma} = \frac{AE}{\beta} = \frac{\Delta E}{\alpha}$ → $AE = \frac{\beta x}{\gamma}$, $\Delta E = \frac{\alpha x}{\gamma}$, $B\Delta = \gamma - x$, $\Gamma E = \beta - \frac{\beta x}{\gamma} = \frac{\beta(\gamma - x)}{\gamma}$. Ἡ δοθεῖσα σχέσις συνεπείᾳ τῶν ἀνωτέρω γίνεται δι' ὅ $\gamma - x + \frac{\beta(\gamma-x)}{\gamma} = \frac{2\alpha x}{\gamma}$ ὅπόθεν $x = \frac{\gamma(\beta+\gamma)}{2\alpha+\beta+\gamma}$. Ἐπειδή δέ $\frac{\gamma(\beta+\gamma)}{2\alpha+\beta+\gamma} - \gamma < 0$ ἡ ἐπαληθεύει πάντοτε.—

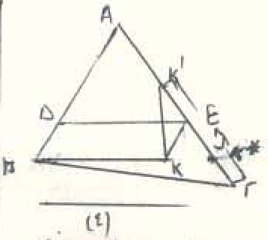
22. Ν' ἀχθῆ τέμνουσα ΔΕ τριγώνου ΑΒΓ παράλληλος πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε) ἐξ τρόπου ὥστε:
(i) $B\Delta = \Gamma E$, (ii) $\frac{B\Delta}{\Gamma E} = \frac{\mu}{\nu}$, (iii) $B\Delta \pm \Gamma E = \lambda$



τό Κ κεῖται ἐπί $BK \parallel (\varepsilon)$ καί ἐπί $\Gamma H \perp A\Delta$.



τό Κ ἐφρ. ἐπί $BK \parallel (\varepsilon)$ καί τῆς $\Gamma K \parallel \Gamma'K'$ ὅπου ΕΚΓ ομ. ὅμοιον ἐκείνου → ΑΚ'Γ'.



Λαμβάνω $KE = EK'$ ὅτε $\Gamma K' = \lambda$. γων. $KK'\Gamma = \frac{A}{2}$. ὅπως $K \equiv (BK, K'K)$. ὅταν $|B\Delta - \Gamma E| = \lambda$ λαμβάνω $K^*E = KE$. κλπ.

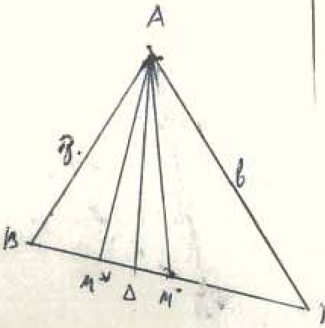
23. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, διά δοθέντος σημείου Ρ ν' ἀχθῆ εὐθεῖα τέμνουσα τάς πλευράς ΑΒ καί ΑΓ ἐς Δ καί Ε ὥστε $\Delta B = E\Gamma$. Ὑπόδειξη: ἡ περιφ. ΑΔΕ τέμνει τήν ΑΒΓ ἐς σταθερόν σημεῖον Μ.

24. Δίδεται γωνία xOy καί σημεῖον Ρ ἐντός. Ἀχθήτω τέμνουσα ΑΡΒ τοιαύτη ὥστε $\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\nu}$ ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.—

ΣΥΜΜΕΤΡΟΔΙΑΜΕΣΟΙ.

Ὁρισμός. Καλεῖται συμμετροδιάμεσος τριγώνου ΑΒΓ ἡ συμμετρική μιᾶς διαμέσου ὡς πρὸς τὴν ὁμώνυμον διχοτόμον.

1. Ἰδιότητες. Ἑκάστη συμμετροδιάμεσος τριγώνου χωρίζει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν προσκειμένων πλευρῶν.

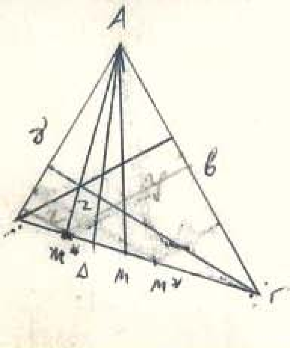


Πράγματι: $\frac{(AMB)}{(AM^*\Gamma)} = \frac{(AB)(AM)}{(A\Gamma)(AM^*)}$ (1)

$\frac{(AM^*B)}{(AM\Gamma)} = \frac{(AB)(AM^*)}{(A\Gamma)(AM)}$ (2) καὶ πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη

εὑρίσκομεν $\frac{(AM^*B)}{(AM^*\Gamma)} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$ ὅ.ἔ.δ.

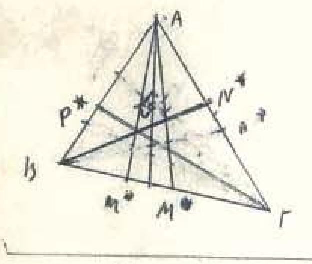
2. Συμμετροδιάμεσος εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν δύο περιεχουσῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς ταύτας.



Πράγματι $\frac{(AM^*B)}{(AM^*\Gamma)} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$ (1) ἀλλὰ $\frac{AM^*B}{AM^*\Gamma} = \frac{\gamma \cdot z}{\beta y}$ (2)

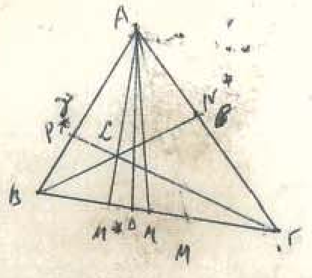
Συγκρίνοντες τὰς (1), (2) εὑρίσκομεν $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{z}{y}$ ἢ $\frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$

3. Αἱ συμμετροδιάμεσοι τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (L = Lemoine)



Λαμβάνομεν $\frac{BM^*}{M^*\Gamma} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$ ὁμοίως κ.λπ. καὶ πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὸ ζητούμενον κατὰ Ceva. —

4. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν συμμετροδιαμέσων ἢ καὶ τὰ ἀνάλογα τμήματα αὐτῶν AL, BL, ΓL. συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου —



I Ἐφαρμόζοντες τὸ θ. τοῦ Stewart λαμβάνομεν

$$\gamma^2(M^*\Gamma) + \beta^2(M^*B) = \alpha(AM^*)^2 + \alpha(BM^*)(M^*\Gamma) \quad \text{ἀλλά}$$

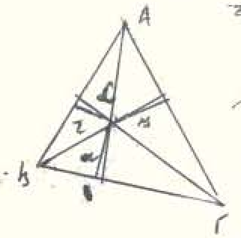
$$\frac{M^*\Gamma}{\beta^2} = \frac{M^*B}{\gamma^2} = \frac{\alpha}{\beta^2+\gamma^2} \rightarrow M^*\Gamma = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2} \quad M^*B = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

$$(AM^*)^2 = \gamma^2 \cdot \frac{\beta^2}{\beta^2+\gamma^2} + \beta^2 \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} - \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\beta^2+\gamma^2)^2} = \frac{\beta^2\gamma^2}{(\beta^2+\gamma^2)^2}\left[2(\beta^2+\gamma^2) - \alpha^2\right]$$

$$(AM^*) = \frac{\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\left[2(\beta^2+\gamma^2) - \alpha^2\right]} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

II $\frac{AL}{LM^*} = \frac{AP^*}{P^*B} + \frac{AN^*}{N^*\Gamma} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$ (Van Aubel)

5 Δεῖξε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ L ἀπὸ τὶς πλευρὲς τριγώνου εἶναι min. —

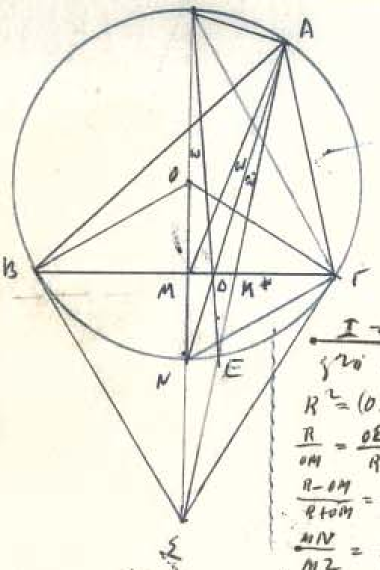


Ἔχομεν $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ ὅπου x, y, z αἱ ἀποστάσεις τοῦ L ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγ. ΑΒΓ. Κατὰ τὴν ταυτότητα τοῦ Lagrange εἶναι:

$$(x^2+y^2+z^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 = \sum(\alpha y-\beta x)^2$$

ἀλλά $\Sigma \alpha x = 2E$ σταθ. min τοῦ $x^2+y^2+z^2$ ἂν $\Sigma(\alpha y-\beta x)^2=0$ ἤτοι ὅταν $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$. —

6 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὰ Β καὶ Γ, αἵτινες τέμνονται εἰς Σ. Δεῖξε ὅτι ἡ ΑΣ εἶναι συμμετροδιάμεσος τοῦ ΑΒΓ.



I λύσις.

Στὸ $OB\Sigma \to$

$R^2 = (O\Sigma)\cdot(OM) \Rightarrow$

$\frac{R}{OM} = \frac{O\Sigma}{R} \Rightarrow$

$\frac{R-OM}{R+OM} = \frac{O\Sigma-R}{O\Sigma+R}$ ἢ

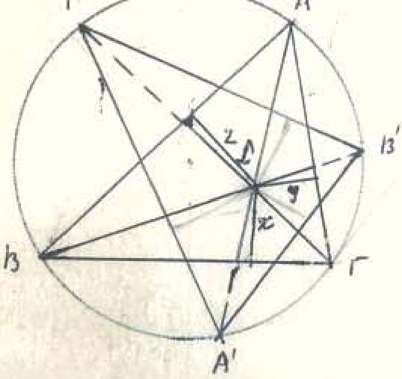
$\frac{MN}{MZ} = \frac{\Sigma N}{\Sigma Z}$ ἤτοι

ΑΝ ἐσ. διχ. τῆς $M\hat{A}\Sigma$ ἐπειδὴ ΖΑ ἐξ. ~~τότε ἡ ΑΣ συμμετ/της τῆς ΑΜ~~

II λύσις

Πράγματι ἀφοῦ ΖΕ καὶ ΑΝ τέμνονται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ Σ ὡς πρὸς τῆς ΒΓ. Κατόπιν τούτου $N\hat{A}E = NZE = MZ\Delta = MA\Delta$ ἤτοι $M\hat{A}\Delta = \Delta AM^*$. Καὶ τοῦτο AM^* συμμετροδιάμεσος τοῦ ΑΒΓ.

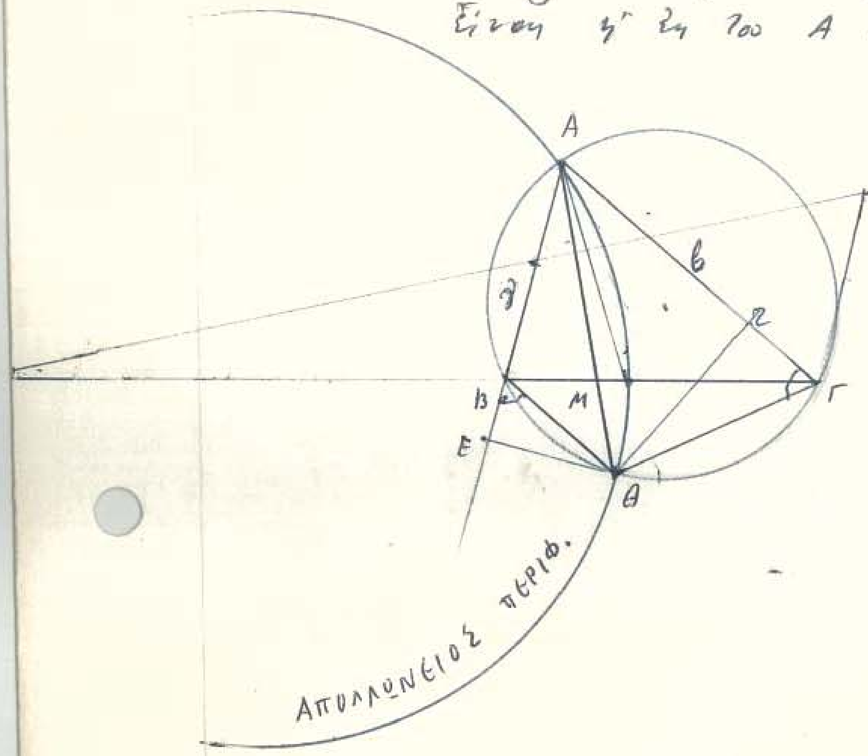
7 Ἐὰν τρεῖς συμμετροδιάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὰ Α΄, Β΄, Γ΄ αἱ ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἶναι συμμετροδιάμεσοι τοῦ τριγ. Α΄Β΄Γ΄.



Ἔστωσαν x, y, z αἱ ἀποστάσεις τοῦ L ἀπὸ τὰς α, β, γ καὶ x^*, y^*, z^* ἀπὸ α΄, β΄, γ΄.

Τρίγωνα LΒΓ ὅμοια LΒ΄Γ΄ $\to \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha'}{x^*}$ καὶ $\frac{\beta}{y} = \frac{\beta'}{y^*}$, $\frac{\gamma}{z} = \frac{\gamma'}{z^*}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{z}$ ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha'}{x^*} = \frac{\beta'}{y^*} = \frac{\gamma'}{z^*}$ ἢ L σημεῖον Lemoine τοῦ Α΄Β΄Γ΄. —

8 — Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ και ἡ Απολλώνειος περιφέρεια βάσεως ΒΓ με λόγον $\frac{\gamma}{\beta}$. Δεῖξαι ὅτι ὁ ριζικός ἄξων αὐτῆς και τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι ἡ ἐφ. του Α συμμετροδιάμεσος. —



Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{BM}{M\Gamma} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$. Ἔχομεν

$$\frac{\gamma}{\theta\Gamma} = \frac{BM}{M\theta} = \frac{AM}{M\Gamma}$$

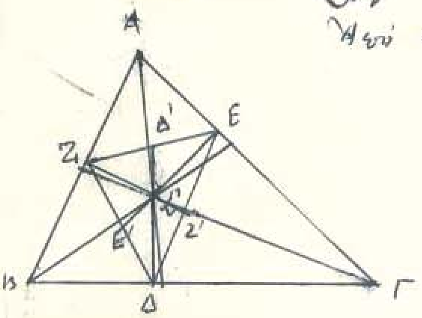
$$\frac{\theta B}{\beta} = \frac{M\theta}{M\Gamma} = \frac{BM}{AM}$$

$$\rightarrow \frac{\gamma(\theta B)}{\beta(\theta\Gamma)} = \frac{BM}{M\Gamma}$$ ἀλλά

$\frac{\theta B}{\theta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ ἀφοῦ θ ἐπὶ Ἀπολλ.

Ἐπειδή $\frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{BM}{M\Gamma}$ ἤτοι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (O,R) και Ἀπολλ. περ. λόγου $\frac{\gamma}{\beta}$ εἶναι ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΜθ

Ἂν ιΔ, ιΕ, ιΖ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ ι ἀπὸ τῶν πλευρῶν, τότε τὸ ι εἶναι κ.β τοῦ ΔΕΖ.



Γωνία Β = ΖιΔ'

$\frac{\iota Z\Delta'}{AB\Gamma} = \frac{(\iota Z)(\iota\Delta')}{\alpha\gamma}$ ὁμοιότης

$\frac{\iota E\Delta'}{AB\Gamma} = \frac{\iota E . \iota\Delta'}{\alpha\beta}$ →

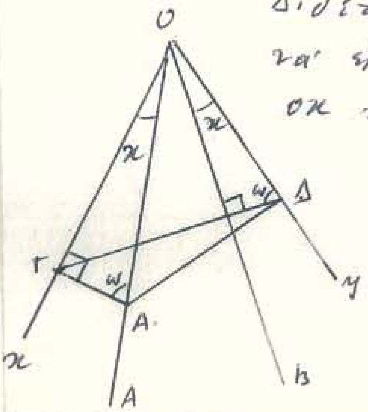
$\frac{\iota Z\Delta'}{\iota E\Delta'} = \frac{\iota Z . \beta}{\iota E . \gamma} = \frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma} = 1$

και ιΖΔ' ≃ ιΕΔ' ὁπόθεν ΖΔ' = Δ'Ε

ἤτοι ΔιΔ' διάμεσος, ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ΕιΕ' και ΖιΖ' διάμεσοι.

10 Ἐάν ἀπό τοῦ σημείου τῆς τομῆς Ο τῶν συμμετροδιαμέσων τριγώνου ΑΒΓ φέρωμεν τάς καθέτους ἐπί τάς πλευράς, οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων ὁρίζουν τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπί τάς διαμέσους τοῦ τριγώνου—

Ἀπόδειξις. Ἀποδεικνύομεν πρῶτον τήν ἑξῆς βοηθητικήν πρότασιν. Δίδεται γωνία xOy. Φέρομεν τάς εὐθείας ΟΑ καί ΟΒ ὥστε νά εἶναι $x\hat{O}A = y\hat{O}B$ καί τάς καθέτους ΑΓ καί ΑΔ ἐπί τάς Ox καί Oy. Θέσει ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΟΒ—



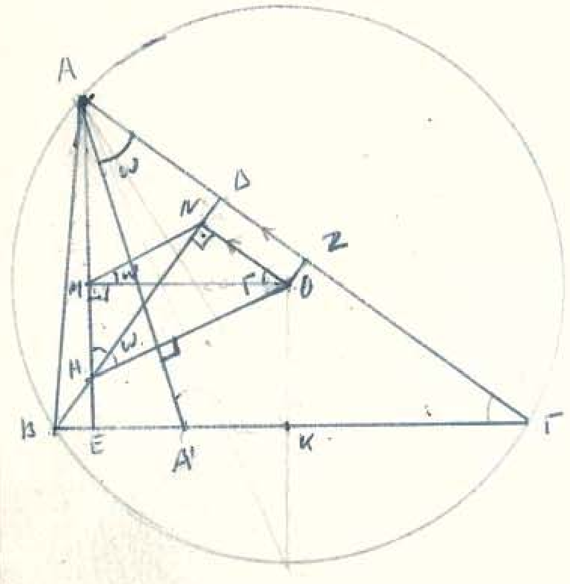
πράγματι $x+\omega = 1^L$ ἑπομένως

ΟΒ ⊥ ΓΔ.—

ἡ πρότασις ἄρα εἶναι ἀποδεδειγμένη.

---

11 Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν ἡ συμμετροδιάμεσος ΑΗ΄ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθεῖαν ἡ ὁποία συνδέει τό ὀρθόκεντρον μέ τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τότε $\beta^4+\gamma^4 = \alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$



Ἔχομεν $A\hat{A'}\Gamma = O\hat{H}\Delta = N\hat{M}O$

καί ἄρα $M\overset{\triangle}{N}O$ ὅμ. $AA'\Gamma$.

$\rightarrow \quad \frac{NO}{A'\Gamma} = \frac{OM}{A\Gamma} \quad (1)$

ἀλλά $\alpha^2-\gamma^2 = 2\beta(\Delta Z)$

ἤ $\Delta Z = ON = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta}$

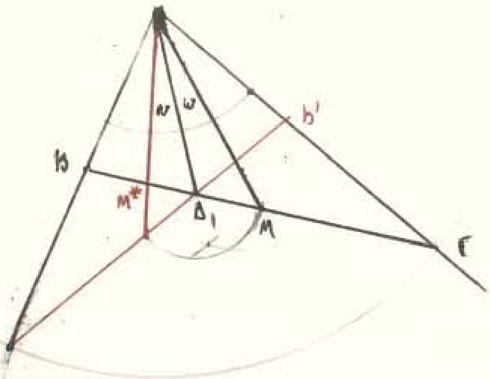
$(OM) = (KE) = \frac{\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$

$\frac{A'\Gamma}{A'B} = \frac{\beta^2}{\gamma^2}$ ἤ $\frac{A'\Gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$, $A'\Gamma = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (1) λαμβάνομεν: $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta} : \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2} = \frac{\beta^2-\gamma^2}{2\alpha} : \beta$

ἤ $\beta^4+\gamma^4 = \alpha^2(\beta^2+\gamma^2)$.

12. Κατασκευή συμμετροδιαμέσου.



13. – Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $2\mu_1^2 = \mu_2^2 + \mu_3^2$ δείξτε ότι η ΕΣ είναι παράλληλη προς την ΒΓ.

Απόδειξη. Η σχέση $2\mu_1^2 = \mu_2^2+\mu_3^2$ σημαίνει ότι $2\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$. Έχουμε τώρα $\frac{ΑΕ}{ΕΜ} = \frac{2}{1}$ και επίσης $\frac{ΑΣ}{ΣΔ_1} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{2}{1}$ άρα $\frac{ΑΕ}{ΕΜ} = \frac{ΑΣ}{ΣΔ_1}$ όπου ΑΜ διάμεσος και $ΑΔ_1$ συμμετροδιάμεσος άρα ΕΣ ∥ ΒΓ.

14. – Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι $\delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\mu_1$ και κυκλικά.

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά.

$\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2} \Rightarrow 2\mu_1 = \sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}$ συνεπώς

$\delta_\alpha = \frac{\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2} = \frac{\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}2\mu_1 = \frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\mu_1$ άρα:

$\delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\mu_1$	$\delta_\beta = \frac{2\gamma\alpha}{\gamma^2+\alpha^2}\mu_2$	$\delta_\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mu_3$

15. Εάν Κ είναι το σημείο του Lemoine τριγώνου ΑΒΓ και $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$ οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΚΒΓ, ΚΓΑ, ΚΑΒ αντίστοιχα δείξτε: $\mu_1 R_\alpha = \mu_2 R_\beta = \mu_3 R_\gamma$. –

Απόδειξη. Έχουμε $ΚΒ \cdot ΚΓ = 2R_\alpha x \Rightarrow R_\alpha = \frac{ΚΒ\cdot ΚΓ}{2x}$ όπου

$ΚΑ = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\frac{\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}$, $ΚΒ = \frac{\gamma\alpha}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{2(\gamma^2+\alpha^2)-\beta^2}$, $ΚΓ = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2}$

$\mu_1 R_\alpha = \mu_1\frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\sqrt{2(\gamma^2+\alpha^2)-\beta^2}\cdot\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\sqrt{\Pi(2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2)}\cdot\frac{\alpha}{x}$

$\mu_2 R_\beta =$ $=$ $\frac{\beta}{y}$

$\mu_3 R_\gamma =$ $=$ $\frac{\gamma}{z}$

$\Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ γνωστή ιδιότητα άρα $\mu_1 R_\alpha = \mu_2 R_\beta = \mu_3 R_\gamma$.

16 Δ.ε. ότι η απόστασις x του K από την ΒΓ είναι $x = \frac{2Ea}{\Sigma a^2}$ βάσει τούτου να δειχθεί ότι αν ισχύει η σχέσις $a(\beta+\gamma) = \beta^2+\gamma^2$ τότε ΙΚ // ΒΓ.

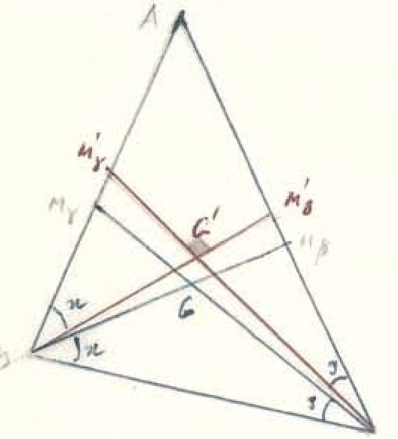
Απόδειξις. $\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \Rightarrow \frac{ax}{a^2} = \frac{\beta y}{\beta^2} = \frac{\gamma z}{\gamma^2} = \frac{ax+\beta y+\gamma z}{a^2+\beta^2+\gamma^2} = \frac{2E}{\Sigma a^2}$

$\Rightarrow x = \frac{2Ea}{\Sigma a^2}$ και κυκλικώς.

(α) $x_K = \frac{2aE}{a^2+\beta^2+\gamma^2} = \frac{2aE}{a^2+a(\beta+\gamma)} = \frac{2aE}{a(a+\beta+\gamma)} = \frac{2aE}{2\tau a} = \frac{E}{\tau} = \rho$

και συνεπώς ΙΚ // ΒΓ.

17 —Εάν εις τρίγωνον ΑΒΓ αι συμμετροδιάμεσοι που άγονται από τας κορυφάς Β και Γ τέμνονται καθέτως δ.ε.ό. $2\eta\mu^2 A + \epsilon\varphi B\, \epsilon\varphi \Gamma = 0$.



Εάν BM'_β και $\Gamma M'_\gamma$ αι εκ των Β και Γ συμμετροδιάμεσοι με $B\hat{G'}\Gamma = 1^L$ εκ του σχήματος έπεται $B - x + \Gamma - y = 90^\circ$ (1) ως γνωστόν

$\sigma\varphi(B-x) = 2\sigma\varphi B + \sigma\varphi A$

$\sigma\varphi(\Gamma-y) = 2\sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi A$

οπότε η (1) είναι ότι:

$\sigma\varphi(B-x)\,\sigma\varphi(\Gamma-y) = 1 \Rightarrow$

$(2\sigma\varphi B + \sigma\varphi A)(2\sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi A) = 1 \Rightarrow$

$4\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma + 2\sigma\varphi B\sigma\varphi A + 2\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi^2 A = 1$ (2)

Επειδή όμως $\Sigma\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma = 1$ η (2) γράφεται $2\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma + 1 + \sigma\varphi^2 A = 0 \Rightarrow$

$\frac{2}{\epsilon\varphi B\,\epsilon\varphi\Gamma} + \frac{1}{\eta\mu^2 A} = 0 \Rightarrow 2\eta\mu^2 A + \epsilon\varphi B\,\epsilon\varphi\Gamma = 0.$

18 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ και ο κύκλος (O, R). Εάν A' είναι η τομή των εφαπτομένων του (O,R) εις τα σημεία Β και Γ και είναι γων. $OAA' = \theta$ δ.ε.ό. $\epsilon\varphi\theta = |\sigma\varphi B - \sigma\varphi\Gamma|$. Λύσις Αρ. 275 Ι τόμος ΔΙΚΑΙΟΣ.—

ΤΡΙΓΩΝΑ

με $\sphericalangle A = 60^\circ$.

1. Δεῖξαι ὅτι $\alpha^2 = \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2$
2. » $E = \beta\gamma\frac{\sqrt{3}}{4}$
3. » Ἡ εὐθεῖα τοῦ Euler σχηματίζει μετὰ τῶν ΑΒ ΑΓ ἰσόπλευρον τρίγωνον.
4. » Τὰ σημεῖα $B, H, I, O, \Gamma, I_\alpha$ εἶναι ὁμοκυκλικά.
5. Ἂν $IO = IH$ δεῖξαι $AO = AH$ ἢ A, O, I, H ὁμοκυκλικά. Ἀπορρέει ἐκ τούτου ὅτι μία γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι 60°.
6. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τριέδρου γωνίας ἕδρας 60° λαμβάνομεν τὰ μήκη $SA=\alpha$, $SB=\beta$, $S\Gamma=\gamma$. Ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου $S'AB\Gamma$.
7. Μεταξὺ τίνων ὁρίων περιλαμβάνεται τὸ $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$.

Λύσις. Ἔχομεν $\left|\frac{B-\Gamma}{2}\right| < 90 - \frac{A}{2}$ λαμβάνοντες τὸ συν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν: $\eta\mu\frac{A}{2} < \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} \leq 1$ ἢ
$\eta\mu 30 < \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} \leq 1$ ἢ $\frac{1}{2} < \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} \leq 1$ ἢ $\frac{1}{4} < \sigma\upsilon\nu^2\frac{B-\Gamma}{2} \leq 1$
ἢ $\frac{1}{2} < 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{B-\Gamma}{2} \leq 2$ ἢ $\frac{1}{2} - 1 < 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{B-\Gamma}{2} - 1 \leq 2-1$ ἤτοι
$-\frac{1}{2} < \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) \leq 1$ δηλαδὴ τὸ $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$ κυμαίνεται μεταξὺ τῶν $-\frac{1}{2}$ καὶ $+1$.

8. Ὑπάρχει τρίγωνον μὲ $A = 60^\circ$ καὶ $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} = -\frac{1}{3}$.

Λύσις. Ἔστω
$$\left.\begin{aligned} B-\Gamma &= \omega \\ B+\Gamma &= 180 - A \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} B &= 90^\circ + \frac{\omega - A}{2} \\ \Gamma &= 90 - \frac{\omega + A}{2} \end{aligned}$$
Δέον $90^\circ + \frac{\omega-A}{2} > 0$ καὶ $90^\circ - \frac{\omega+A}{2} > 0$ $\rightarrow$
$\omega > A - 180^\circ$ καὶ $\omega < 180 - A$ δηλαδὴ
$-(180-A) < \omega < 180 - A$ ἢ $-(180-A) < B-\Gamma < 180-A \Rightarrow |B-\Gamma| < 180-A$
συνθήκη ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία ἵνα ἡ $B-\Gamma$ εἶναι παραδεκτή.

<u>ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ</u> $|B-\Gamma| < B+\Gamma$
$|B-\Gamma| < 180 - A$

Περιορισμοὶ διὰ τὸ $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}$ ἂν δίδεται ἡ A:
$-(90 - \frac{A}{2}) < \frac{B-\Gamma}{2} < 90 - \frac{A}{2}$ ἢ λαμβάνοντες τὰ ἡμίτονα:
$-\eta\mu(90 - \frac{A}{2}) < \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} < \eta\mu(90 - \frac{A}{2})$ καὶ ἐξ αὐτοῦ
$-\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} < \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} < \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$ ἢ $\left|\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\right| < \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$

$|-\frac{1}{3}| < \sigma\upsilon\nu 30°$ ἢ $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ἢ $2 < 3\sqrt{3}$ ὅπερ ἰσχύει.
ἐσωτερικῆς ὀξυγωνίου τριγώνου.—

9. —Δ.ξ. ὅτι $OH^2 = (3R+2\rho)(R-2\rho)$.

Ἔχομεν
$$OH^2 = R^2(1 - 8\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu \Gamma)$$
$$OH^2 = R^2(1 - 4\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma)$$
$$OH^2 = R^2(1 - 2.2\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma)$$
$$OH^2 = R^2(1 - 2\{\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma) + \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)\})$$
$$OH^2 = R^2[1 + 2\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)]$$
$$OH^2 = R^2[2 - 2\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$$
$$OH^2 = 2R^2(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2})$$
$$OH^2 = 4R^2\eta\mu^2\frac{B-\Gamma}{2}$$
$$OH^2 = 4R^2\left[1 - \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)\right] \quad \text{ἀλλ' ὅμως} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\rho + \frac{R}{2}}{R} \ *$$
$$OH^2 = 4R^2\left(1 - \left(\frac{2\rho+R}{2R}\right)^2\right) = 4R^2\left[\left(1 + \frac{2\rho+R}{2R}\right)\left(1 - \frac{2\rho+R}{2R}\right)\right]$$
$$= 4R^2\left(\frac{3R+2\rho}{2R}\right)\left(\frac{R-2\rho}{2R}\right) = (3R+2\rho)(R-2\rho)$$

* $\rho = 4R\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$, $\rho = 2R\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$, $\rho = R\left[\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\right]$

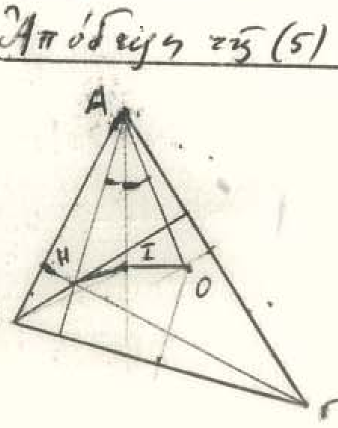
$\rho = R\left[\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} - \frac{1}{2}\right] \rightarrow \rho = R\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} - \frac{R}{2}$

$\rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\rho + \frac{R}{2}}{R} = \frac{2\rho + R}{2R}$.

Ἀπόδειξις τῆς (3) Ἀσκήσεως.

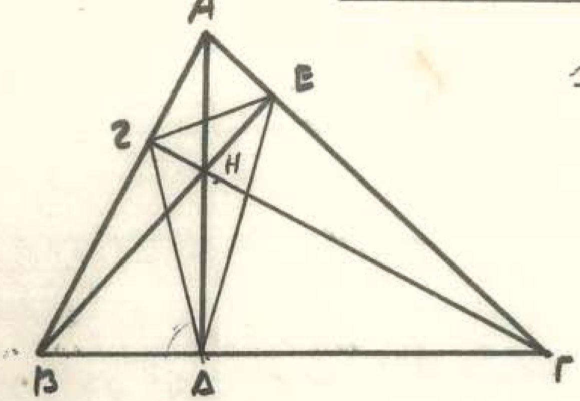
$\hat{BOH'} = 60° \Rightarrow AH = 2OA' = OB = OA \Rightarrow \hat{AOH} = \hat{AHO} \Rightarrow \hat{A\Gamma HO} = \hat{A\Gamma HO}$
ἀφοῦ $\hat{BAH} = \hat{OA\Gamma}$.—

Ἀπόδειξις τῆς (5) Ἀσκήσεως



Ἐκ τὰ τρίγωνα AOI, AHI, $OI = HI$ (ἐξ ὑποθέσεως)
$\sphericalangle OAI = \sphericalangle HAI$. AI κοινή. Τότε
$\hat{AOI} = \hat{AHI}$. ἢ τε $\hat{AOI} = 180° - \hat{AHI}$.
Ἐν τοιαύτῃ ἔπεται ὅτι $AO = AH$. ἢ A, O, I, H ὁμοκυκλικά. Ὁμοίως $BO = BH$ ἢ B, O, I, H ὁμοκυκλικά, κλπ.
Ἀλλ' εἶναι ἀδύνατον διὰ τὸν κύκλον OIH νὰ διέρχεται μεταξὺ τῶν A, B καὶ Γ.
Ἔπεται λοιπὸν ὅτι $AO = AH$ ἢ $BO = BH$ ἢ $\Gamma O = \Gamma H$.
Ἐὰν $AO = AH$ τότε $R = 2R\sigma\upsilon\nu A$ ∴ $\sigma\upsilon\nu A = \frac{1}{2}$
ἄρα $A = 60°$.—

ΟΡΘΙΚΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ



1. ΓΩΝΙΑΙ.

$\widehat{Z\Delta B} = ZHB = A$

$E\Delta\Gamma = EH\Gamma = A$ $\Longrightarrow$ $\widehat{Z\Delta E} = 2^{L} - A.$

$\Delta E Z = 2^{L} - B$

$E Z \Delta = 2^{L} - \Gamma$

2. ΠΛΕΥΡΑΙ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων AZE, $AB\Gamma$

$\rightarrow. \ \frac{ZE}{B\Gamma} = \frac{AE}{BA} \rightarrow ZE = \frac{\alpha}{\gamma} AE$

Ἐξ ἄλλου $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta(AE) \rightarrow AE = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta}$

κατὰ ταῦτα $ZE = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \cdot \alpha$

$\Delta Z = \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \cdot \beta$

$\Delta E = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} \cdot \gamma.$

3. ΕΜΒΑΔΟΝ.

$E_{o\rho\vartheta} = E - E_A - E_B - E_\Gamma \rightarrow \frac{E_{o\rho\vartheta}}{E} = 1 - \frac{E_A}{E} - \frac{E_B}{E} - \frac{E_\Gamma}{E}$

ἀλλὰ $\frac{E_A}{E} = \frac{[illegible] \cdot (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2) \cdot (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{[illegible] \cdot 2\beta} : \beta\gamma = \frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}{4\beta^2\gamma^2} = \frac{[\alpha(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)]^2}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$\frac{E_B}{E} = \frac{[\beta(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)]^2}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$\frac{E_\Gamma}{E} = \frac{[\gamma(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)]^2}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$$E_{o\rho\vartheta} = E \cdot \frac{4\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \{\alpha^2(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2 + \beta^2(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)^2 + \gamma^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2\}}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$$E_{o\rho\vartheta} = E \cdot \frac{(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

4. ΑΚΤΙΣ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ.

Περιφ. $\Delta E Z$ = περιφ. 9. σημ. τοῦ $AB\Gamma$. ὥστε $R_{o\rho\vartheta} = \frac{R}{2}$.

5. ΑΚΤΙΣ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ.

Ἐκ τοῦ τύπου $E_{o\rho\vartheta} = \tau_{o\rho\vartheta} \cdot \rho_{o\rho\vartheta}$.

6. ΑΚΤΙΝΕΣ ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ

$$\frac{E_{AZE}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{\rho_\tau^2}{v_\tau^2} ; \quad \frac{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\gamma}}{\beta\gamma} = \left(\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)^2$$

$$\frac{\rho_\tau}{v_\tau} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \rightarrow \rho_{\tau_{o\rho\vartheta}} = \frac{2E}{\alpha}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = E\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\rho_\beta = \qquad = E\cdot\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\rho_\gamma = \qquad = E\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}.$$

7. ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ ΟΡΘΙΚΟΥ

$$2\tau_{o\rho\vartheta} = \frac{\Sigma\,\alpha^2(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{4\alpha\beta\gamma}$$

8. ΑΝΩΤΕΡΑ ΤΜΗΜΑΤΑ των ΥΨΩΝ

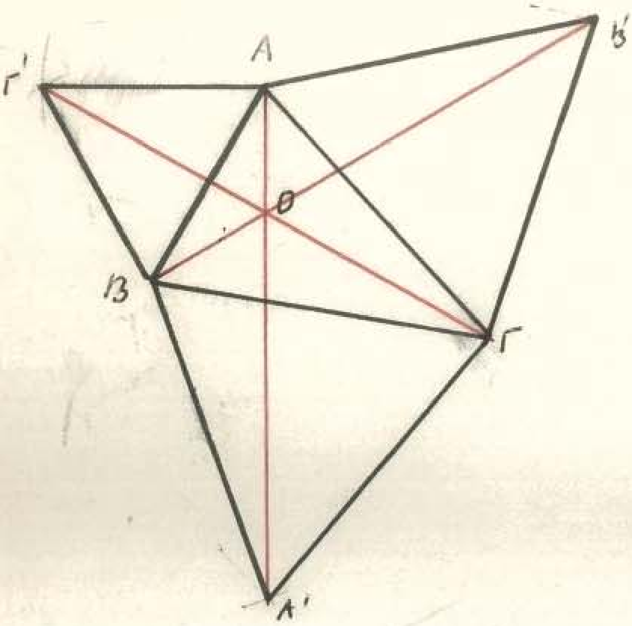
$$AH\cdot v_\alpha = \gamma\cdot AZ \rightarrow AH = \frac{\gamma}{v_\alpha}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\gamma} = \frac{\alpha(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{4E}.$$

$$BH = \qquad = \frac{\beta(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)}{4E}$$

$$\Gamma H = \qquad = \frac{\gamma(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}{4E}$$

ΣΗΜΕΙΟΝ ΤΟΥ STEINER

1



1. Επί των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ', ΒΓΑ', ΓΑΒ' δ.ξ.ό. αι ευθείαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διά του αυτού σημείου Ο. (σημείον Steiner.) και έκαστη σχηματίζει την γωνίαν των δύο άλλων —

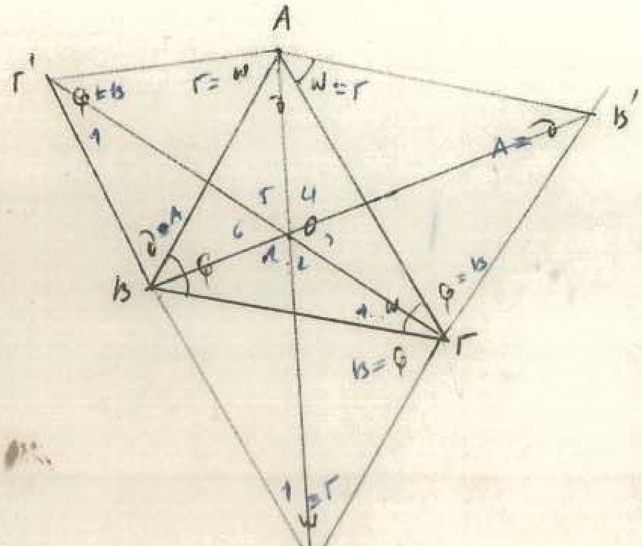
Απόδειξη. τρίγωνον $A\Gamma'\Gamma = AB B'$. συνεπώς $\Gamma\Gamma' = BB'$ γω. $B\hat{A}O = BAA'$

2. όταν $A < 120°$ το Ο εσωτερικόν του τριγώνου. — και βλέπει τας πλευράς υπό γωνίας 120° —

1'

2 3. Το θεώρημα επαληθεύεται και όταν αι τρίτες κορυφαί των ΑΒΓ', ΒΓΑ', ΓΑΒ' κείνται προς το εσωτερικόν του τριγώνου.

3 4. Το θεώρημα ισχύει και αν αντί ισοπλεύρων τριγώνων κατασκευάσομεν τρίγωνα όμοια του ΑΒΓ τοιούτα ώστε αι γωνίαι αυτών της μιας κορυφής Α να ισούνται προς την Γ αι δε της κορυφής Γ προς την Β και αι της κορυφής Β προς την Α —



Επί των ομοίων τριγώνων ΒΓ'Γ ΑΒΑ' έχομεν $\frac{B\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{AB}{A'B}$ και επειδή $\theta+\varphi = \varphi+\theta$ → $B\hat{A}\Delta'$ ομ. ΑΒΑ' → $\Gamma_1 = A_1$, $A_1' = \Gamma_1$ τα τετράπλευρα ΟΑΓ'Β, ΟΒΑ'Γ εγγράψιμα. άρα

$AOB = 180 - B$, $BO\Gamma = 180 - \Gamma$

ΒΒ' ΑΑ', ΓΓ' τέμνονται εις Ο

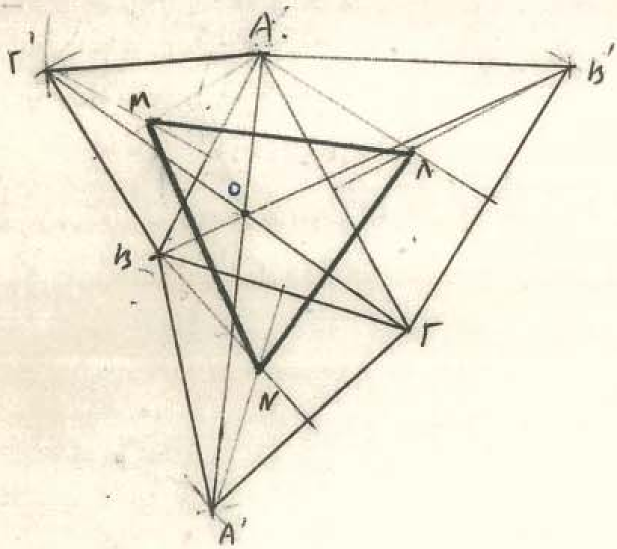
Επειδή $AO\Gamma = 360 - AOB - BO\Gamma = 180 - A$ και $AB'A = A$ → τετράπλευρον ΑΟΓΒ' εγγράψιμον άρα $O_3 = \omega = \Gamma$

Επί $BO\Gamma = 180 - \Gamma$ → ΒΟΒ' ευθεία

Ίδιον και ταύτη ευθείαι ΑΑ', ΒΒ' ΓΓ'

Διέρχονται διά του αυτού σημείου Ο τα τόξα θεάσεως
τα τμήματα ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ υπό γωνίας 180−Γ, 180−Α, 180−Β
αντιστοίχως.
Εάν ∢Α < 180−Γ τότε ο [illegible] εντός του ΑΒΓ
Εάν ∢Α = 180−Γ τότε ο [illegible] επί της κορυφής Α.
Εάν ∢Α > 180−Γ τότε Ο → εκτός του ΑΒΓ.
Εάν τα Α, Β, Γ [illegible] η ευθεία
$\sphericalangle BO\Gamma = \sphericalangle AO\Gamma = 60^\circ$ και $BO\Gamma = 120^\circ$ και ισχύει
$AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$.

4 5.



Τα κέντρα Ν, Λ, Μ των ισοπλ. τριγώνων είναι κορυφαί ισοπλεύρου τριγώνου

$$\frac{MA}{AB} = \frac{A\Lambda}{AB'} \text{ και } MA\Lambda = \sphericalangle BAB' = A + 60^\circ$$

$$\rightsquigarrow \overset{\triangle}{MA\Lambda} \simeq \overset{\triangle}{ABB'}$$

$$\rightsquigarrow \frac{M\Lambda}{BB'} = \frac{MA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

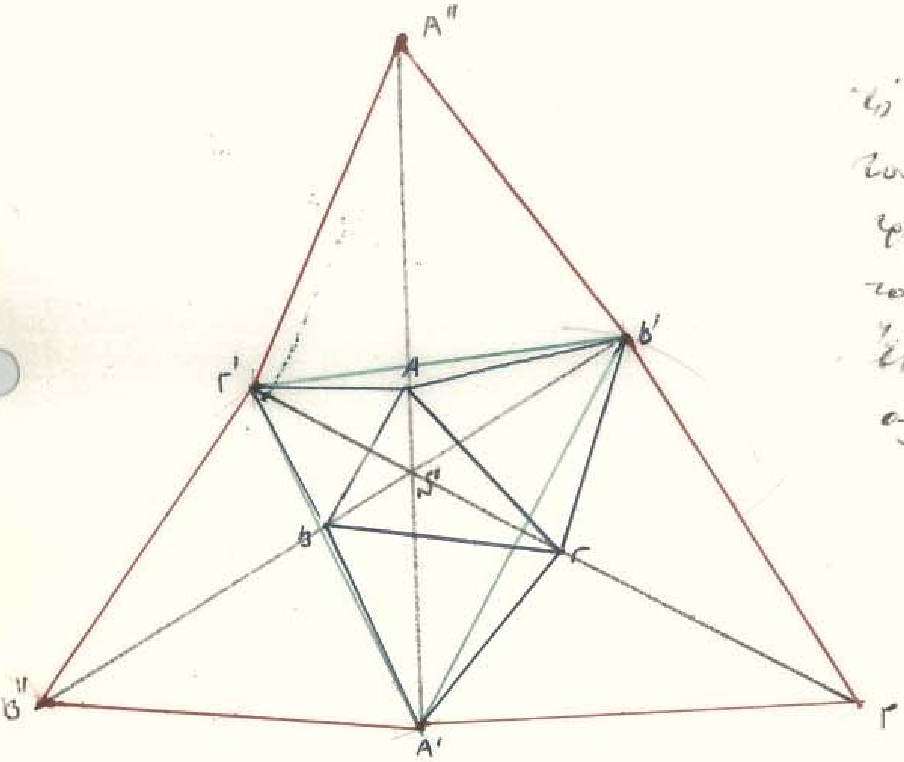
ομοίως $\frac{MN}{\Gamma\Gamma'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{N\Lambda}{AA'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

επειδή $\frac{M\Lambda}{BB'} = \frac{MN}{\Gamma\Gamma'} = \frac{N\Lambda}{AA'}$ έπεται $M\Lambda = \Lambda N = NM$.

5 6. Υπολογισμός των ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'.

Είναι $O\Gamma' = OA + OB$ άρα $\Gamma\Gamma' = OA + OB + O\Gamma$. Έστω
$OA = x$, $OB = y$, $O\Gamma = z$ τότε
$x^2 + xy + y^2 = \gamma^2$, $y^2 + yz + z^2 = \alpha^2$, $z^2 + zx + x^2 = \beta^2$
επειδή τα x, y, z [illegible] του συστήματος.

Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν κορυφῶν Α',Β',Γ' τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων Α'ΒΓ, Β'ΓΑ, Γ'ΑΒ τῶν κατασκευαζομένων ἐξωτερικῶς τῆς τριγ. ΑΒΓ.—



Ἐάν S εἶναι σημεῖον τοῦ Steiner καὶ τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.
καὶ Α',S,Α,Α'' συνευθειακά
ἔχω $SA' + SB' + S\Gamma' = A''A'$
ἀλλά $SA' = SB + S\Gamma$
$SB' = SA + S\Gamma$
$S\Gamma' = SA + SB$ καὶ
$A''A' = 2(SA + SB + S\Gamma)$
ἤτοι $A''A' = 2AA'$ δηλαδή
Α μέσον τῆς Α'Α''.

Σύνθεσις.

Κατασκευάζω τά Α''Β'Γ', Β''Γ'Α', Γ''Α'Β'. καὶ λαμβάνω τα μέσα τῶν Α'Α'', Β'Β'', Γ'Γ''. ὅτι τό ΑΒΓ τό ζητούμενον.—

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΟΔΗΓΙΑΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

1.Εάν εἰς τρίγωνον δίδεται Διάμεσος.
α.Προεκτείνωμεν τήν διάμεσον καθ ἑαυτήν.
β.Χρησιμοποιοῦμεν τά Θεωρήματα τῶν Διαμέσων.
γ.Χρησιμοποιοῦμεν τήν ἰδιότητα ὅτι ἐμβAMB=$AM\Gamma$.
2.Εάν δίδεται Διχοτόμος.
α. Χρησιμοποιοῦμεν τό Θεώρημα τῶν Διχοτόμων.
β. Η Διχοτόμος διέρχεται διά τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΒΓ.
3. Εάν δίδεται τό ὕψος.
α. Τό συμμ. τοῦ Η κεῖται ἐπί τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.
β. Χρησιμοποιοῦμεν τούς τύπους $\alpha\upsilon_\alpha = 2E$, $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$.
4. Ἐάν δίδεται;
1.Τό $\beta+\gamma$ Προεκτείνομεν τήν β κατά γ.
2.τό $\beta-\gamma$ Επί τοῦ β λαμβάνομεν τμῆμα γ.
3. τό $\beta^2+\gamma^2$ Εφαρμόζομεν τό α΄θεώρημα τῶν διαμέσων.
4.τό $\beta^2-\gamma^2$ " " β΄ " " "
5. τό β/γ Θεωροῦμεν τήν Απολλωνειον Περιφέρειαν.
6. τό $\beta\gamma$ Χρησιμοποιοῦμεν τούς τύπους $\beta\gamma=2R\upsilon_\alpha$; $\beta\gamma=\delta^2+\chi\psi$.

6: Εάν δίδεται ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.
α. Χρησιμοποιοῦμεν τόν τύπον $E=\tau\rho$.
β. " " " $A\Delta=\tau-\alpha$.
6: Εάν δίδεται ἡ διαφορά τῶν γωνιῶν Β-Γ.
Χρησιμοποιοῦμεν τάς σχέσεις:
1. $\widehat{\upsilon\delta} = B-\Gamma/2$
2. $\widehat{\upsilon 2R} = B-\Gamma$
3. $\widehat{\Gamma A B} = 180-(B-\Gamma)$ ἐνῶ $\gamma\Gamma'$ τό συμμ.τοῦ Γ ὡς πρός τήν ΑχIIΒΓ
4. $\widehat{\Delta Z E} = B-\Gamma$ αν ΑΔ ὕψος,ΑΕ διάμεσος,Ζ μέσον τῆς ΑΓ.
5. $\widehat{AOE}=180-(B-\Gamma)/2$ ΑΕ διχοτόμος τῆς Α.
6. $\widehat{ABH}=B-\Gamma$ ενῶ ΑΗIIΒΓ καί Η ἐπί τῆς (OR)
7. $\widehat{H\Gamma B'} = 90-(B-\Gamma)/2$ ἐνῶ $BAB'=\beta+\gamma$
8. $\widehat{\Theta B\Gamma}=(B-\Gamma)/2$ ἐνῶ ἐπί τῆς ΑΓ λάβωμεν ΑΘ=ΑΒ.

7. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ.
1.Νά ἀχθῆ μεσοκάθετος εἰς δοθέν εὐθύγραμμον τμῆμα.
2.Νά ἀχθῆ κάθετος εἰς δοθέν σημεῖον εὐθ. τμήματος.
3΄Να εὑρεθῆ τό μέσον δοθέντος τόξου.
4.Νά κατασκευασθῆ γωνία ἴση μέ δοθεῖσαν.
5.Νά γραφῆ τόξον δοθείσης χορδῆς καί γωνίας.
6.Νά ἀχθῆ ἐκ σημείου παράλληλος πρός εὐθεῖαν.
7.Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον εκ τριῶν πλευρῶν.
8. " " " τῶν β,γ Α.
9. " " " " α,Β,Γ.
10.Νά κατασκευασθῆ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α,β γ.
11.Νά κατασκευασθῆ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν α,β.

12. Νά κατασκευασθῇ τό τμῆμα $x=\alpha\sqrt{\mu}$ ἔνθα μ δοθεῖς ἀριθμός.
13. Εκ σημείου φέρετε ἐφαπτομένην πρός περιφέρειαν.
14. Νά ἀχθῆ κοινή ἐξωτ. ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.
15. Νά γραφῆ περιφέρεια διά τριῶν δοθέντων σημείων.

-Χρησιμοποιούμενα ὄργανα: ΚΑΝΩΝ, ΔΙΑΒΗΤΗΣ.

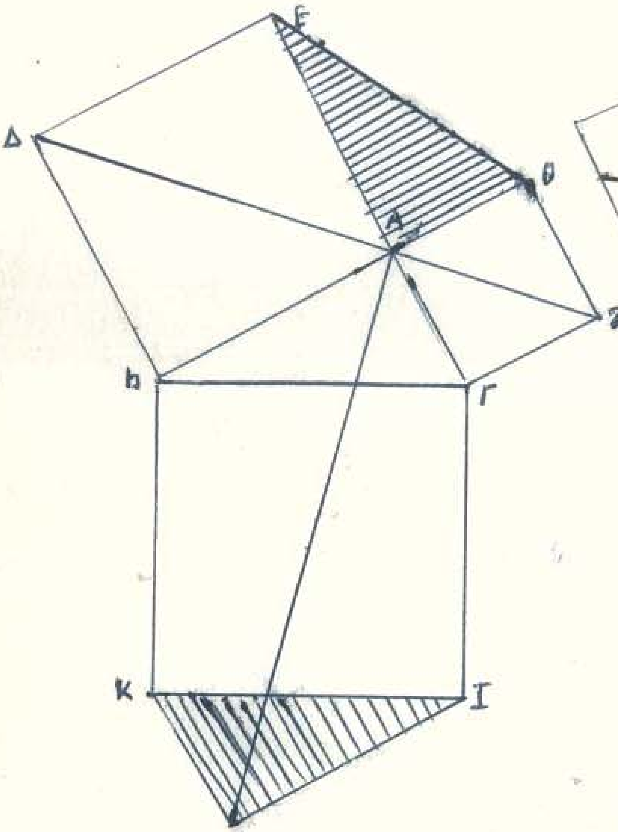
Δ Ι Ε Ρ Ε Υ Ν Η Σ Ι Σ.

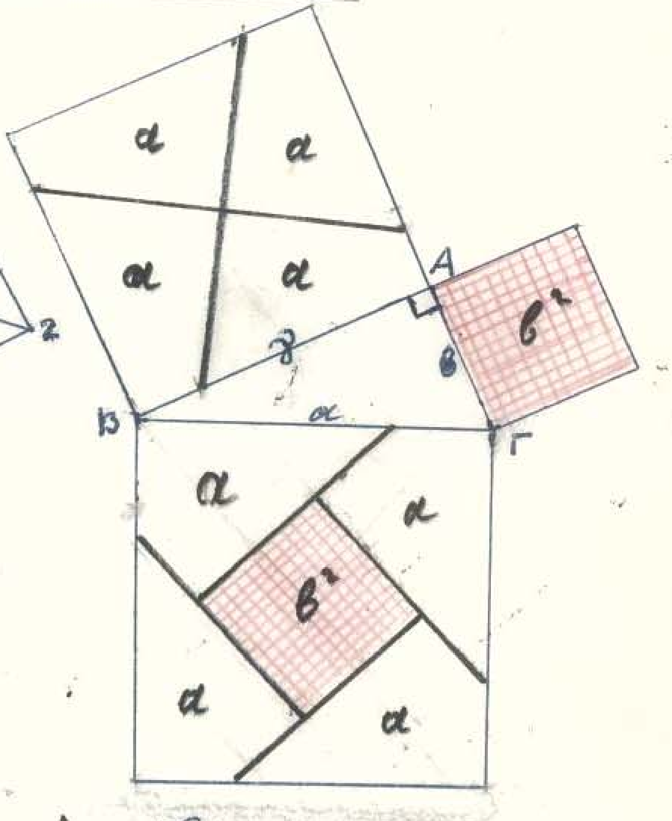
Κατ'αὐτήν ἐρευνῶμεν ἄν μέ τά δεδομένα στοιχεῖα ἔχομεν μίαν ἤ καί περισσοτέρας λύσεις τοῦ ζητουμένου. Οὕτωςἐξετάζομεν ἄν ἑκάστη τῶν ἐπί μέρους κατασκευῶν ὑπόκειται εἰς περιορισμούς ἤ ὄχι καί τελικῶς προσπαθοῦμεν νά εὕρωμεν τάς ἀναγκαίας καί ἱκανάς συνθήκας, τάς ὁποίας δέον νά πληροῦν τά δεδομένα, ἵνα τό πρόβλημα δέχεται μίαν ἤ ἴσως καί περισσοτέρας λύσεις.

-Αν τά δεδομένα στοιχεῖα περιλαμβάνουν καί γωνίας, μία καλή διερεύνησις θά πρέπη νά περιλαμβάνη καί τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Απαιτεῖται λοιπόν ἀρκετή πεῖρα καί προσοχή.

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ἐπὶ τῆς Θεωρίας τοῦ VECTEN.

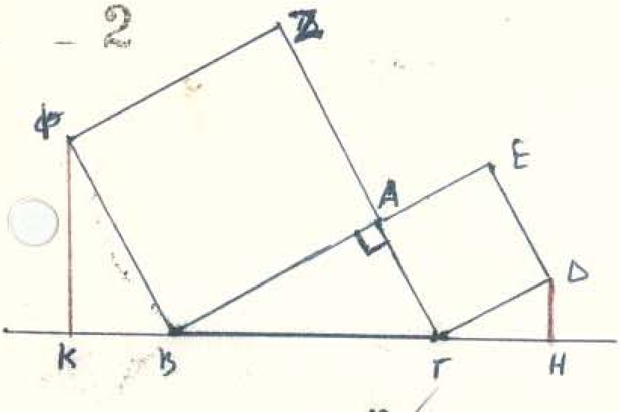
1 ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ





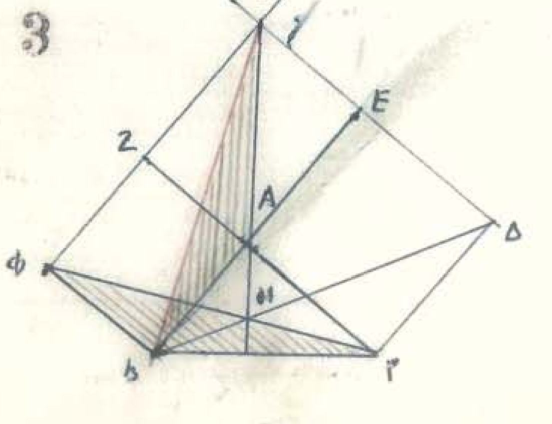
Πρόδηλος ἀπόδειξις ἀπορρέουσα ἐκ τῆς ἐποπτείας τοῦ σχήματος.—

2



— Δξ ὅτι $(\Delta H)+(\Phi K)=(B\Gamma)$

3

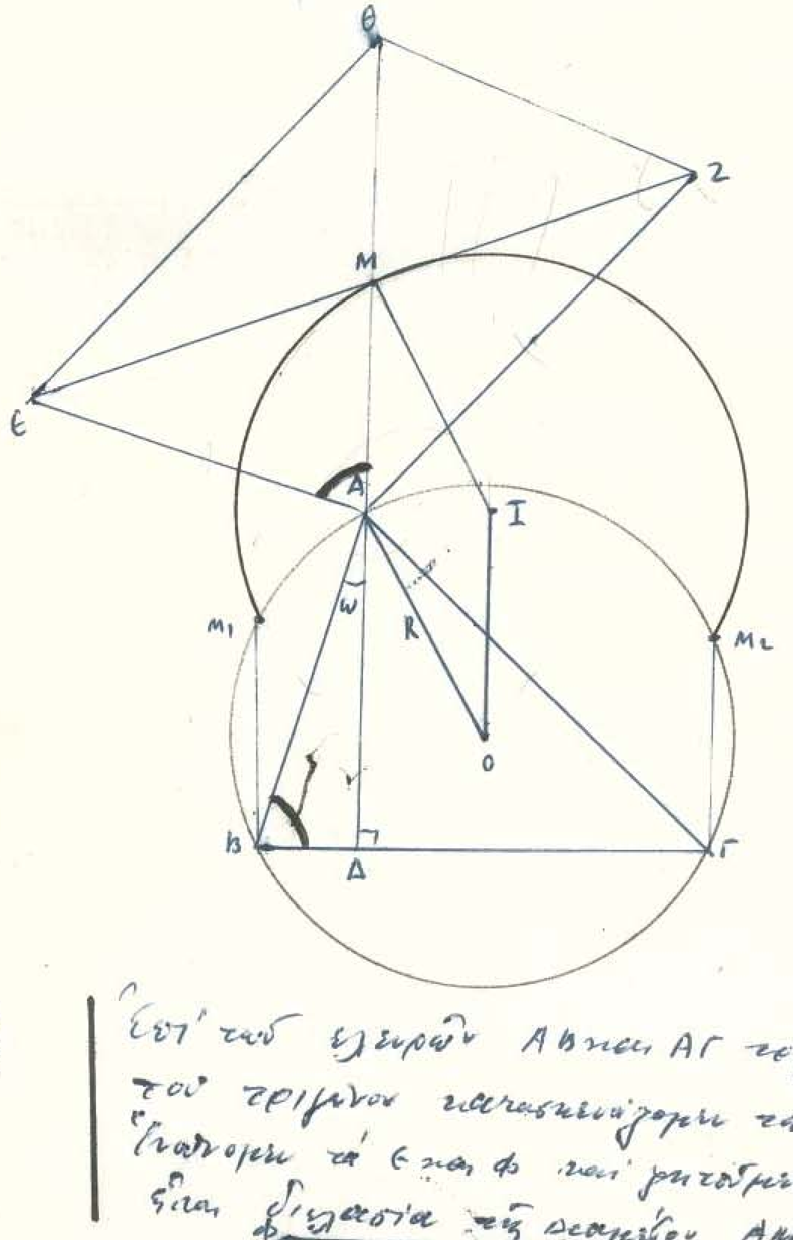


— Δξ ὅτι:

(i) ΔΕ, ΦΖ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΗ.

(ii) Αἱ ΡΑ, ΒΔ, ΓΦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.—

4 Τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρά ΒΓ = α σταθερά θέσει καί μεγέθει, ἡ δέ ἀπέναντι γωνία Α σταθερά μεγέθει. Ἄγομεν τήν κάθετον ΑΕ ἐπί τήν ΑΒ ὥστε νά εἶναι ΑΕ=ΑΒ. Ὁμοίως τήν κάθετον ΑΖ ἐπί τήν ΑΓ ὥστε νά εἶναι ΑΖ = ΑΓ. Ἐάν Μ εἶναι τό μέσον τῆς ΕΖ, νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.



Εἶναι ΑΘ = ΒΓ

$AM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$

ΜΑΔ ⊥ ΒΓ

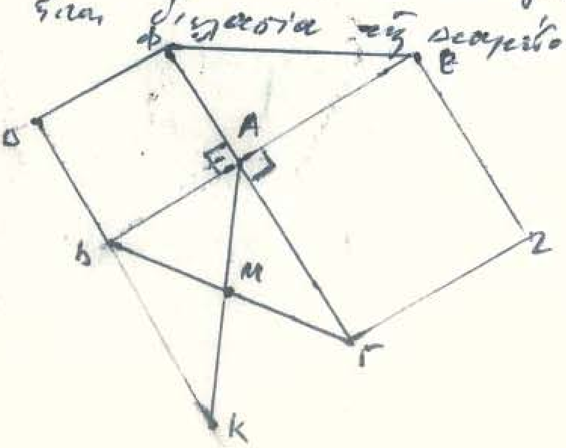
τό ΑΜ παραμένει παράλληλον ἑαυτῷ.

Λαμβάνω $OI \perp AM = \frac{\alpha}{2}$

ὁπότε ΙΜ ∥= ΟΑ = R

Συνεπῶς τό Μ ἐπί περιφερείας (Ι, R) μέ ὁριακά σημεῖα τά M_1 καί M_2 ἐπί $M_1B \parallel M_2\Gamma \perp B\Gamma$.

5 Ἐπί τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ καί ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν τά τετράγωνα ΑΒΔΦ καί ΑΓΖΕ. Ἑνώνομεν τά Ε καί Φ καί ζητοῦμεν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΕΦ εἶναι διπλασία τῆς διαμέσου ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Ἀπόδειξις.

Τρίγωνον ΑΦΕ = τριγ. ΑΒΚ

διότι ΑΦ = ΑΒ, ΑΕ = ΒΓ (= ΑΓ)

∢ ΦΑΕ = ΑΒ̂Κ (= 180° − Α)

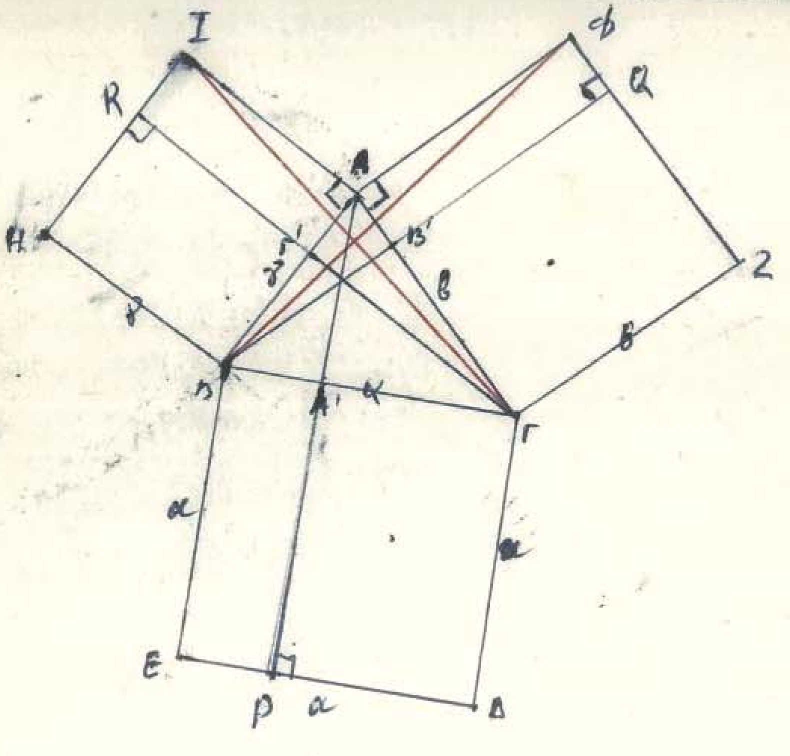
Συνεπῶς (ΦΕ) = 2(ΑΜ)

6 Θεωροῦμεν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ὀξείας γωνίας καὶ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου τὰ τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΓΑΦΖ καὶ ΑΒΗΙ. Τὰ ὕψη ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς ΔΕ, ΦΖ καὶ ΗΙ εἰς τὰ σημεῖα Ρ, Q, R.

1ο. Συγκρίνατε τὰ τρίγωνα ΑΒΦ καὶ ΑΙΓ. Ἔπειτα τὰ ὀρθογώνια ΑΒ'QΦ καὶ ΑΓ'RΙ.

2ο. Δείξατε ὅτι τὸ τετράγωνον ΒΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἠλαττωμένων κατὰ δύο φορὰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ'RΙ.

3ο. Ἀποδείξατε ἐκ τούτων ἡ σχέσις $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.



Ἀπόδειξις.

1ο $\overset{\triangle}{ΑΒΦ} = \overset{\triangle}{ΑΙΓ}$.

2ο. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΒ', ΑΓΓ' ἔχω $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{ΑΓ'}{ΑΒ'} \Rightarrow \beta \cdot ΑΒ' = \gamma \cdot ΑΓ'$ ἄρα ὀρθογώνια ΑΒ'QΦ $\simeq$ ΑΓ'RΙ.

2ο: Ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΒΑ'Β'Α ἔχω $ΓΑ' \cdot \alpha = ΓΒ' \cdot \beta$ ἄρα ὀρθ. Α'ΓΔΡ $\simeq$ ΓΒ'QΖ. (1)

Ἐκ τοῦ Α'Γ'ΑΓ ἔχω $ΒΑ' \cdot \alpha = ΒΓ' \cdot \gamma$ ἄρα

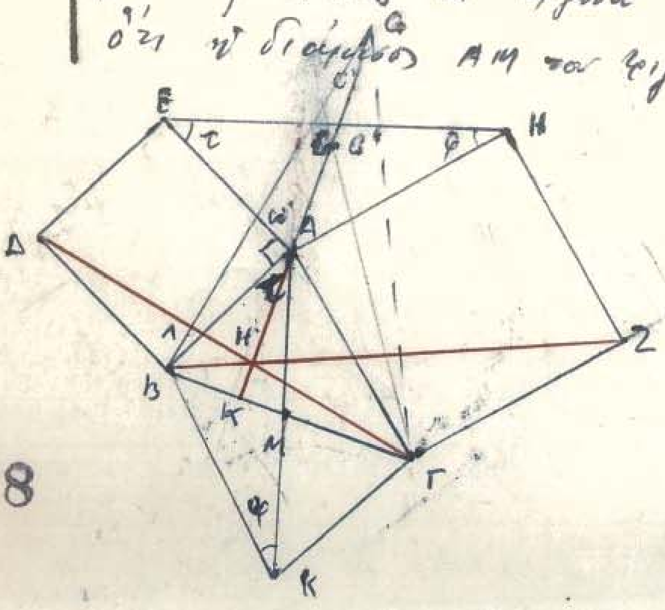
(ΒΕΡΑ') $\simeq$ (ΒΗRΓ') (2) ἀφ' ὅπου διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνω

$\alpha^2 = (ΓΒ'QΖ) + (ΒΗRΓ') \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 - (ΑΒ'QΦ) + \gamma^2 - (ΑΓ'RΙ) \Rightarrow$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2(ΑΓ'RΙ)$.

3ο. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \gamma (ΑΓ') = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma\beta\sigma\upsilon\nu A$. (ἀφοῦ $ΑΓ' = \beta\sigma\upsilon\nu A$)

7 Ἐκτὸς τῶν πλευρῶν AB καὶ AΓ τριγώνου ABΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ 4γωνα ABΔE καὶ AΓZH. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διάμεσος AM τοῦ τριγ. ABΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν EH.



Ἀπόδειξη.

$\tau + \omega = 1^L$

$\Longrightarrow AM \perp EH$

8 **Σημείωσις.** Ἡ ὑπ' τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δείξτε ὅτι αἱ εὐθεῖαι BZ καὶ ΓΔ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους AK.

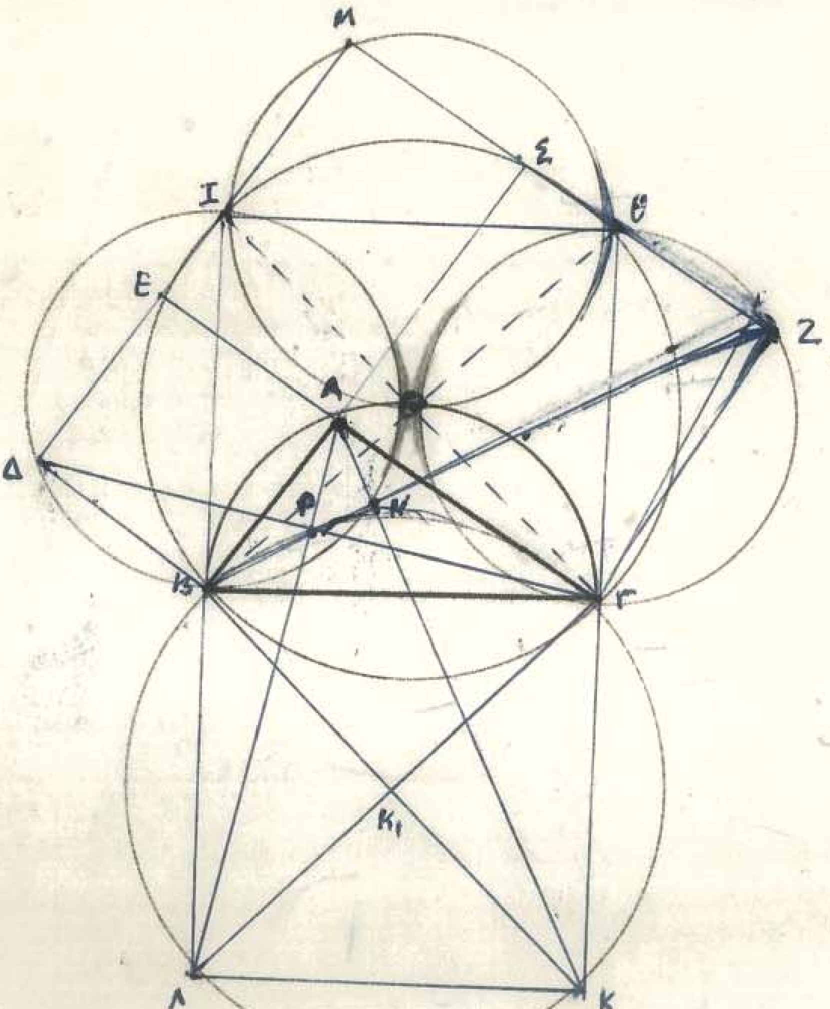
Ἀπόδειξη τῆς (8)

Ἐκ τοῦ B φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓZ καὶ κατόπιν προεκτείνομεν τὰς BΛ καὶ KA αὗται τέμνονται εἰς Θ. Ἔχω τρίγωνα BΓΔ = τριγ. ABZ. Συνεπῶς AZ = BΓ. Ἐὰν τώρα φέρομεν ἐκ τοῦ Γ τὴν ΓM ⊥ BZ καὶ κατόπιν προεκτείνομεν τὰς ΓM καὶ KA αὗται τέμνονται εἰς Θ' θὰ λάβωμεν τὸ τρίγωνον Θ'AΓ = τριγ. BΓZ. Συνεπῶς AΘ' = BΓ. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται ὅτι AΘ = AΘ' ἤτοι Θ ≡ Θ' ἄρα ὅπως ἀπεδείξαμεν αἱ εὐθεῖαι AK, BZ, ΓZ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου BΓΘ καὶ ὅσο-σα τέμνονται εἰς τὸ H.

9 Δίδεται ημικύκλιον διαμέτρου ΒΓ. Εν σημείον Α διαγράφει τό τόξον αυτού. Εξωτερικώς του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τά τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΣ καί ΒΓΚΛ. Εάν Μ, Ν καί Ρ είναι τά σημεία τομής τού ΔΕ καί ΖΣ, ΒΖ καί ΑΚ, ΑΛ καί ΓΔ αντιστοίχως.

1°. Νά ευρεθή ο τόπος του σημείου Δ
2° Ε
3° Ζ
4° Ν
5° Ρ
6° Μ.

Απόδειξη



Κατασκευάζομεν το τετράγωνον ΒΙΘΓ.

∢ ΙΔΒ = ∢ ΒΑΓ = 90° επομένως τού Δ περιφέρεια διαμέτρου ΒΙ.

2°. ∢ ΓΕΙ = 90° επομένως του Ε περιφ. διαμ. ΓΙ.

3°. ∢ ΓΖΘ = ∢ ΓΑΒ = 90° ⇒ Ζ επί περιφ. διαμέτρου ΓΘ.

4°. τρίγωνον ΒΓΖ = ΑΓΚ διότι ∢ ΒΓΖ = ∢ ΑΓΚ = 90°+Γ ⇒ ∢ ΓΒΖ = ∢ ΓΚΑ ή ∢ ΓΒΝ = ∢ ΓΚΝ άρα τετράπλευρον ΒΝΓΚ εγγράψιμον διότι ∢ ΒΝΚ = ∢ ΒΓΚ = 90° ⇒ Ν επί περιφ. διαμ. ΒΚ.

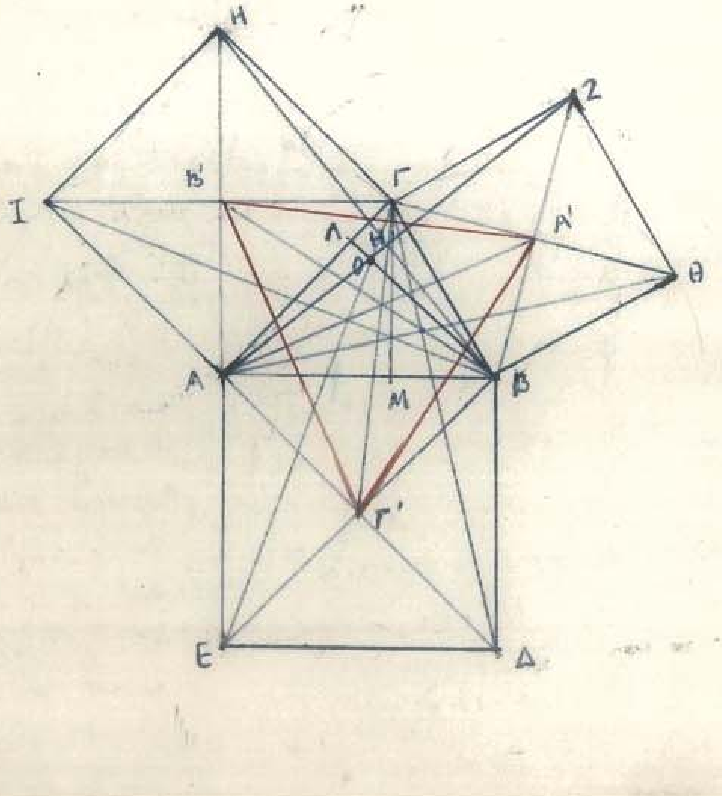
5°. τρίγ. ΔΒΓ = τρίγ. ΑΒΛ (ΔΒ = ΑΒ, ΒΓ = ΒΛ, ΔΒΓ = ∢ ΑΒΛ = 90°+Β ⇒ ∢ ΔΓΒ = ∢ ΒΛΑ ή ∢ ΡΓΒ = ∢ ΒΛΡ άρα τετράπλευρον ΒΡΓΛ εγγράψιμον διό ∢ ΛΡΓ = ∢ ΛΒΓ = 90° επομένως Ρ επί περιφ. διαμέτρου ΛΓ.

6°. Επειδή ΣΖ ⊥ ΖΓ καί ΘΖ ⊥ ΖΓ, τα σημεία Σ, Θ, Ζ θα κείνται επ' ευθείας. Αί $\overline{ΖΘΣ}$, $\overline{ΔΕΙ}$ τέμνονται επί Μ. Τούτο είναι τό σημείον του τόπου. Προφανώς, είναι ∢ ΙΜΘ = 90° → Μ επί περιφερείας ΙΘ. —

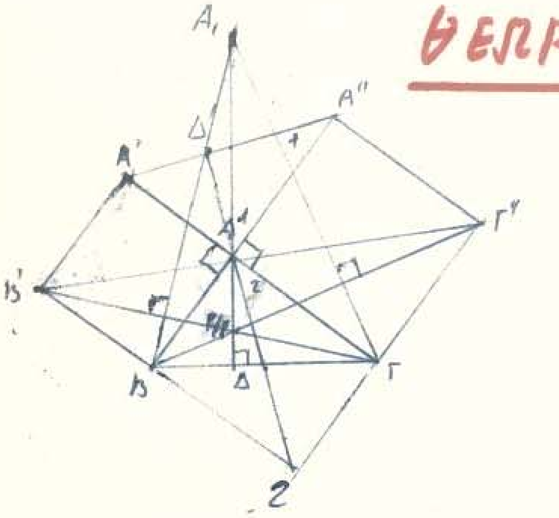
ΘΕΩΡΗΜΑ τοῦ VECTEN

10 Ἐπί τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τρία 4γωνα ΑΔ, ΒΖ, ΓΙ. Δ.ὅ. ὅτι:

1. Ἐάν ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου φέρωμεν καθέτους ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ ἐπί τάς ἀπέναντι πλευράς, ἡ καί τάς εὐθείας ΑΘ, ΒΙ, ΒΗ, ΓΔ, ΓΕ, ΑΖ αἱ δύο πρῶται τέμνονται εἰς Ρ ἐπί τῆς ΓΜ, αἱ ἑπόμεναι δύο εἰς Ν ἐπί τῆς ΑΚ καί αἱ δύο τελευταῖαι εἰς Ο ἐπί τῆς ΒΛ.
2. Αἱ ἡ αὐταί εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας, ἀνά δύο. ἡ ΓΔ⊥ΑΘ ΑΖ⊥ΒΗ, ΒΙ⊥ΓΕ. Ἔστωσαν Π, Ρ, Σ τά σημεῖα τομῆς τῶν ζευγῶν τῶν εὐθειῶν τούτων.
3. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΙΘ, ΗΔ διέρχονται διά τῶν σημείων Π, Ρ, Σ ἀντιστοίχως καί διχοτομοῦν τάς εἰς τά σημεῖα αὐτά γωνίας τῶν προη-γουμένων ἡ εὐθειῶν.
4. Αἱ εὐθεῖαι ΑΣ, ΒΠ, ΓΡ τέμνονται εἰς τό αὐτό σημεῖον Τ, εἶναι κάθετοι ἐπί τάς ΔΗ, ΕΖ, ΘΙ ἀντιστοίχως καί διέρχονται διά τῶν κέντρων τῶν τετραγώνων.
5. Αἱ εὐθεῖαι ΔΘ, ΖΗ, ΙΕ μετά τῶν σημείων Α, Β, Γ σχηματίζουν τρία τρίγωνα, τά ΔΒΘ, ΖΓΗ, ΙΑΕ, ἰσοδύναμα πρός ἄλληλα καί πρός τό ΑΒΓ.
6. Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν τελευταίων εὐθειῶν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ. Ἐπίσης ἄν ΑΒ=ΒΑ', ΒΓ=ΓΒ', ΓΑ=ΑΓ' θα εἶναι $A'\Gamma^2+B'A^2+\Gamma'B^2=3(AB^2+B\Gamma^2+\Gamma A^2)$
7. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν κέντρων Α', Β', Γ' τῶν ἐπί τῶν πλευρῶν του κατασκευαζομένων τετραγώνων.



ΘΕΩΡΗΜΑ VECTEN.



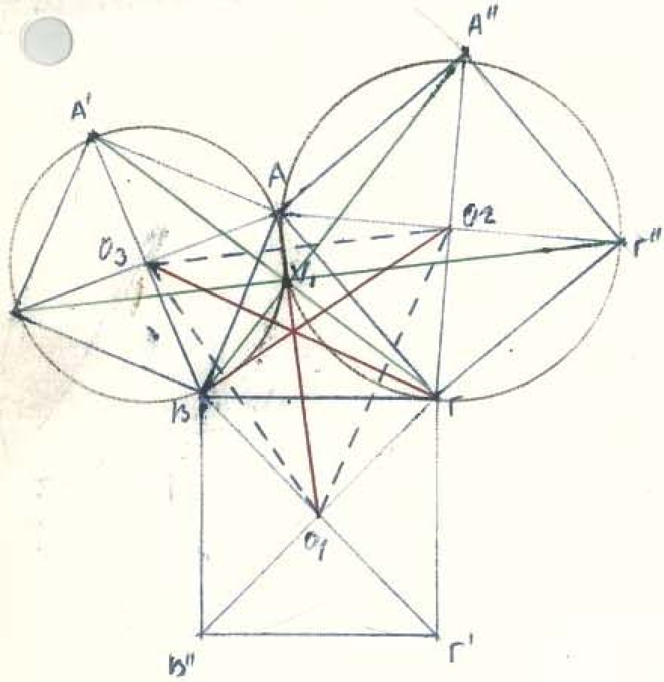
• (i) $A'A'' = 2(A\Delta)$

Απόδειξη. Λαμβάνω $\Delta Z = AZ$ τότε τρίγ. $AA'A''$ = τρίγ. ABZ διότι $AA' = AB$, $AA'' = BZ$ και $\hat{A'AA''} = \hat{ABZ}$ ως παραπληρώματα της $\hat{A}$. Επομένως $A'A'' = AZ = 2(A\Delta)$

• (ii) $A\Delta \perp A'A''$.

Απόδειξη. $\hat{A_1''} = \hat{A_2}$ .. έχομεν $\hat{A_1''} + \hat{A_1} = \hat{A_2} + \hat{A_1} = 1^L \Rightarrow A\Delta \perp A'A''$.

• (iii). Αἱ εὐθεῖαι $B\Gamma''$, $\Gamma B'$ και τὸ ὕψος AE διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Απόδειξη. Σημειώνομεν με A_1 και A_1' τα κοινά σημεία του ύψος AE με τις καθέτους από τα B και Γ της εὐθείας $\Gamma B'$ και $B\Gamma''$. Τα τρίγωνα $B\Gamma B'$, AA_1B εἶναι ἴσα διότι $BB' = BA$ και $\hat{\Gamma BB'} = \hat{BAA_1}$, $\hat{BB'\Gamma} = \hat{BA_1A}$ Επομένως $AA_1 = B\Gamma$. Ομοίως από τα ίσα τρίγωνα $B\Gamma\Gamma''$, $A_1'A\Gamma$ έχομεν $AA_1' = B\Gamma$, συνεπώς $A_1 \equiv A_1'$ Στο τρίγωνο λοιπόν $A_1B\Gamma$ οι εὐθείες $B\Gamma''$, $\Gamma B'$, AE εἶναι ὕψη. Άρα διέρχονται από το ορθόκεντρο του H_1.—

• (iv). Αἱ εὐθεῖαι $A'\Gamma''$, $A''B'$ και η διάμεσος AO διέρχονται από το αὐτό σημεῖο.

Απόδειξη. Η πρόταση αυτή εἶναι πρόταση (ii) μετά τὸ τρίγωνο $AA'A''$.—

(v). Οἱ περιγεγραμμένοι περιφ. τῶν $ABB'A'$, $A\Gamma\Gamma''A''$ και αἱ εὐθεῖαι BA'', $\Gamma A'$, $B'\Gamma''$, AO, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Απόδειξη. Σημειώνομεν με V_1 το δεύτερο σημείο των περιφερειών $ABB'A'$ και $A\Gamma\Gamma''A''$. Τα σημεία B, V_1, A'' κεῖνται ἐπ' εὐθείας διότι $\hat{BV_1A} + \hat{AV_1A''} = 135^o + 45^o = 2^L$ Ομοίως και τα σημεία Γ, V_1, A' εἶναι συνευθειακά. Επειδή $\hat{B'V_1A} + \hat{AV_1\Gamma''} = 1^L + 1^L = 2^L$ άρα και τα σημεία B', V_1, Γ'' εἶναι εὐθειακά παρατηρούμε ότι $\hat{BV_1\Gamma} = \hat{A''\Gamma''\Gamma} = 1^L$ και $\hat{BO_1\Gamma} = 1^L$ δηλαδή το τετράπλευρο $BV_1\Gamma O_1$ εἶναι ἐγγράψιμο Άρα $\hat{AV_1A''} + \hat{A''V_1\Gamma} + \hat{\Gamma V_1O_1} = 45^o + 90^o + \hat{\Gamma BO_1} = 135^o + 45^o = 2^L$ δηλαδή τα σημεία A, V_1, O κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

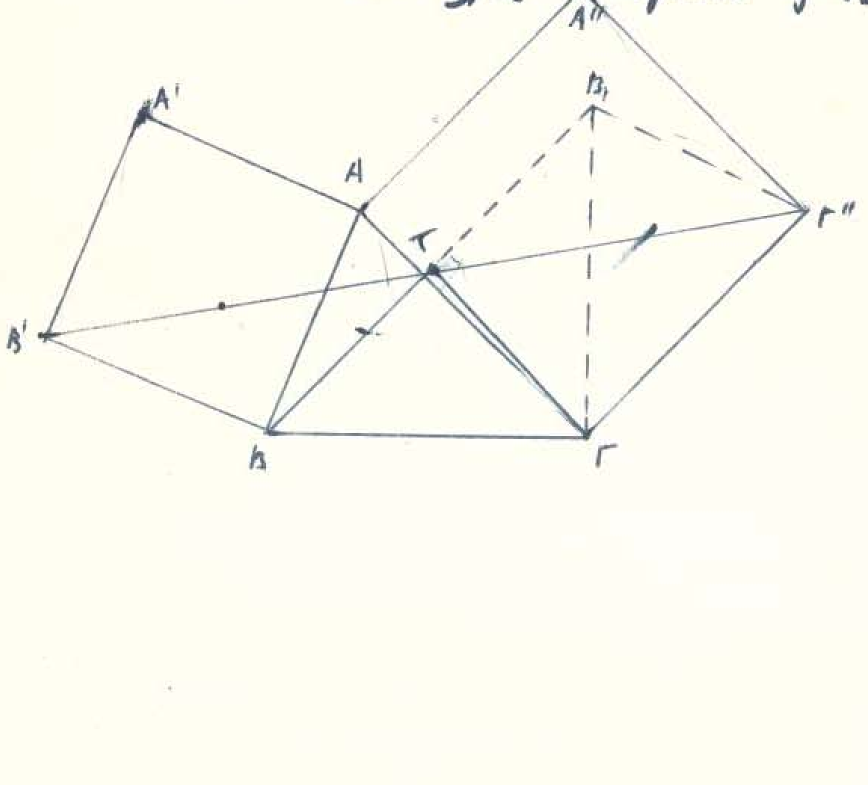
(VI) τα ευθύγραμμα τμήματα BA'', $\Gamma A'$ είναι ίσα και κάθετα.

<u>Απόδειξη.</u> τούτο έπεται από τα ίσα τρίγωνα ABA'' και $AA'\Gamma$.

(VII) Αν $O_1 O_2 O_3$ τα κέντρα των $B\Gamma\Gamma'B''$, $\Gamma AA''\Gamma''$, $ABB'A'$ τότε αι ευθείες AO_1, BO_2, ΓO_3 διέρχονται από το αυτό σημείο. V (σημ. του Vecten.) που είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $O_1 O_2 O_3$.

<u>Απόδειξη.</u> Το τμήμα AO_1 είναι η κοινή χορδή των περιφερειών $O_2 O_3$ άρα $AO_1 \perp O_2 O_3$ ομοίως $BO_2 \perp O_3 O_1$ και $\Gamma O_3 \perp O_1 O_2$ συνεπώς αι ευθείαι AO_1, BO_2, ΓO_3 διέρχονται από το ορθόκεντρο του τριγώνου $O_1 O_2 O_3$ —

(VIII) Αν Τ το μέσον του τμήματος $B'\Gamma''$. το τρίγωνον $TB\Gamma$ είναι ισοσκελές ορθογώνιο εις το Τ.

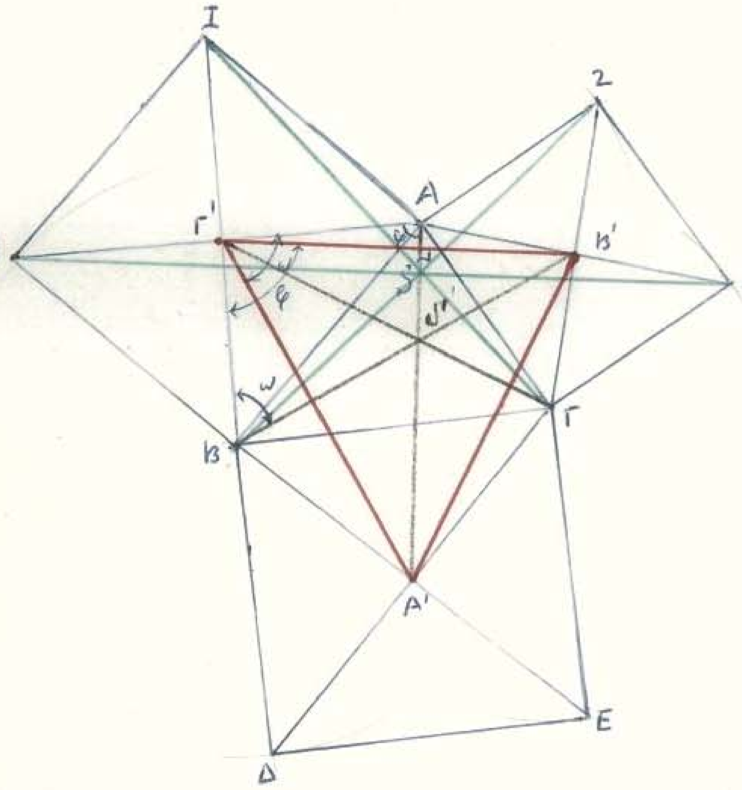


<u>Απόδειξη</u>

Λαμβάνω $TB_1 = BT$ αρκεί να δείξωμεν ότι το ΓBB_1 είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. οπότε $\widehat{BT\Gamma} = 1^L$ και $\Gamma T = \frac{1}{2} BB_1 = BT$

Τα τρίγωνα $\Gamma\Gamma''B_1$ και ΓAB είναι ίσα, διότι $\Gamma\Gamma'' = \Gamma A$, $\Gamma''B_1 = BB' = BA$ ($\Gamma''B_1$, $B'B$ → παραλληλόγραμμο) και $\widehat{\Gamma\Gamma''B_1} = \widehat{\Gamma AB}$ (έχουν τας πλευράς των καθέτους) συνεπώς $\Gamma B_1 = \Gamma B$. Επειδή και $\widehat{B\Gamma B_1} = \widehat{B\Gamma A} + \widehat{A\Gamma B_1} = \widehat{A\Gamma B_1} + \widehat{B_1\Gamma\Gamma''} = 1^L$ το τρίγωνο ΓBB_1 είναι ορθογώνιο ισοσκελές — ⅁ω

Νὰ κατασκευασθῇ 3γωνον ἐκ τῶν κέντρων τῶν 4γώνων ἅτινα κατασκευάζομεν (ἐξωτερικῶς) ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου—

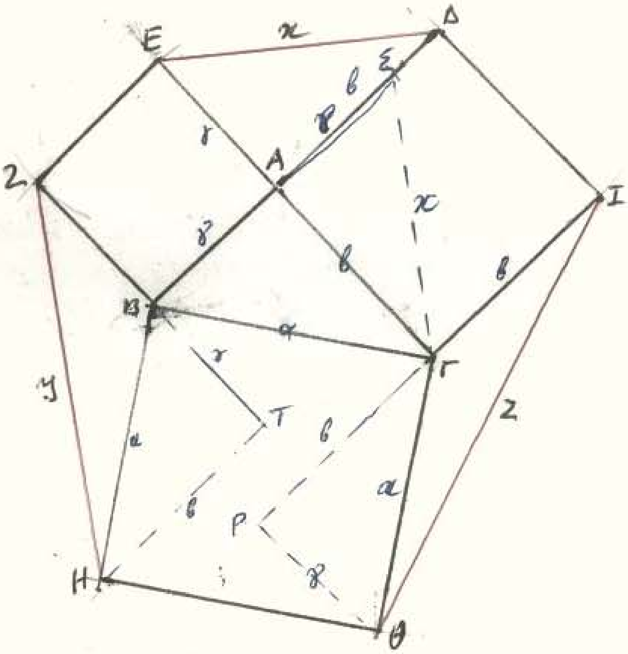


Φέρω τὰς ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'. Θὰ δείξω κατὰ πρῶτον ὅτι αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β. Αἱ ΓΙ καὶ ΒΖ τέμνονται καθέτως καὶ ἡ $\overline{ΘSΗ}$ διχοτομεῖ τὰς γωνίας ΒSΙ καὶ ∢SΖ = 1L. Φέρω τὰς ΑS καὶ SΑ'. Θὰ δείξω ὅτι ἡ ΑSΑ' εἶναι εὐθεῖα. Ἔχομεν ΑSΖ = ΑΓΖ = 45°. Ἐπίσης δὲ τοῦ ἐγγρ. ΒSΓΑ' ἔχω ΒSΑ' = ΒΓΑ' = 45° ἄρα ἡ ΑSΑ' εἶναι εὐθεῖα καὶ ἐπειδὴ $\widehat{ΘSΒ} + \widehat{ΒSΑ'} = 1L$ ἔπεται ὅτι ΑSΑ' ⊥ ΘΗ. ἢ ΑΑ' ⊥ Γ'Β' καὶ ἔτσι ΘΗ // Β'Γ'.

Ὥστε ΑΑ' ⊥ Β'Γ' ὁμοίως ΒΒ' ⊥ Γ'Α' καὶ ΓΓ' ⊥ Β'Α'. Ἐπίσης ἔχομεν $\overset{\triangle}{Α'Γ'Α} = \overset{\triangle}{Β'Γ'Β}$ καθ' ὅτι ΒΓ' = Γ'Α καὶ $\widehat{Β'ΒΓ'} = \widehat{Α'Γ'Α} = ω$, $\widehat{Α'ΑΓ'} = \widehat{Β'Γ'Β} = φ$ κατὰ ταῦτα ΑΑ' = Β'Γ' καὶ ΒΒ' = Γ'Α'. Ὁμοίως ΓΓ' = Β'Α'.

Σύνθεσις. Γράφω τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' καὶ λαμβάνω ἐπ' αὐτῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰς Β'Γ', Α'Γ', Β'Α' τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. —

Εάν επί των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάσωμεν τετράγωνα, να υπολογισθή το άθροισμα των τετραγώνων των τμημάτων των ενούντων τας γειτονικάς κορυφάς των τετραγώνων τούτων εκτός του τριγώνου.



Μεταξύ τα τρίγωνα ΑΕΔ ή ίσον ΣΑΓ.
το ΑΒΓ ή ίσον ΒΤΗ
και ΑΒΓ ή ίσον ΓΡΘ.
Τότε:

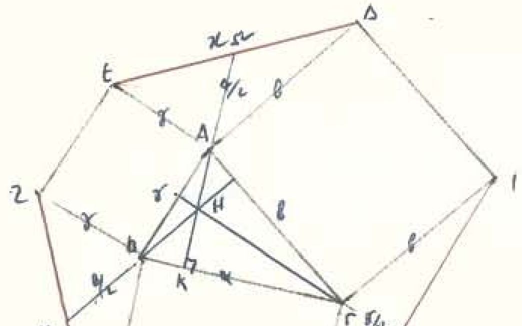
(i) $α^2+x^2 = 2β^2+2γ^2$

(ii) $β^2+y^2 = 2γ^2+2α^2$

(iii) $γ^2+z^2 = 2α^2+2β^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 3(α^2+β^2+γ^2)$

Η ανωτέρω σχέσις ισχύει και διά τυχόν τρίγωνον.
Ιδού η απόδειξη.



Κατ' αρχήν παρατηρώ ότι
το ύψος ΑΚ προεκτεινόμενον παρα-
σταίνει διάμεσο ΑΣ του ΑΕΔ.
Έχω τότε δ. των διαμέσων

$\overset{\triangle}{ΑΔΕ} \to β^2+γ^2 = 2\left(\frac{α}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\overset{\triangle}{ΖΒΣ} \to γ^2+α^2 = 2\left(\frac{β}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{2}\right)^2$

$\overset{\triangle}{ΓΘΙ} \to α^2+β^2 = 2\left(\frac{γ}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z}{2}\right)^2$

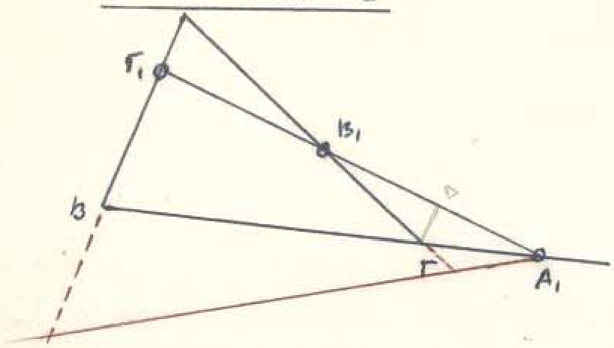
Αν προσθέσουμε κατά μέλη:

$2(α^2+β^2+γ^2) = \frac{α^2+β^2+γ^2}{2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$

ή $3(α^2+β^2+γ^2) = x^2+y^2+z^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ (Εφαρμογαί)

I Α ΜΕΘΟΔΟΣ



$$\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1$$

Απόδειξις. Φέρω $\Gamma\Delta \parallel AB$

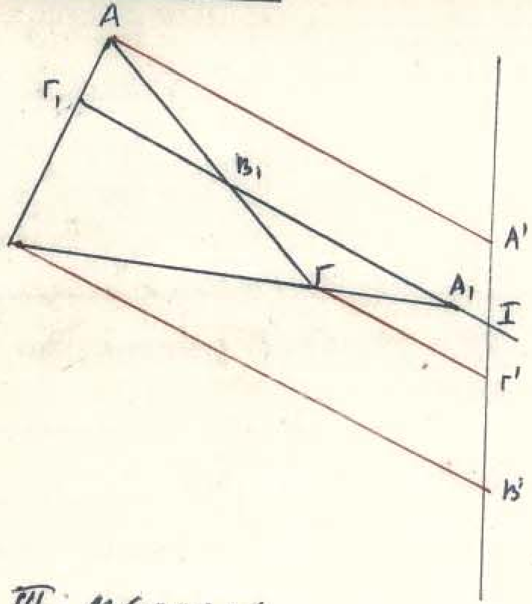
τότε $\frac{A_1B}{A_1\Gamma}=\frac{B\Gamma_1}{\Gamma\Delta}$ (1)

$\frac{B_1\Gamma}{B_1A}=\frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma_1}$ (2)

Διά πολλαπλασιασμού των (1) και (2) ευρίσκομεν:

$$\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}=\frac{B_1\Gamma}{\Gamma\Delta}\cdot\frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma_1}=\frac{B\Gamma_1}{A\Gamma_1}=\frac{\Gamma_1B}{\Gamma_1A}\implies\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1$$ ο.ε.δ.

Β ΜΕΘΟΔΟΣ.

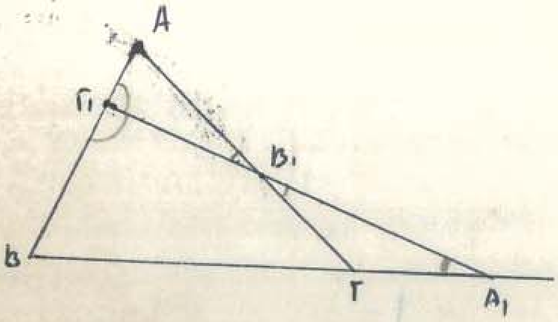


$$\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{IB'}{I\Gamma'}\cdot\frac{I\Gamma'}{IA'}\cdot\frac{IA'}{IB'}=1$$

III ΜΕΘΟΔΟΣ



Έχομεν: $\frac{AB_1\Gamma_1}{BA_1\Gamma_1}\cdot\frac{BA_1\Gamma_1}{\Gamma A_1B_1}\cdot\frac{\Gamma A_1B_1}{AB_1\Gamma_1}=1$

$$\frac{\cancel{AB_1}\cdot B_1\Gamma_1}{B\Gamma_1\cdot \cancel{A_1\Gamma_1}}\cdot\frac{A_1\Gamma_1\cdot A_1B}{\cancel{A_1B_1}\cdot \cancel{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\cancel{A_1B_1}\cdot B_1\Gamma}{\cancel{AB_1}\cdot \cancel{B_1\Gamma_1}}=1$$

$$\implies \frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ ΔΙΑ ΣΤΡΕΒΛΟΝ 4πλευρον

Εάν επίπεδον τέμνη τάς πλευράς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός στρεβλού 4πλεύρου εις τα σημεία Μ, Ν, Ρ, Q. έχομεν την αναλογικήν σχέσιν.
$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{N\Gamma}\cdot\frac{P\Gamma}{P\Delta}\cdot\frac{Q\Delta}{QA}=1$. Η αντίστροφος αν ισχύη η ανωτέρω σχέσις τα Μ, Ν, Ρ, Q κείνται επί του αυτού επιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Ἀποδείξατε τὸ θεώρημα τοῦ Ceva

2 » » τοῦ Simson

3 » » τοῦ Desargues

4 » » » Van Aubel.

5 Ὅτι πᾶν πλῆρες 4γωνον ἑκάστη διαγώνιος διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων.

6 Ὅτι ἐὰν πλῆρες 4γωνον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

7 Δίδονται δύο εὐθεῖαι Ox, Oy καὶ ἐπὶ τῆς Oy δύο σταθερὰ σημεῖα A καὶ B. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς Ox δύο μεταβλητὰ σημεῖα P καὶ Q συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ O. Ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς M τῶν εὐθειῶν AP καὶ BQ.

8 Δίδεται περιφέρεια (K,R) σημεῖον A ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ἐπὶ τῆς KA προεκτάσεως λαμβάνομεν AB=α. Φέρομεν τυχοῦσαν διάμετρον ΓΚΔ. καὶ φέρομεν τὰς ΒΓ καὶ ΔΑ. Τεμνόμεναι ἐς M. Τόπος M.

9 Δύο χορδαὶ περιφερείας ΑΔ, ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ μέσον O τῆς ΕΖ. Δεῖξαι τὰ τμήματα ΟΜ, ΟΝ τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῆς ΕΖ ὑπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσα.

10 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἓν σημεῖον O ἐκτὸς ἐπιπέδου του. Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ συναντοῦν ἀντιστοίχως τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ'. Θέτομεν $\frac{OA}{OA'} = x$ $\frac{OB}{OB'} = y$, $\frac{O\Gamma}{O\Gamma'} = z$ δεῖξατε ὅτι $xyz - (x+y+z) + 2 = 0$

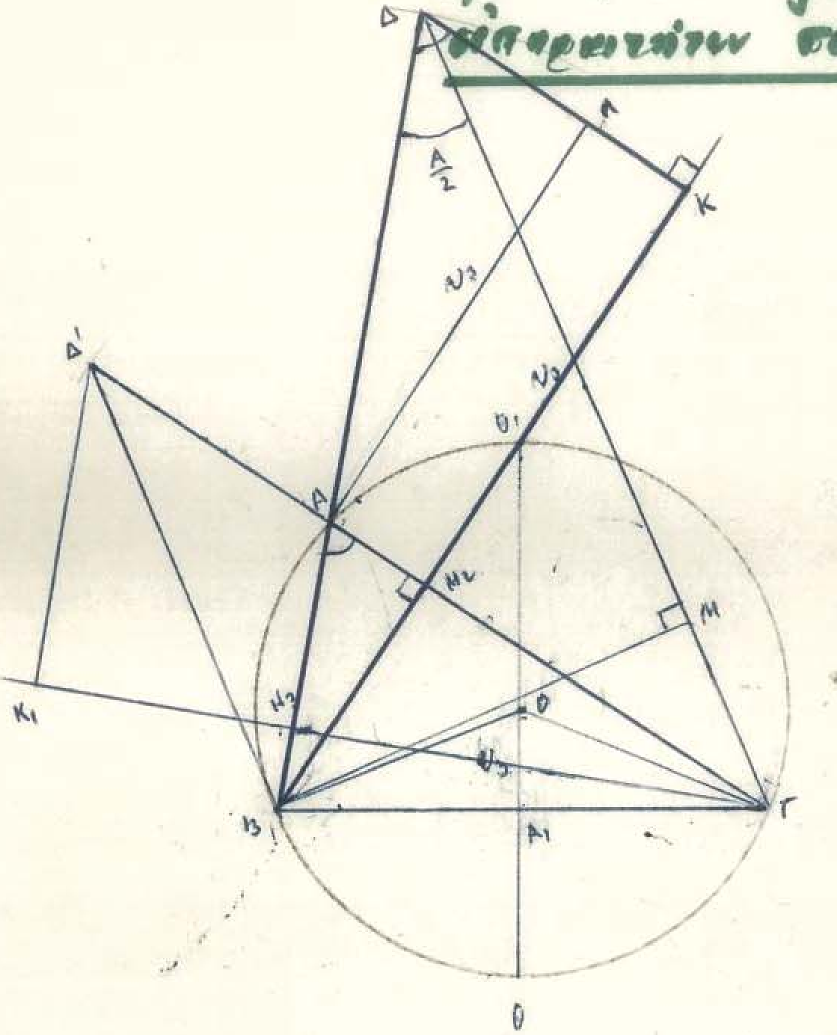
11 Δ: ἐπὶ τῶν β, γ πού ἡ τρίτη ὥστε αἱ δ_α, μ_β, υ_γ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

12 Ἐπὶ τῆς καθέτου πλευρᾶς ΑΒ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $A = 1^L$ ἐκτὸς αὐτοῦ κατασκευάζομεν 4γωνον ΑΒΕΖ. Ἂν δὲ εὐθεῖα ΓΕ τέμνῃ τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{AH} = \frac{1}{B\Gamma} + \frac{1}{AB}$.

13 Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς 4έδρου τέμνει τὸ στερεὸν εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

14 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ ὕψος ΑΗ. Ἐκ τοῦ Η φέρομεν τὰς καθέτους ΗΔ καὶ ΗΕ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἔστω α τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΔΕ καὶ ΒΓ. Ἄγομεν τὰ ὕψη ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα β καὶ γ ἐπὶ τῶν ΓΑ καὶ ΑΒ. Δεῖξαι τὰ σημεῖα α, β, γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ· Τριγώνων ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δύο ὑψῶν καὶ ἄλλων ἀπαραιτήτων στοιχείων –



$A\Delta = A\Gamma = \beta$

$A\Delta' = AB = \gamma$

τότε :

1) $B\Delta = \beta+\gamma = B\Delta'$

2) $\widehat{A\Delta K} = \hat{A} = \widehat{A\Delta' K}$

3) $BK = \upsilon_2+\upsilon_3 = \Gamma K_1$

4) $\widehat{A\Delta\Gamma} = \frac{A}{2} = \widehat{\Gamma\Delta K}$

5) $\widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\pi}{2} - \frac{B-\Gamma}{2}$

6) $\widehat{\Gamma B\Delta'} = \frac{\pi}{2} + \frac{B-\Gamma}{2}$

7) $\widehat{BOA_1} = \hat{A}$

8) $\widehat{B\Theta_1 A_1} = \frac{A}{2}$

9) $O\Theta_1 = R = \frac{\alpha}{2}$ στεμ A

10) $B\Theta_1 = \frac{1}{2}\alpha$ στεμ $\frac{A}{2}$

Προβλήματα

1. $\Delta : \alpha, A, \upsilon_2+\upsilon_3$ (ΒΚΔ κατασκευάσιμον διότι $BK = \upsilon_2+\upsilon_3 = \lambda$, $B\Delta K = A$ ἡ Γ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς ∢Δ καὶ ἐπὶ τῆς (B, α))

2. $\Delta : \beta+\gamma = \lambda, \upsilon_2+\upsilon_3 = \mu, B-\Gamma = \omega$ (ΒΔΚ κατασκευάσιμον διότι $B\Delta = \lambda$, $BK = \mu$ ἡ Γ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΔΓ καὶ ἐπὶ τόξου χορδῆς $B\Delta = \lambda$ δεχ. γωνίαν $B\Gamma\Delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$)

3. $\Delta : \beta-\gamma, \upsilon_2+\upsilon_3 = \mu, A = \omega$ (ΒΚΔ κατασκευάσιμον ἀφοῦ $BK = \upsilon_2+\upsilon_3 = \mu$ καὶ $B\Delta K = A$ ἢ ω. ἄρα $B\Delta = \beta+\gamma = \varepsilon$ γνωστόν τότε $\left.\begin{matrix}\beta+\gamma = \varepsilon\\ \beta-\gamma = \lambda\end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = \frac{\varepsilon+\lambda}{2}, \gamma = \frac{\varepsilon-\lambda}{2}$ καὶ ἔχομεν $\Delta : (\beta, \gamma, A)$.

Πρὸς λύσιν

1) $\Delta : \upsilon_2+\upsilon_3 = \lambda, B, \Gamma$ 2) $\Delta : \upsilon_2+\upsilon_3 = \lambda, \beta, \gamma$ 3) $\upsilon_2+\upsilon_3 = \lambda, \beta, A$

4) $\upsilon_2+\upsilon_3 = \lambda, \beta+\gamma = \mu, \alpha$, 5) $\upsilon_2+\upsilon_3 = \lambda, \beta-\gamma = \mu, A$ 6) $\alpha, A, \upsilon_2+\upsilon_3 = \lambda$

7) $\beta+\gamma = \lambda, \alpha, B-\Gamma = \omega$ 8) $R, \alpha, \beta+\gamma = \lambda$ 9) $R, \alpha, \upsilon_2+\upsilon_3 = \lambda$

#

10. Δ: $\upsilon_2+\upsilon_3=\lambda$, Γ, β   11. R, A,

12. Δ: ὅτι (α) $\alpha < \delta_\gamma \leq \alpha\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

(β) $\tau\eta\mu A < \upsilon_2+\upsilon_3 \leq 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

13. Δ: ὅτι $d \leq \alpha \leq \frac{1}{2}(\upsilon_2+\upsilon_3)\,\tau\varepsilon\mu\frac{A}{2}$. ($d$ η απόσταση του Β από την ΔΓ)

14. Δ: γ, Γ, $\upsilon_1+\upsilon_2=s$ (Μυλωνάς 527/ΙΗ)

15. Δ: $\delta_\gamma=\mu$, $\upsilon_2+\upsilon_3=\lambda$, $B-\Gamma=\omega$ (Μυλωνάς Ασκ. 528)

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΟΤΑΝ σύν τοῖς ἄλλοις ΔΙΔΕΤΑΙ Η ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΩΝ Η ΔΥΟ ΥΨΩΝ.

Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κέντρου ο. Η διχοτόμος $ΑΔ_1$ αὐτοῦ διέρχεται ἀπό τό μέσον Θ τοῦ τόξου ΒΘΓ. Ο κύκλος Θ,ΘΓ διέρχεται ἀπό τό Β καί τέμνει τήν διχοτόμον $ΑΔ_1$ εἰς τό Ι, ὅπερ εἶναι τό ἔνκεντρον τοῦ ΑΒΓ. Διατί;

Θά εἶναι γων $ΒΙΓ = Π/2 + Α/2$

$ΘΓ = \frac{1}{2} α τεμ \frac{A}{2}$ $ΟΓ = R = \frac{1}{2} α σ τεμ Α$ $ΘΓ = 2R ημ \frac{A}{2}$

καί γων $ΓΒΔ = (Β-Γ)/2$

Ὁ κύκλος Θ,ΘΓ τέμνει τήν ΑΓ εἰς τό Δ. Θά εἶναι ΑΔ = ΑΒ.

Συνεπῶς : $ΔΓ = β-γ$

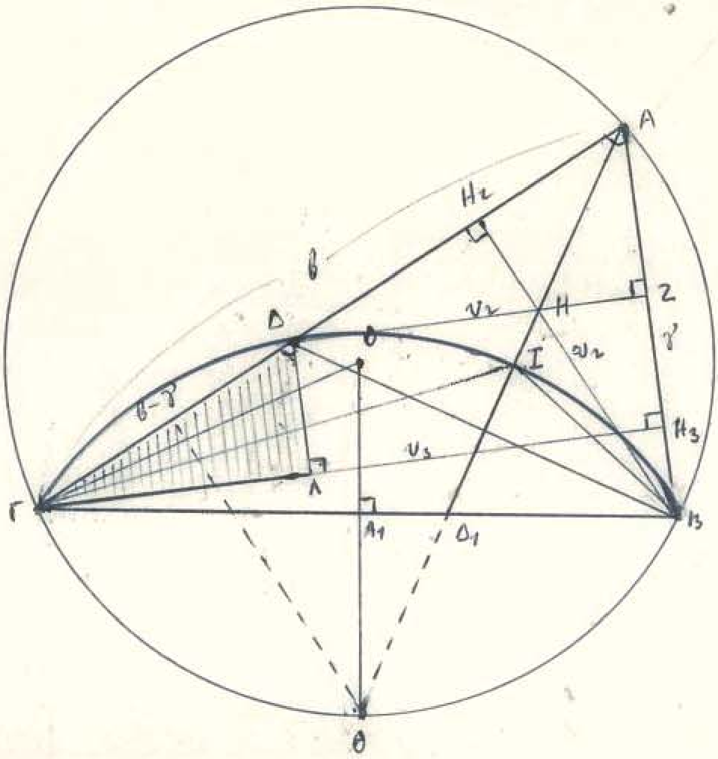
Αγομεν τά ὕψη $ΒΗ_2$ καί $ΓΗ_3$ Ἐπειδή $β > γ$ καί $υ_3 > υ_2$

Εκ τοῦ Δ ἄγομεν τήν $ΔΖ \perp ΑΒ$ καί $ΔΛ \perp ΓΗ_3$ Θά εἶναι $ΛΗ_3 = ΔΖ = ΒΗ_2 = υ_2$

καί $ΓΛ = ΓΗ_3 - ΛΗ_3$ ἤτοι $ΓΛ = υ_3 - υ_2$

Επίσης θά εἶναι :

Γων $ΓΔΛ = Α$, Γων $ΛΔΒ =$ γων $ΒΔΑ = Π/2 - Α/2$, Γων $ΓΔΒ = Π/2 + Α/2$



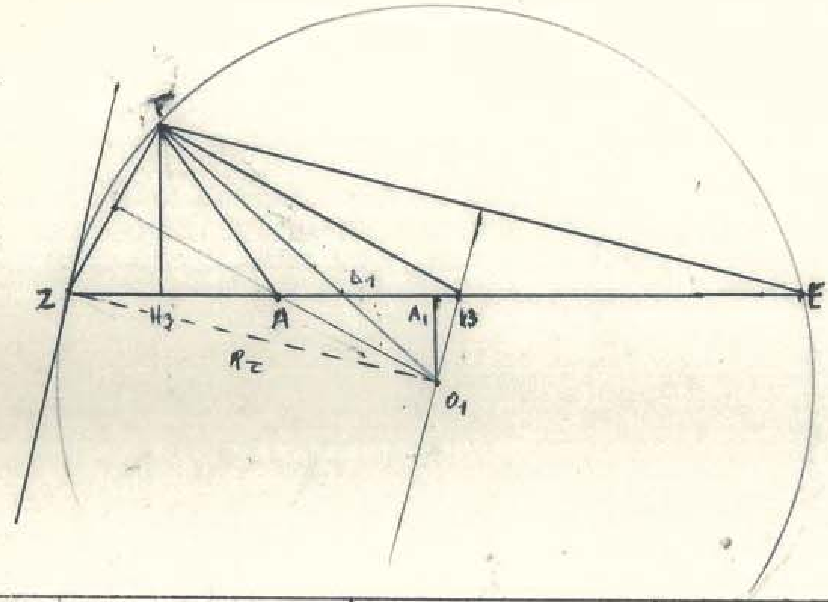
Δ: $α, Α = ω$, καί $υ_3 - υ_2 = λ$.

Δ: $β-γ = λ, υ_3 - υ_2 = μ, Β-Γ = ω$.

Δ: $Α = ω, β+γ = λ, υ_3 - υ_2 = μ$.

1. $Β, Γ, υ_2 - υ_3 = λ$.
2. $β, γ, υ_3 - υ_2 = λ$.
3. $Α, β+γ = λ, υ_3 - υ_2 = κ$.
4. $β-γ = λ, Β-Γ = ω, υ_3$
5. $β-γ = λ, γ, υ_2$.
6. $β-γ = λ, Β-Γ = ω, υ_2$ ἤ $υ_3$.
7. $υ_3 - υ_2 = λ, β-γ = μ, α$.
8. $β+γ = λ, β-γ = μ, υ_1$.
9. $υ_3 + υ_2 = λ, υ_3 - υ_2 = κ, υ_3$ ἤ $υ_2$.
10. $υ_3 - υ_2 = κ, Α, ΔΒ = λ$.
11. $α - β = λ, υ_2 + υ_3 = μ, Α$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ὅταν σὺν τοῖς ἄλλοις δίδεται ἡ περίμετρος ἢ ἡ ἡμιπερίμετρος ἢ τὸ $\tau-\alpha$, $\tau-\beta$, $\tau-\gamma$ κλπ.

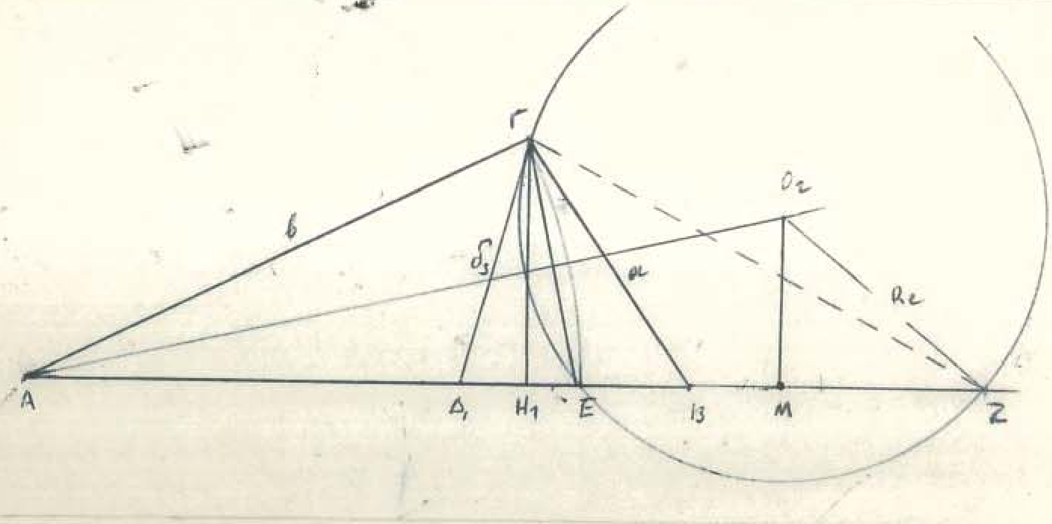


$\sphericalangle Z O_1 \Gamma = B$	$\sphericalangle Z \Gamma O_1 = \frac{1}{2}(A+\Gamma)$	$\sphericalangle O_1 \Gamma E = \frac{1}{2}(B+\Gamma)$	$O_1\Delta_1 = R_\tau - \delta_3$

Ἔνθα R_τ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου $Z\Gamma E$

$\sphericalangle A\Gamma O_1 = \sphericalangle B\Gamma O_1 = \frac{1}{2}\Gamma$ $\quad \sphericalangle \Gamma Z T = \frac{1}{2}B$ $\quad \sphericalangle O_1 E Z = \sphericalangle O_1 Z E = \frac{1}{2}\Gamma$

$ZE = 2\tau$, $Z\Gamma E = \frac{\pi}{2}+\frac{\Gamma}{2}$, $\Gamma\Delta_1 = \delta_3$, $O_1\Delta_1 = R_\tau - \delta_3$, $\Gamma\Delta_1 Z = B + \frac{\Gamma}{2}$, $H_3\Gamma\Delta_1 = \frac{1}{2}(A-B)$



Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τὸ ζητούμενον σημεῖον Ζ, κατὰ τρόπον ὥστε: $BZ = B\Gamma = \alpha$, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον Ε, κατὰ τρόπον ὥστε: $AE = A\Gamma = \beta$, ὁπότε θὰ εἶναι: $EZ = AB + BZ - AE = \gamma + \alpha - \beta = 2(\tau-\beta)$

Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΓΕ καὶ ΓΒΖ ἔχομεν: $A\Gamma E = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ καὶ $\widehat{B\Gamma Z} = \frac{B}{2}$, ὅτε $\sphericalangle E\Gamma Z = \Gamma + \frac{B}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{\Gamma}{2}$.

Αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΓΕΖ εἶναι:

$\sphericalangle$ ΕΓΖ $= \frac{\Gamma}{2}$, $\sphericalangle$ ΓΖΒ $= \frac{B}{2}$ καί ΖΕΓ $= \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$.

Ἀνακεφαλαιοῦντες ἔχομεν:

$EZ = 2(\tau-\beta)$	$A\Gamma E = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$,	$B\hat{\Gamma}Z = \frac{B}{2}$,	$E\Gamma Z = \frac{\Gamma}{2}$
	$BZ\Gamma = \frac{B}{2}$	$Z\hat{E}\Gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$	

Ἄν ἀχθῇ τό ὕψος ΓH_3 θά εἶναι:

$H_1\Gamma E = \frac{A}{2}$	$\sphericalangle A\Gamma H_1 = \frac{\pi}{2} - A$,	$\Gamma O_1 Z = B+\Gamma$	$\sphericalangle \Gamma B Z = \frac{A+\Gamma}{2}$

Ἄν ἀχθῇ ἡ διχοτόμος δ_3 τῆς γωνίας Γ, τέμνουσα τήν ΑΒ εἰς Δ_1,

$H_1\Gamma\Delta_1 = \frac{\lvert A-B\rvert}{2}$	$\sphericalangle \Delta_1\Gamma E = \frac{B}{2}$

ἔχομεν $O_2Z = R_e$

καί ἡ διχοτόμος $\Gamma\Delta_1$ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΓΖΕ εἰς τό Γ.
τά τετράπλευρα $\Gamma E B O_2$ καί $A\Gamma O_2 Z$ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλους.

Τούτων τεθέντων.

1. Δ: 2τ, $\Gamma = \omega$, καί δ_3

(Κατασκευή: Εἶναι $ZE = 2\tau$, $O_1ZE = O_1EZ = \frac{1}{2}\Gamma \Rightarrow O_1ZE$ κατασκευάσιμον ἄρα $O_1Z = R_\tau$ γνωστόν. Ἐπειδή $O_1O = R_\tau - \delta_3$ ἔπεται ὅτι τό O, εἶναι τομή τῆς ΖΕ καί τοῦ κύκλου $(O_1, R_\tau - \delta_3)$. Ἡ O_1O, τέμνει τόν κύκλον (O_1, R_τ) εἰς τό σημεῖον Γ. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν ΓΖ καί ΓΕ καθορίζουν τάς κορυφάς Β καί Γ.

2. Δ: $\tau-\beta$, $\Gamma = \omega$, καί υ_3.

(Κατασκευή: Εἶναι $EZ = 2(\tau-\beta)$. Ἄν ΖΤ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΓΕΖ τότε $\sphericalangle BZT = \frac{\Gamma}{2} = \frac{\omega}{2}$. Ἡ μεσοκάθετος τῆς ΕΖ καί ἡ κάθετος ἐπί τήν ΖΤ εἰς τό σημεῖον Ζ τέμνονται εἰς τό O_2. Ὁ κύκλος $(O_2, O_2Z = R_e)$ διέρχεται ἀπό τό Γ. Ἐπειδή $\Gamma H_1 = \upsilon_3$ τό Γ θά κεῖται ἐπί παραλλήλου $\parallel EZ$, συνεπῶς τά Α καί Β θά εἶναι αἱ τομαί τῆς ΕΖ, ἀντιστοίχως ἀπό τῶν μεσοκαθέτων τῶν ΓΕ καί ΓΖ. Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον.

Πρός λύσιν.

1. Δ: τ, Γ, υ_3 2. τ, A, Γ 3. τ, A, υ_3 ἤ υ_2 4. $\tau-\beta, A, B$
5. $\tau-\beta, \Gamma, A-B=\omega$ 6. $\tau-\beta, \upsilon_2, \Gamma$ 7. τ, υ_3, α 8. τ, Γ, α ἤ β
9. $\tau-\beta, \alpha, B$ ἤ Γ. 10. $\tau-\beta, \upsilon_3, A$ ἤ B 11. τ, R_τ, υ_3 12. τ, δ_3, B
13. $\tau-\beta, R_e, \delta_3$ 14. $\tau-\beta, R_e, B$. 15. $\beta+\gamma=\lambda, \alpha, \upsilon_3$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ τοῦ ν ἐκ τοῦ γνωστοῦ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ: $\delta=\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

$\delta=\frac{\nu(\nu-3)}{2} \Rightarrow \nu^2-3\nu-2\delta=0$ ὁπόθεν $\nu=\frac{3\pm\sqrt{9+8\delta}}{2}$
δεκτὴ ἡ $\nu=\frac{3+\sqrt{9+8\delta}}{2}$. Ἐφαρμογή. Διὰ $\delta=14$ εὑρίσκομεν $\nu=7$.

β' ΜΕΘΟΔΟΣ.

Ἐπειδὴ $\nu\in\Phi \wedge \nu>2$ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\nu=\mu+2$ ὁπότε $\nu-3=\mu-1$ ἑπομένως $\delta=\frac{\nu(\nu-3)}{2}=\frac{(\mu+2)(\mu-1)}{2}$ ἤτοι $(\mu+2)(\mu-1)=2\delta$ ἢ $\mu(\mu+1)=2+2\delta$, ἀλλὰ $\mu^2<\mu(\mu+1)<(\mu+1)^2$. Ἄρα: $\mu^2<2+2\delta<(\mu+1)^2$. Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων τούτων συνάγεται ὅτι ὁ φυσικὸς μ εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ $2+2\delta$. Ὑπολογισμένου τοῦ μ εἶναι $\nu=\mu+2$.

Ἐφαρμογή. Ἔστω $\delta=14$.
τότε $2+2\delta=2+2.14=2+28=30$. $\sqrt{30}=5$ ἑπομένως $\mu=5$ καὶ $\nu=5+2=7$.

Γ' ΜΕΘΟΔΟΣ

Ἔχομεν $\nu(\nu-3)=2\delta$. Ἐὰν $\delta=0$ τοῦ $\nu\neq 0$ μένει $\nu=3$.
Ἐὰν $\delta>0$ οἱ φυσικοὶ ν καὶ ν-3 εἶναι διαιρέται τοῦ 2δ ἔχοντες γινόμενον 2δ καὶ διαφορὰν $\nu-(\nu-3)=3$. Εὑρίσκομεν κατὰ τοῦτο τοὺς διαιρέτας τοῦ 2δ.-
Ἐκ τὸ προηγούμενον παράδειγμα:
$2\delta=2.14=28$ Διαιρέται τοῦ 28 $(1, 2, 4, 7, 14, 28)$
παρατηρῶ ὅτι $7-4=3$ ἑπομένως $\nu=7$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1 Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δ παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων κυρτοῦ εὐθυγράμμου σχήματος ὁ ἀριθμὸς $9+8\delta$ εἶναι τετράγωνον περιττοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ—

Ἀπόδειξις. $\delta=\frac{\nu(\nu-3)}{2} \Rightarrow 8\delta=4\nu(\nu-3)$ καὶ $9+8\delta=9+4\nu(\nu-3)$
ἢ $9+8\delta=(2\nu-3)^2$.

2 Ἐὰν ὁ δ διαιρεῖ τὸν ν θὰ εἶναι ἢ $\nu=4$ ἢ $\nu=5$.

Ἀπόδειξις. $\delta=\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ ἤτοι $\frac{\delta}{\nu}=\frac{\nu-3}{2}$ ἢ $\frac{\nu}{\delta}=\frac{2}{\nu-3} \to (\nu-3)/2$
ἑπομένως $\nu-3=1$ ἢ 2 δηλαδὴ $\nu=4$ καὶ $\nu=5$

3 Ἐὰν ὁ δ διαιρεῖ τὸν ν θὰ εἶναι $\delta=5$ ἢ $\delta=2$.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν $\nu(\nu-3)=2\delta$. Θέτομεν $\nu=\delta\lambda$, $\lambda\in\Phi$ ὁπότε ἔχομεν $\delta\lambda(\delta\lambda-3)=2\delta$ ἤτοι $\lambda(\delta\lambda-3)=2$. Ἐκ τούτης συνάγεται

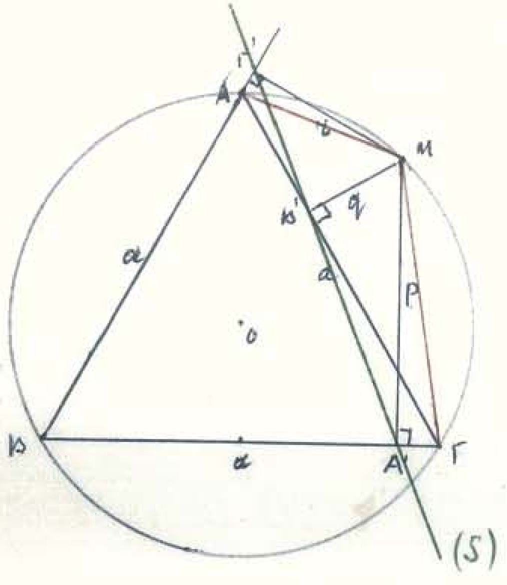
//

ότι $\lambda = 1$ ή 2. Δια $\lambda = 1$ ευρίσκομεν $\delta = 5$
Δια $\lambda = 2$ » $\delta = 2$.

4 Ο αριθμός $\delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$ ουδέποτε είναι κύβος φυσικού τινός αριθμού.

Απόδειξις. Έστω ότι είναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2} = \rho^3$ $\rho \in N$ τότε $\nu(\nu-3) = 2\rho^3$. Θέτομεν $\rho = \nu+\lambda$ με λ ακέραιον. Αντικαθιστώντες ευρίσκομεν $\nu(\nu-3) = 2(\nu+\lambda)^3$. ο $\nu-3$ διαιρεί προφανώς το 1ον μέλος της τελευταίας ισότητος, επομένως έπεται ότι θα διαιρεί και το 2ον μέλος. Τούτο σημαίνει, ότι το υπόλοιπον της διαιρέσεως του $2(\nu+\lambda)^3$ δια του $\nu-3$ είναι 0. Αλλά το υπόλοιπον τούτο είναι $2(3+\lambda)^3$. Άρα θα πρέπει να είναι $2(3+\lambda)^3 = 0$ και συνεπώς $\lambda = -3$. Αφού $\lambda = -3$ θα έχομεν, $\nu(\nu-3) = 2(\nu-3)^3$ ήτοι $\nu = 2(\nu-3)^2$. Λύοντες την τελευταίαν ταύτην εξίσωσιν ως προς ν ευρίσκομεν $\nu = 4{,}5$ και 2. τιμαί απορριπτόμεναι. Επομένως συνάγεται ότι ο αριθμός $\delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$ ουδέποτε είναι κύβος φυσικού αριθμού.

ΣΗΜΕΙΟΝ Μ· Ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον περιφερείας.



Δεῖξατε ὅτι

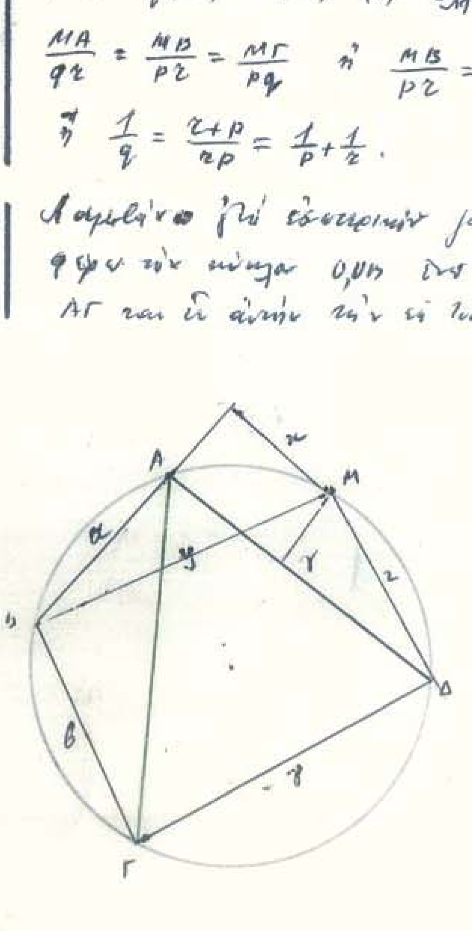
1. $p(MA) = q(MB) = r(M\Gamma)$
2. $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$
3. x; ἵνα $\frac{1}{x} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}$
4. Ἀποδείξατε τὸ Θ. τοῦ ΠΑΠΠΟΥ.
5. $p + r - q = \upsilon$.
6. $p^2 + r^2 + q^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$
7. $x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = \frac{5\alpha^2}{4}$ $\quad x^* = BA'$ κλπ
8. $x^* + y^* - z^* = \frac{3\alpha}{2}$
9. $\frac{\gamma}{r} + \frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q}$ (διὰ τυχὸν τρίγωνον.)

Σύντομοι ἀποδείξεις.

1. $MA'\Gamma$ ὅμοιον $M\Gamma'A$. $\Rightarrow \frac{MA}{r} = \frac{M\Gamma}{p} \rightarrow p(MA) = r(M\Gamma)$
Ἐπίσης $MA'B$ ὅμ. $MB'A \rightarrow \frac{MB}{p} = \frac{MA}{q} \rightarrow q(MB) = p(MA) \Rightarrow p(MA) = q(MB) = r(M\Gamma)$

2. $p(MA) = q(MB) = r(M\Gamma)$ (1) ἀλλὰ $MB = MA + M\Gamma$ (2) ∴ (1) γράφεται:
$\frac{MA}{qr} = \frac{MB}{pr} = \frac{M\Gamma}{pq}$ ἢ $\frac{MB}{pr} = \frac{MA+M\Gamma}{qr+pq} \Rightarrow \frac{MB}{pr} = \frac{MB}{qr+pq} \Rightarrow pr = qr + pq = q(r+p)$
ἢ $\frac{1}{q} = \frac{r+p}{rp} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$.

3. Λαμβάνω γιὰ ἐσωτερικὸν γωνίας 60° σημεῖον Μ ὥστε $M\Gamma' = \nu$ καὶ $MA' = \mu$ φέρω τὸν κύκλον Ο,ΟΒ ὅπου Ο ≡ (ΟΒ, μεσοκάθετος τῆς ΟΜ). Εἶτα φέρω τὴν ΑΓ καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν ἐκ τοῦ Μ κάθετον. Τότε ἕνεκα τῆς (2) $MB' = x$.



4. Φέρω τὴν διαγώνιον ΑΓ.
Ἐπὶ τριγώνου ΑΒΓ μὲ σημεῖον Μ ἔχω
$x \cdot M\Gamma = y(MA) = t(MB)$ (1)
Ἐπὶ τριγώνου ΑΓΔ διὰ τὸ ἴδιο σημεῖον
$z(MA) = \omega(M\Gamma) = t(M\Delta)$ (2) ἐκ τούτων
$x(M\Gamma) = y(MA)$
$z(MA) = \omega(M\Gamma)$ πολ/ζω κατὰ μέλη ταύτας λαμβάνομεν
$xz(M\Gamma)(MA) = y\omega(MA)(M\Gamma)$
$\Rightarrow xz = y\omega$.

5. Ότι $p+r-q=v$.

Έχομεν εμβ$(ΑΒΓ)$ = εμβ$(ΜΒΓ)$ + εμβ$(ΒΜΑ)$ − εμβ$(ΓΜΑ)$

$$\frac{1}{2}\alpha v = \frac{1}{2}\alpha p + \frac{1}{2}\alpha r - \frac{1}{2}\alpha q \Rightarrow v = p+r-q.$$

6. Ότι $p^2+q^2+r^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$

Έχομεν $p+r-q=v$ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον

$p^2+r^2+q^2+2pr-2pq-2rq = v^2$ αλλά $pr = qr+pq$ $\left(\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)$

Συνεπώς $p^2+r^2+q^2 = v^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$

7. Ότι $x'^2+y'^2+z'^2 = \frac{5\alpha^2}{4}$ (ὅπου $x'=BA'$, $y'=ΓB'$, $z'=AΓ'$.)

Απόδειξις.

$$\left.\begin{array}{l} x'^2 = MB^2-p^2 \\ y'^2 = MΓ^2-q^2 \\ z'^2 = MA^2-r^2 \end{array}\right\} x'^2+y'^2+z'^2 = MA^2+MB^2+MΓ^2-(p^2+q^2+r^2)$$

$$= 3(MO)^2+3(OA)^2-v^2 = 6R^2-v^2 = 6\frac{\alpha^2}{3}-\frac{3\alpha^2}{4} = 2\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4}$$

8. Ότι. $x'+y'-z' = \frac{3\alpha}{2}$

Απόδειξις. Ἐκ τοῦ τριγώνου $MAB \to MB^2 = \alpha^2+r^2+z'^2+2\alpha z'$

$MAΓ \to MA^2 = \alpha^2+q^2+y'^2-2\alpha y'$

$MBΓ \to MΓ^2 = p^2+x'^2+\alpha^2-2\alpha x'$

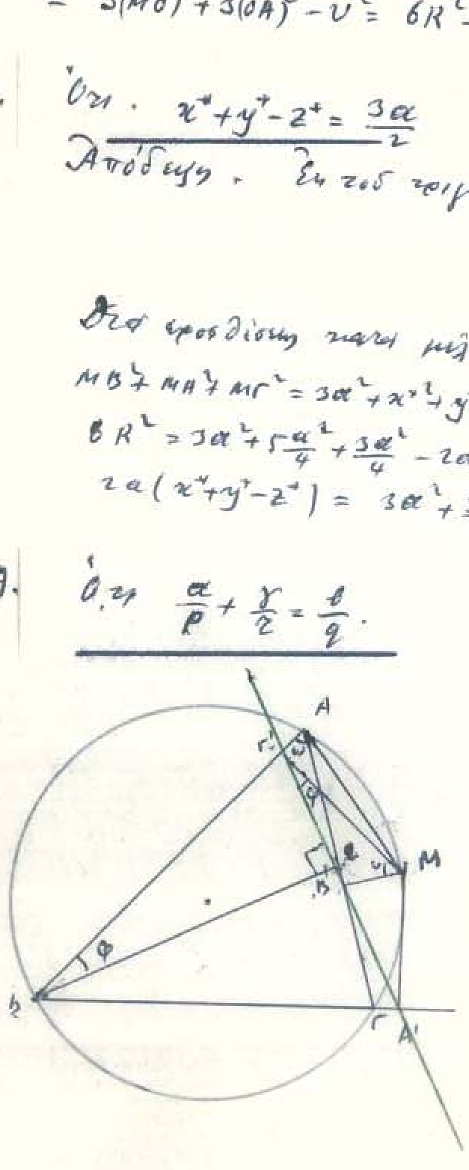
Διά προσθέσεως κατά μέλη τούτων λαμβάνομεν.

$MB^2+MA^2+MΓ^2 = 3\alpha^2+x'^2+y'^2+z'^2+r^2+q^2+p^2+2\alpha(z'-x'-y')$

$6R^2 = 3\alpha^2+5\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3\alpha^2}{4}-2\alpha(x'+y'-z')$ ή

$2\alpha(x'+y'-z') = 3\alpha^2+\frac{5\alpha^2}{4}+\frac{3\alpha^2}{4}-2\alpha^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow x'+y'-z' = \frac{3\alpha}{2}$

9. Ότι $\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{r} = \frac{\beta}{q}$.



Απόδειξις.

φέρω $BE \perp (s)$ (E ἐπί τῆς $AΓ$)

Τρίγωνον ABE όμ. $Γ'B'M$.

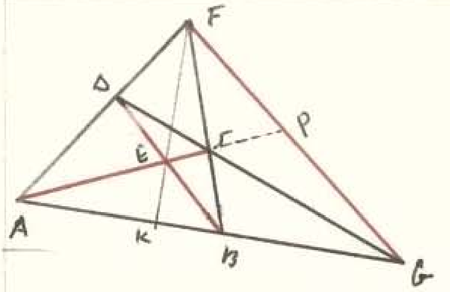
$\to \frac{\gamma}{r} = \frac{AE}{q} = \frac{BE}{Γ'B'}$ (1)

Τρίγωνον $B'MA'$ ὅμοιον $BEΓ$

$\frac{\alpha}{p} = \frac{BE}{B'A'} = \frac{EΓ}{q}$ (2) Ἐκ τούτων

$\frac{\gamma}{r}+\frac{\alpha}{p} = \frac{AE}{q}+\frac{EΓ}{q} = \frac{\beta}{q}$, ο.ε.δ.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ
ΕΠΙ ΤΟΥ ΠΛΗΡΟΥΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ.



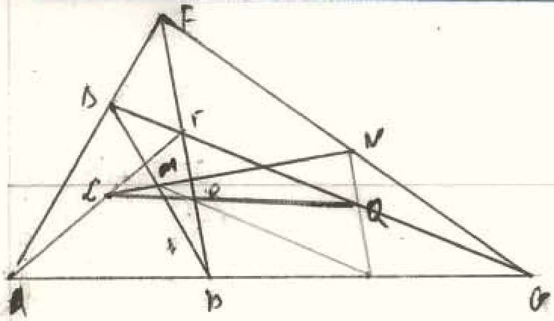
(AB, ΓΔ) (BΓ, AΔ) (ΓA, BΔ) πλευραί 4πλεύρου.
G, F, E Διαγώνια σημεῖα.
EFG : Διαγώνιον τρίγωνον
{A, E, Γ P} ἁρμονικὸν σύμπλεγμα.

1 **Ἀπόδειξις τοῦ ὅτι {AKBG} ἁρμονικόν.**

Ἐκ τοῦ τριγώνου FAB κατὰ τὸ Θ. Ceva.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AK}{KB}\cdot\frac{B\Gamma}{\Gamma F}\cdot\frac{F\Delta}{\Delta A}=1\\ \frac{AG}{GB}\cdot\frac{B\Gamma}{\Gamma F}\cdot\frac{F\Delta}{\Delta A}=-1 \text{ κατὰ τὸ Θ. ΜΕΝΕΛΑΟΥ.}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{AK}{KB}=-\frac{AG}{GB}\Rightarrow \{AK,BG\} \text{ ἁρμ.}$$

2 **Τὰ μέσα τῶν τριῶν διαγωνίων τοῦ πλήρους 4πλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.**



Ἀπόδειξις. AΓ, BΔ, FG εἶναι αἱ διαγώνιαι τοῦ 4πλεύρου ABΓΔ. Ἔστωσαν P, Q, R τὰ μέσα τῶν BG, GΓ, ΓB. Φέρομεν τὰς PQ, QR, RP συναντώσας τὰς FG, AΓ, BΔ εἰς τὰ N, L, M. PQ, QR, RP εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΓB, BG, GΓ. Ἐπειδὴ $\overline{PQN} \parallel BF$ καὶ ἐπειδὴ GP = PB ⇒ GN = NF.
⇒ N : μέσον τῆς FG. ὁμοίως L, M τὰ μέσα τῶν AΓ καὶ BΔ.

Ἀλλὰ ἐκ τῶν παραλλήλων :

$$\frac{RL}{LQ}=\frac{BA}{AG},\ \frac{QN}{NP}=\frac{\Gamma F}{FB},\ \frac{PM}{MR}=\frac{G\Delta}{\Delta\Gamma}\Rightarrow \frac{RL}{LQ}\cdot\frac{QN}{NP}\cdot\frac{PM}{MR}=\frac{BA}{AG}\cdot\frac{G\Delta}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{\Gamma F}{FB}=-1$$

καὶ κατὰ τὸ Θ. τοῦ ΜΕΝΕΛΑΟΥ ἐπειδὴ AΔF εἶναι διατέμνουσα τοῦ τριγώνου BΓG, τὰ L, M, N κεῖνται ἐπ' εὐθείας —

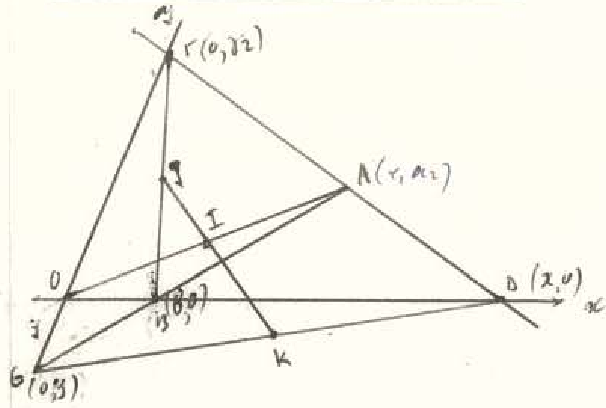
2 **Διανυσματικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.**

L, M, N μέσα τῶν AΓ, BΔ, FG . θεωρήσωμεν τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων $\overline{A\Delta}$, $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$, $\overline{\Gamma B}$. Ἔχομεν $\overline{A\Delta}+\overline{AB}=2\overline{AM}$. $\overline{\Gamma\Delta}+\overline{\Gamma B}=2\overline{\Gamma M}$. ἡ συνισταμένη τοῦ συστήματος διέρχεται διὰ τοῦ M. ὁμοίως διὰ τοῦ L. (πράγματι εἶναι 4 $\overline{LM}$)
ἄρα τὸ σύστημα τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων ἰσοδυναμεῖ μὲ

$$\overline{AF}+\overline{F\Delta}+\overline{AG}+\overline{GB}+\overline{\Gamma G}+\overline{G\Delta}+\overline{\Gamma F}+\overline{FB}=\overline{AF}+\overline{AG}+\overline{F\Delta}+\overline{G\Delta}+\overline{FB}+\overline{GB}+\overline{\Gamma G}+\overline{\Gamma F}=$$

$2\overline{AN}+2\overline{N\Delta}+2\overline{NB}+2\overline{\Gamma N}$. ἡ συνισταμένη διέρχεται διὰ τοῦ N. Κατὰ ταῦτα L, M, N εἶναι συνευθειακά —

2₃ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.



Και αρχήν υπολογίζομεν την τετμημένην του Δ, x και την τεταγμένην του E, y ή ταχμένη(?) ως προς ox, oy. Προς τούτο παρατηρούμεν ότι τα διανύσματα ΓΔ και ΓΑ με συνιστώσας $(x, -\gamma_2)$ και $(\alpha_1, \alpha_2-\gamma_2)$ είναι συγγραμμικά. Επομένως:

$(\alpha_2-\gamma_2)x-(-\gamma_2\alpha_1)$ ήτοι $\frac{x}{\alpha_1}=-\frac{\gamma_2}{\alpha_2-\gamma_2}$

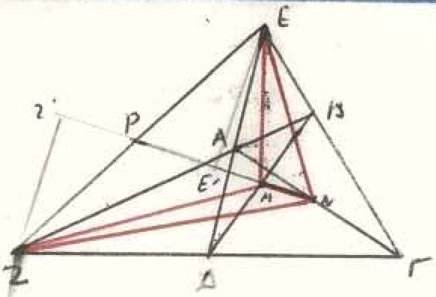
και $x=\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_2-\alpha_2}$. Ομοίως εκφράζοντες ότι τα διανύσματα BE και BA με συνιστ. αντιστοίχως $(-\beta, y)$ και $(\alpha_1-\beta, \alpha_2)$ επομένως $\frac{-\beta}{\alpha_1-\beta}=\frac{y}{\alpha_2} \Rightarrow y=\frac{\alpha_2\beta}{\beta-\alpha_1}$

Τα σημεία I, J, K έχουν συντεταγμένας $I\left(\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2}\right)$, $J\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)$, $K\left(\frac{\alpha_1\gamma_2}{2(\gamma_2-\alpha_2)}, \frac{\alpha_2\beta}{2(\beta-\alpha_1)}\right)$. Τα $\overline{IJ}$ και $\overline{IK}$ έχουν αντ. $\overline{IJ}=\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\gamma_2-\alpha_2}{2}\right)$ ή $\overline{IJ}=\left(\frac{\beta-\alpha_1}{2}, \frac{\gamma_2-\alpha_2}{2}\right)$

$\overline{IK}=\left(\frac{\alpha_1\gamma_2}{2(\gamma_2-\alpha_2)}-\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2\beta}{2(\beta-\alpha_1)}-\frac{\alpha_2}{2}\right)$ ή $\overline{IK}=\left(\frac{\alpha_1\gamma_2-\alpha_1\gamma_2+\alpha_1\alpha_2}{2(\gamma_2-\alpha_2)}, \frac{\alpha_2\beta-\alpha_2\beta+\alpha_2\alpha_1}{2(\beta-\alpha_1)}\right)$

Επειδή $\dfrac{\frac{\beta-\alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_1\alpha_2}{2(\gamma_2-\alpha_2)}}=\dfrac{\frac{\gamma_2-\alpha_2}{2}}{\frac{\alpha_1\alpha_2}{2(\beta-\alpha_1)}}$ έπεται ότι τα διανύσματα $\overline{IJ}$ και $\overline{IK}$ είναι συγγραμμικά ήτοι JIK ευθεία —

2₄. Ετέρα απόδειξις διά των εμβαδών.



Αποδεικνύομεν πρώτον ότι Εμ.(EMN) = Εμ.(ZMN) και επειδή MN κοινή βάσις έπεται ότι EP = PZ ήτοι P μέσον της EZ. Και τότε NMP ευθεία.

ΑΒΓΔ = ΓΔΕ − ΑΒΕ (1)

ΓΔΕ = 2 (ΔΝΕ), ΑΒΕ = 2 (ΕΒΝ) (2)

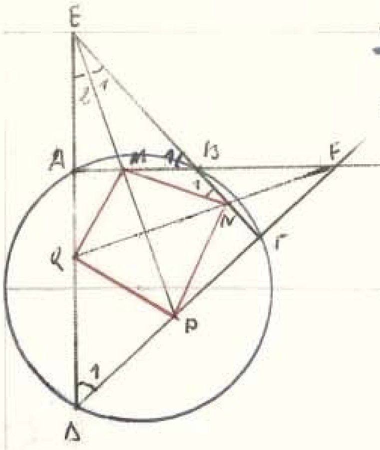
(1), (2) ΑΒΓΔ = 2 [ΔΝΕ − ΕΒΝ] (3)

ΔΝΕ = ΜΝΕ + ΕΔΜ + ΔΜΝ = ΜΝΕ + ΕΜΒ + ΒΜΝ

= 2(ΜΝΕ) + (ΕΒΝ) (4)

(3), (4) → (ΑΒΓΔ) = 4 (ΜΝΕ) ομοίως (ΑΒΓΔ) = 4(ΜΝΖ) ⇒ (ΕΜΝ) = (ΖΜΝ) και επειδή τα τρίγωνα ταύτα έχουν την αυτήν βάσιν θα έχουν ίσα ύψη ΕΕ' = ΖΖ'. Κατά ταύτα ΕΡ = ΡΖ ήτοι η ΜΝ προεκτεινομένη διέρχεται διά του μέσου της ΕΖ. [N, M, P επ' ευθείας.]

3



Δείξατε ότι τό ΜΝΡΩ είναι ρόμβος.

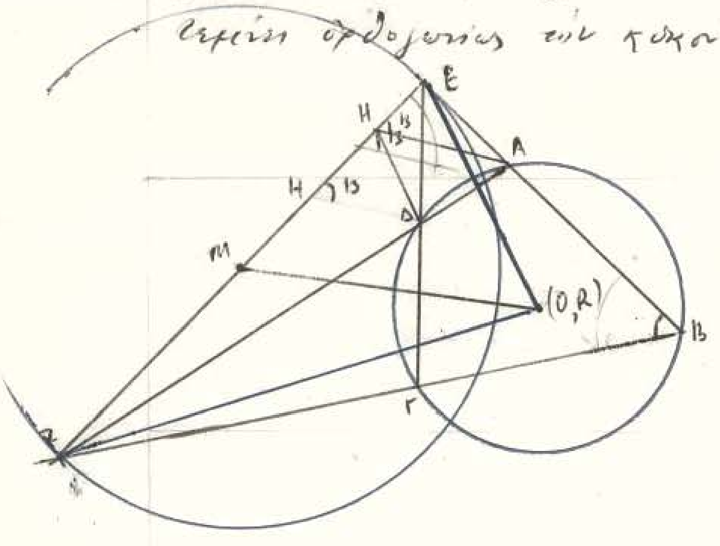
Απόδειξη.

$\hat{FMP} = \hat{G}_1 + \hat{B}_1$

$F\hat{P}M = \hat{E}_2 + \hat{\Delta}_1 = \hat{G}_1 + \hat{\Delta}_1$ αλλά $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$

Συνεπώς $F\hat{M}P = F\hat{P}M$. Τρίγωνον FMP ισοσκελές και η διχοτόμος FΩ είναι και ~~ύψος~~ ~~άρα~~ μεσοκάθετος στην ΜΡ. Όμοια ΕΡ μεσοκάθετος της ΩΝ και επειδή αι ΜΡ και ΩΝ μεσοκάθετοι αλληλοδιχοτομούνται εις Ι και ΜΝΡΩ ρόμβος.

4. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) αι απέναντι πλευραί τέμνονται εις Ε και Ζ. Δείξατε ότι ο κύκλος διαμέτρου ΕΖ τέμνει ορθογωνίως τον κύκλο (O,R).



Απόδειξη

Σχηματίζω $A\hat{H}E = \hat{B}$

ΑΒΖΗ εγγράψιμον.

$EA \cdot EB = EH \cdot EZ$ (1)

αλλά $B = \Delta$, όθεν $\hat{H} = \Delta$.

$\Rightarrow$ ΑΔΗΕ εγγράψιμον

$Z\Gamma \cdot ZB = Z\Delta \cdot ZA = ZH \cdot ZE$ (2)

(1) (2) $EZ^2 = EA \cdot EB + Z\Gamma \cdot ZB$ (3)

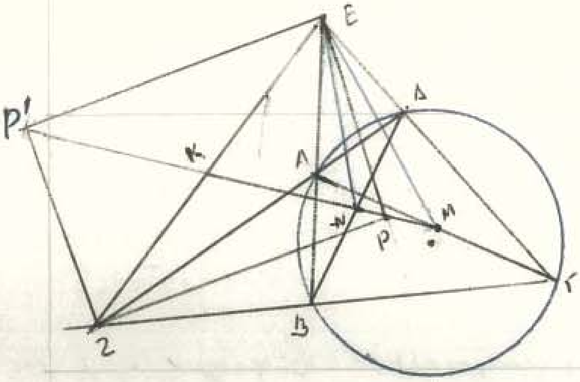
Θ. διαμ. εις $E\hat{O}Z \Rightarrow$

$EO^2 + ZO^2 = 2MO^2 + \frac{EZ^2}{2} \Rightarrow$

$EO^2 - R^2 + ZO^2 - R^2 = 2MO^2 + \frac{EZ^2}{2} - 2R^2$ (4) (3),(4) $\Rightarrow EZ^2 = 2MO^2 + \frac{EZ^2}{2} - 2R^2$

$\Rightarrow R^2 + \frac{EZ^2}{4} = OM^2$.

5 Τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Μ, Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ. Ἐὰν Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι ΕΜΝ, ΖΜΝ ἐφάπτονται τῆς ΕΖ.—



Ἀπόδειξις.

Εἶναι γνωστόν ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν $\hat{E}$ καὶ $\hat{Z}$ τέμνονται καθέτως εἰς P ἐπὶ τῆς ΜΝ. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους τῶν $\hat{E}$ καὶ $\hat{Z}$. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΕΡΖΡ' εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ Μ,Ν,Ρ,Ρ' ἁρμονικὴ τετράς. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Newton · $KP^2 = KN \cdot KM$ ἢ $KE^2 = KZ^2 = KN \cdot KM$.

Σημείωσις. Αἱ διχοτόμοι τῶν Ε καὶ Ζ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΜΝ καὶ ἡ ΕΡ εἶναι διχοτόμος τῆς ΝΕΜ.

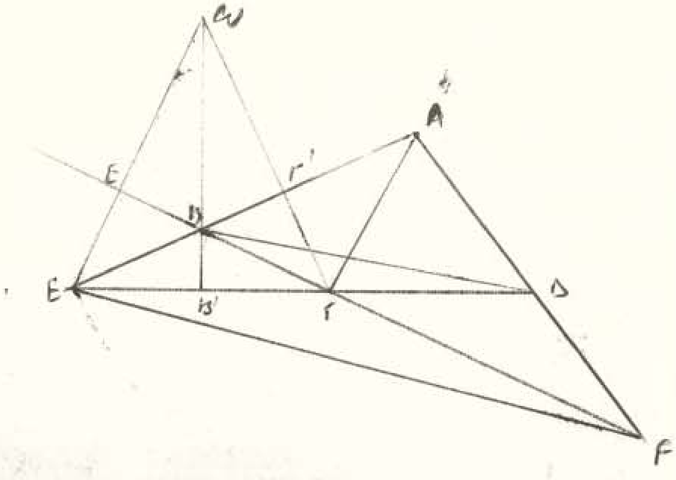
Ἀπόδειξις. $E\hat{B}\Delta = E\hat{\Gamma}A \to E\overset{\triangle}{\Delta B} \sim E\overset{\triangle}{\Gamma A} \Rightarrow$ ΕΜ, ΕΝ ἀντίστοιχοι διάμεσοι τῶν ὁμοίων τριγώνων. Ἄρα $M\hat{E}\Delta = N\hat{E}B$ διότι ἡ διχοτόμος τῆς Ε διχοτομεῖ καὶ τὴν $M\hat{E}N$. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διχοτόμων εἰς $\overset{\triangle}{MEN}$:

$\frac{MP}{NP} = \frac{ME}{NE}$ (1) ἀλλά $\frac{ME}{NE} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$ (2), (1),(2) $\to \frac{MP}{NP} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$ (3)

ὁμοίως ἂν P^* εἶναι τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς Ζ τέμνει τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΝ θὰ ἔχωμεν $\frac{MP^*}{NP^*} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$ (4) ἐκ τῶν (3),(4) $\Rightarrow$

$\frac{MP}{NP} = \frac{MP^*}{NP^*} \Rightarrow P \equiv P^*$.

6 Οἱ ἐν πλήρει 4πλεύρῳ οἱ τρεῖς κύκλοι οἱ γραφόμενοι με διαμέτρους τάς διαγωνίους του ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτήν δέσμην—



Ἄν φέρωμεν τά ὕψη τοῦ τριγώνου ΒΓΕ, ταῦτα διερχόμενα διά τοῦ ω θα εἶναι:

$\omega B \cdot \omega B' = \omega \Gamma \cdot \omega \Gamma' = \omega E \cdot \omega E'$.

Αἱ ἰσότητες αὐταί σημαίνουν ὅτι τό ω ἔχει τήν αὐτήν δύναμιν ὡς πρός τούς κύκλους διαμέτρων τῶν τριῶν διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ, ΕF.

Ἐπί πλέον τα ὀρθόκεντρα τῶν τριῶν ἄλλων τριγώνων ΑΔF, ΑΔΕ καί ΓΔF ἔχουν τόν αὐτόν ρόλον. Καί συνεπῶς:

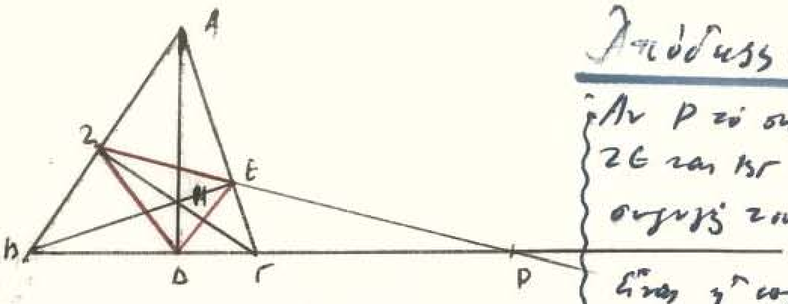
(i) Οἱ κύκλοι διαμέτρων ΑΓ, ΒΔ, ΕF ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν δέσμην.
(ii) Τα ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων σχηματιζομένων τριγώνων λαμβανομένων ἀνά τρεῖς τας πλευράς τοῦ 4πλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.
(iii) Τά κέντρα τῶν τριῶν κύκλων, δηλαδή τα μέσα τῶν διαγωνίων του 4πλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ΔΕΣΜΑΙ ΚΥΚΛΩΝ.

Δίδεται κύκλος Πο καί εὐθεῖα (P). Τό σύνολον τῶν κύκλων Π οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν, ὁμοῦ με τόν Πο τήν εὐθεῖαν (P) ὡς ριζικόν ἄξονα καλοῦμεν Δέσμην, συμβολισμός: $F_\eta = (\Pi_o/P)$. Η εὐθεῖα P καλεῖται ἄξων τῆς δέσμης. Ἀναλόγως τῆς θέσεως τῆς εὐθείας (P) πρός τόν κύκλον Πο αἱ δέσμαι διακρίνονται εἰς τρία εἴδη

(i) Δέσμαι τεμνομένων κύκλων
(ii) Δέσμαι ἐφαπτομένων κύκλων
(iii) Δέσμαι κύκλων μέ ὁριακά σημεῖα.

7 Αν Δ, Ε, Ζ είναι οι πόδες των υψών ενός τριγώνου ΑΒΓ δείξτε ότι το ορθόκεντρον αυτού Η είναι το κέντρον του εγγεγραμμένου τριγώνου, αι δε κορυφαί του τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων.

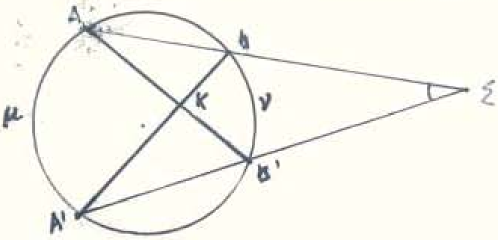


Απόδειξις.

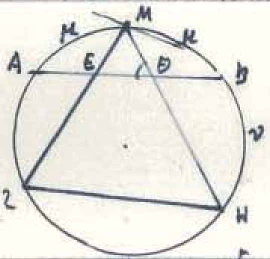
Αν Ρ το σημείον τομής της ΖΕ και ΒΓ τότε το Η είναι συζυγές του Ρ. η δε ΑΗΔ είναι η συζυγής αυτού ως προς τας ευθείας ΑΒ, ΑΓ.

Άρα αι τετράδες Ρ, Θ, Ζ, Ε και Δ(Ρ, Θ, Ζ, Ε) είναι αρμονικαί. Επειδή δε αι ευθείαι ΔΘΑ και ΒΔΓ είναι κάθετοι, αύται είναι διχοτόμοι της γωνίας Δ του τριγώνου ΔΕΖ. Ομοίως αποδεικνύεται ότι αι διχοτόμοι της μεν Ζ είναι αι ΖΓ, ΑΒ της δε Ε αι ΕΒ, ΑΓ.

(α) Γωνία έχουσα την κορυφήν της εντός κύκλου έχει μέτρον το ημιάθροισμα των μέτρων των τόξων των αποτεμνομένων υπ' αυτής και της κατακορυφήν της.
(β) Γωνία έχουσα την κορυφήν της εκτός κύκλου έχει μέτρον την ημιδιαφοράν των μέτρων των τόξων των περιεχομένων μεταξύ των πλευρών της.

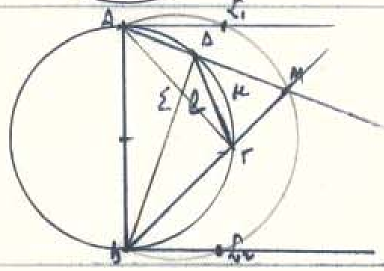


$\Sigma = \frac{\widehat{\mu}-\widehat{\nu}}{2}$
$K = \frac{\widehat{\mu}+\widehat{\nu}}{2}$



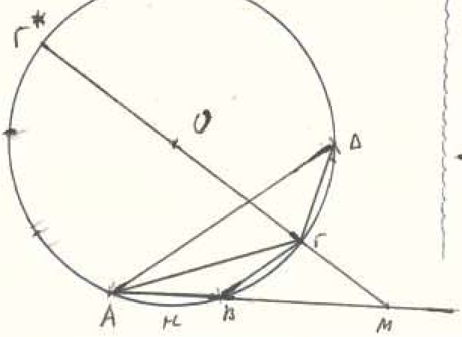
Δ.ε.ό. ΕΖΗΘ: εγγράψιμον.

$\ast Z = \frac{\widehat{\mu}+\widehat{\nu}}{2}$
$\ast \Theta = \frac{\widehat{\mu}+\widehat{\nu}}{2}$ $\Big\} \Rightarrow \hat{Z} = \hat{\Theta}$.



πόσον του Μ;
η του Σ;

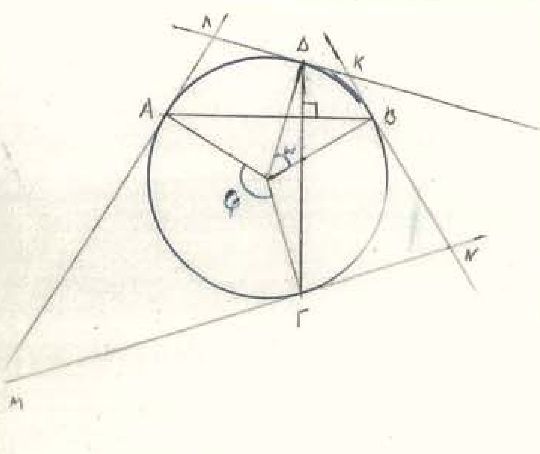
$\measuredangle M = \frac{180-\mu}{2}$ σταθερά.
$\measuredangle \Sigma = \frac{180+\widehat{\mu}}{2}$ "



Δίδεται κανονικόν 10γωνον ΑΒΓΔ...
η διάμετρος Γ*Γ τέμνει την ΑΒ προεκτεινομένην εἰς Μ. Δ.ε.ό. ΑΜ = ΑΔ.

Απόδειξις. $\triangle \Gamma A M = \triangle \Gamma A \Delta$ διότι ΑΓ κοινή.

$A\hat{\Delta}\Gamma = \frac{2\widehat{\mu}}{2} = \mu$
$AM\Gamma = \frac{3\mu-\mu}{2} = \mu$. και $\Delta\hat{A}\Gamma = M\hat{A}\Gamma$.



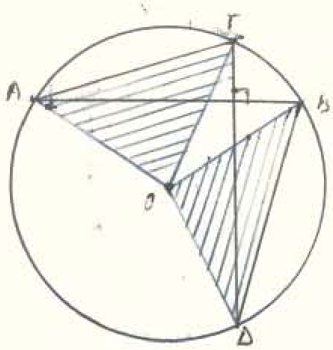
$AB \perp \Gamma\Delta$

Δ.ε.ό. ΚΛΜΝ εγγρ.

$K+\omega = 2^L$
$M+\varphi = 2^L$

$K+M+\omega+\varphi = 4^L$ αλλά $1^L = \frac{\widehat{\varphi}+\widehat{\omega}}{2} \Rightarrow \varphi+\omega = 2^L$

$K+M+2^L = 4^L \Rightarrow K+M = 2^L \Rightarrow$ ΚΛΜΝ εγγρ.



ΑΒ ⊥ ΓΔ

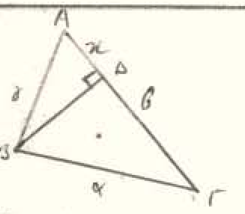
Δξ ότι ΟΑΓ ισοδ. ΟΒΔ.

Απόδειξη.

γων ΑΟΓ + γων ΒΟΔ = 2^{L}

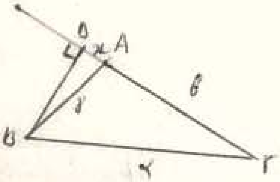
τότε $\frac{(OA\Gamma)}{(OB\Delta)} = \frac{R.R}{R.R} = 1 \Rightarrow O A \Gamma \simeq O B \Delta$.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ ΠΛΕΥΡΑΣ ἀπέναντι ὀξείας, ἀμβλείας ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ.



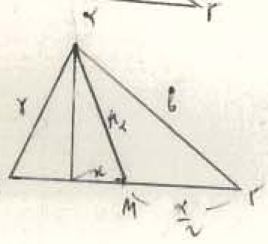
$$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta x.$$

$$\alpha^2 = ΓΔ^2+υ_β^2 = (\beta-x)^2+υ_β^2 = \beta^2+x^2-2\beta x+υ_β^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta x$$



$$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+2\beta x.$$

$$\alpha^2 = ΓΔ^2+υ_β^2 = (\beta+x)^2+υ_β^2 = \beta^2+x^2+2\beta x+υ_β^2 = \beta^2+\gamma^2+2\beta x$$



$\beta^2+\gamma^2 = 2μ_α^2+\frac{\alpha^2}{2}$	$\beta^2-\gamma^2 = 2\alpha x$

$\overset{\triangle}{AMΓ} \to \beta^2 = μ_α^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot x$ (1)

$\overset{\triangle}{AMB} \to \gamma^2 = μ_α^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot x$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \beta^2+\gamma^2 = 2μ_α^2+\frac{\alpha^2}{2}$.

$(1)-(2) \Rightarrow \beta^2-\gamma^2 = 2\alpha x$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ:

1) Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ μέ Ε, Ζ μέσα τῶν ΒΔ καί ΑΓ δ.ὅ. $AB^2+BΓ^2+ΓΔ^2+ΔA^2 = AΓ^2+BΔ^2+4EZ^2$.

2) Ἄν $2\beta^2=\alpha^2+\gamma^2$ τό τρίγωνο μέ πλευράς $μ_α, μ_β, μ_γ$ εἶναι ὅμοιο μέ τό ΑΒΓ.

3) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ δίδεται $2\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$. Μέ πλευρά τήν ΒΓ κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν τῆς ΒΓ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ. Δ.ὅ. $Δ\hat{A}E = 1^{\llcorner}$

4) Ἄν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ $\beta^2+\gamma^2=5\alpha^2$ τότε $μ_β \perp μ_γ$.

5) Τά σημεῖα Δ και Ε χωρίζουν τήν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη. Δ.ὅ. $AΔ^2+ΔE^2+AE^2 = \frac{2}{3}(BΓ)^2$.

6) Εἰς πᾶν τρίγωνον $\frac{μ_α^2+μ_β^2+μ_γ^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \frac{3}{4}$.

7) Εἰς τρίγωνον μέ $2\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ δ.ὅ. $μ_β^2+μ_γ^2=2μ_α^2$.

8) Εἰς πᾶν τρίγωνον $μ_α^4+μ_β^4+μ_γ^4 = \frac{9}{16}(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$.

9) Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου τέμνωνται καθέτως εἶναι ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.—

10) Δ.ὅ. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3(AG^2+BG^2+ΓG^2)$ G: βαρύκεντρο τοῦ ΑΒΓ

11) $MA^2+MB^2+MΓ^2 = 3MG^2+GA^2+GB^2+GΓ^2$. (Leibniz)

12) $\triangle$: α, $\beta^2-\gamma^2=k^2$ καί $υ_α$.

13) Δίδονται δύο σημεῖα Α καί Σ ἐπί διαμέτρου κύκλου (O,R) συμμετρικά ὡς πρός τό Ο. Διά τοῦ Σ φέρομεν τυχοῦσαν χορδήν ΒΣΓ μεταβλητῆς διευθύνσεως. Δ.ὅ. τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ παραμένει σταθερόν.—

14.) Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ πλευρών α, β, γ. Με πλευράν την ΒΓ κατασκευάζομεν εκατέρωθεν της ΒΓ ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΔ'. Δείξατε $ΑΔ^2 + ΑΔ'^2 = α^2 + β^2 + γ^2$.

15.) Δείξατε ότι ο τόπος των σημείων Μ τ.ω.: $ΜΒ^2 + ΜΓ^2 = 2ΜΑ^2$ είναι μία κάθετος προς την διάμεσον ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

16) Εις παν τρίγωνον ΑΒΓ: Δείξατε $μ_α^2 + βγ > \frac{α^2}{4} > μ_α^2 - βγ$.
— Υπόδειξις βγ > α) (β-γ).

17) Δείξατε $μ_α^2 = \frac{1}{4}(α^2 + 8Eσφ A)$

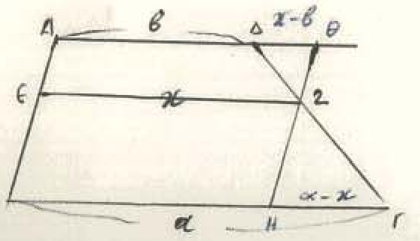
18) Δίδεται ευθεία xy και εκτός ταύτης δύο σημεία Α και Β. Εύρετε επί της xy σημείον Μ τ.ω.: $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = min$.

19) Δίδεται ευθεία xy και εκτός ταύτης δύο σημεία Α και Β, προς το αυτό μέρος της xy. Εύρετε επί της xy σημείον Μ τ.ω.: $λ \cdot ΜΑ^2 \pm μ \cdot ΜΒ^2 = κ^2$. λ, μ αριθμητικοί συντελεσταί και κ ευθύγραμμον τμήμα —

ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΑΒΓ. ΔΙΑΤΕΜΝΟΥΣΑ. ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ. (x, y, z). Σχέσεις μεταξύ αὐτῶν.—

ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

Εἰς τραπέζιον ΑΒΓΔ φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις ΒΓ και ΑΔ. Ἐὰν $EA : EB = \mu : \nu$ δεῖξατε $(EZ) = \dfrac{\alpha\mu + \beta\nu}{\mu+\nu}$.



Φέρω ΗΘ // ΒΑ. τότε ἐκ τῶν τριγώνων ΖΔΘ και ΖΗΓ ἔχω $\dfrac{x-\beta}{\alpha - x} = \dfrac{\Delta Z}{Z\Gamma} = \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{\mu}{\nu}$

ἄρα $\nu(x-\beta) = \mu(\alpha - x) \Rightarrow \nu x + \mu x = \alpha\mu + \nu\beta$

ἢ $x(\mu+\nu) = \alpha\mu + \beta\nu \Rightarrow x = \dfrac{\alpha\mu+\beta\nu}{\mu+\nu}$.

Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ τεμνομένας εἰς Κ. Ἀποδείξατε τὰς κάτωθι προτάσεις.

(i) ἂν $K \equiv G$ τότε $x = y + z$

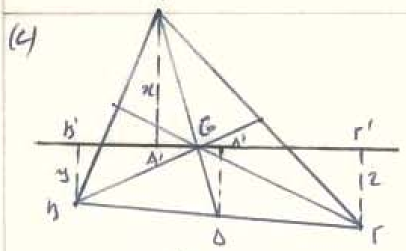
(ii) ἂν $K \equiv I$ τότε $\alpha x = \beta y + \gamma z$

(iii) ἂν $K \equiv L$ τότε $\alpha^2 x = \beta^2 y + \gamma^2 z$

(iv) ἂν $K \equiv H$ τότε $x\,\varepsilon\varphi A = y\,\varepsilon\varphi\Gamma + z\,\varepsilon\varphi B$

(v) ἂν $K \equiv Be$ τότε $x(\tau-\beta)(x-\gamma) = (\tau - \alpha)\{y(\tau-\beta) + z(\tau-\gamma)\}$

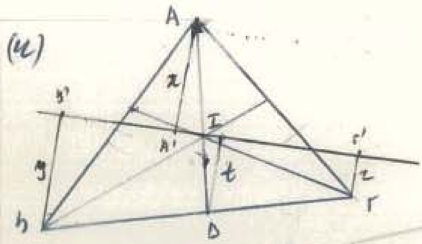
(i)



Εἶναι $AA' = 2\Delta\Delta' = BB' + \Gamma\Gamma'$.

ἤτοι $x = y + z$.

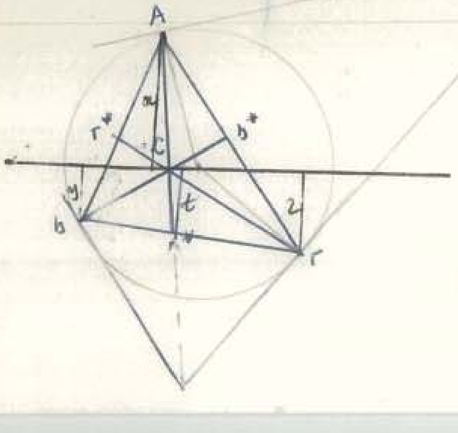
(ii)



Βάσει τῆς βοηθ. προτάσεως $t = \dfrac{\beta y + \gamma z}{\beta + \gamma}$ ἀφοῦ $\dfrac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = $

Ἐξ ἄλλου $\dfrac{AI}{I\Delta} = \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}$ τότε $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} = \dfrac{x}{t} \Rightarrow$

$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} = \dfrac{x}{\frac{\beta y + \gamma z}{\beta+\gamma}} = \dfrac{(\beta+\gamma)x}{\beta y + \gamma z} \Rightarrow \alpha x = \beta y + \gamma z$.



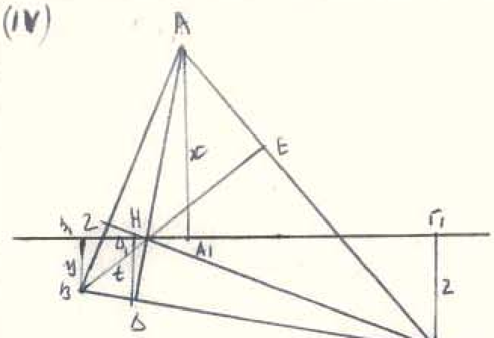
Εἶναι $\dfrac{BA^*}{A^*\Gamma} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$ (1)

$\dfrac{AL}{LA^*} = \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$ (2) $\qquad t = \dfrac{\gamma^2 z + \beta^2 y}{\gamma^2 + \beta^2}$

$\dfrac{x}{t} = \dfrac{AL}{LA^*} = \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{\beta^2 y + \gamma^2 z}{\gamma^2+\beta^2}} = \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$

$\Rightarrow \alpha^2 x = \beta^2 y + \gamma^2 z$.

(IV)



$$\frac{AH}{H\Delta} = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma\,\sigma\upsilon\nu B}{\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

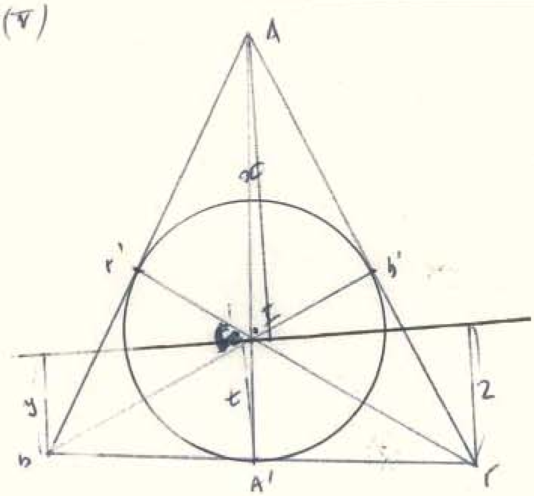
$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B}$$

$$t = \frac{y\,\varepsilon\varphi\Gamma + z\,\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}$$

$$\frac{x}{t} = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma} \Rightarrow \frac{x}{\frac{y\,\varepsilon\varphi\Gamma + z\,\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}} = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

$$\frac{x(\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma)}{y\,\varepsilon\varphi\Gamma + z\,\varepsilon\varphi B} = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma} \Rightarrow \frac{x\,\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma(y\,\varepsilon\varphi\Gamma + z\,\varepsilon\varphi B)} = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma} \Rightarrow x\,\varepsilon\varphi A = y\,\varepsilon\varphi\Gamma + z\,\varepsilon\varphi B.$$

(V)



$$\frac{AG_e}{G_eA'} = \frac{\tau-\alpha}{\tau-\beta} + \frac{\tau-\alpha}{\tau-\gamma} = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma+\tau-\beta)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$= \frac{(\tau-\alpha)[2\tau-(\beta+\gamma)]}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \frac{\alpha(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \frac{x}{t}$$

άρα $t = \dfrac{y(\tau-\beta)+z(\tau-\gamma)}{\alpha}$

επομένως $\dfrac{\alpha(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \dfrac{x}{\frac{y(\tau-\beta)+z(\tau-\gamma)}{\alpha}}$

$$\Rightarrow \frac{\alpha(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \frac{\alpha x}{y(\tau-\beta)+z(\tau-\gamma)}$$

και $x(\tau-\beta)(\tau-\gamma) = (\tau-\alpha)\{y(\tau-\beta)+z(\tau-\gamma)\}$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$\frac{1}{w}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (x, y, w διάφορα γεωμ. μήκη)

Ἄν Μ τυχόν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, φέρομεν ἀπό τάς Β καί Γ παραλλήλους πρός τήν ΑΜ, αἵτινες τέμνουν τάς ΑΒ καί ΑΓ εἰς Ρ καί Ν. Δεῖξαι ὅτι $\frac{1}{AM}=\frac{1}{BN}+\frac{1}{ΓP}$. Βάσει τῆς προτάσεως ταύτης νά κατασκευασθῇ τμῆμα x ὥστε: $\frac{1}{x}=\frac{1}{α_1}+\frac{1}{α_2}+\frac{1}{α_3}+\dots+\frac{1}{α_ν}$.

ΑΔ: διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ μέ ∡Α=120°. Δεῖξαι ὅτι $\frac{1}{AΔ}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AΓ}$.

Ἐπί τῶν πλευρῶν σταθερᾶς γωνίας xOy λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καί Β καί ὑποθέτομεν ὅτι $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{k}$. Δεῖξαι ὅτι ἡ ΑΒ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου. —

Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α=1∟) φέρομεν τήν ἐσωτερικήν διχοτόμον τῆς Α. Ἔστω $AΔ=δ_α$. Δεῖξαι ὅτι $\frac{\sqrt{2}}{δ_α}=\frac{1}{β}+\frac{1}{γ}$.

Ἄν Α,Β,Γ,Δ ἁρμονική τετράς, δεῖξαι ὅτι $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AΓ}+\frac{1}{AΔ}$.

Ἐκ τῆς κορυφῆς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρεται εὐθεῖα τέμνουσα τάς προεκτάσεις τῶν ΑΒ καί ΑΔ εἰς Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Δεῖξαι ὅτι $\frac{AB}{AE}+\frac{AΔ}{AZ}=1$.

Δύο περιφέρειαι (O_1,R_1) καί (O_2,R_2) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Θεωροῦμεν τήν περιφέρειαν διαμέτρου O_1O_2 καί τήν περιφ. (O,R) ἐφαπτομένην τῶν $(O_1),(O_2)$ καί τῆς περιφερείας διαμέτρου O_1O_2 ἐσωτερικῶς. Δεῖξαι ὅτι $\frac{1}{2R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. —

Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=1∟) φέρομεν τήν διχοτόμον ΒΔ. Ἔστω Ο τό μέσον αὐτῆς. Ἐκ τοῦ σημείου Ο καί ἐπί τήν ΒΔ φέρομεν τήν κάθετον ἥτις τέμνει τήν ὑποτείνουσαν εἰς Μ καί τήν ΑΒ εἰς Ν. Δεῖξαι ὅτι $\frac{1}{BN}=\frac{1}{BA}+\frac{1}{BΓ}$.

Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α=1∟). Δ, Δ' εἶναι τά ἴχνη τῆς ἐσωτερικῆς καί ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς ∡Α ἀντιστοίχως. Ε, Ε' τῆς ∡Β καί Ζ, Ζ' τῆς ∡Γ. Δεῖξαι ὅτι $\frac{1}{ΔΔ'}=\frac{1}{EE'}+\frac{1}{ZZ'}$.

Δίδεται κανονικόν 7γωνον πλευρᾶς $α$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Ἐάν $β, γ$ τά μήκη τῶν διαγωνίων του μέ $γ>β$. Δεῖξαι ὅτι $\frac{1}{α}=\frac{1}{β}+\frac{1}{γ}$ καί ὅτι $α=\frac{(β+γ)^2-2γ^2}{γ+β}$.

Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ τόξου ΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ καί x, y, z αἱ ἀποστάσεις του ἀπό τάς πλευράς $α, β, γ$. Δεῖξαι ὅτι $\frac{α}{x}=\frac{β}{y}+\frac{γ}{z}$.

Ἐάν εὐθεῖα ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ τέμνῃ τήν ἀπέναντι πλευράν ΒΓ εἰς Δ καί τήν περί τό τρίγωνον περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ε, δεῖξαι ὅτι $\frac{1}{ΔE}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{ΓE}$.

Ἐπί τῆς καθέτου πλευρᾶς ΑΒ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=1∟) ἐκτός αὐτοῦ, κατασκευάζομεν τετράγωνον ΑΒΕΖ. Ἄν δέ ἡ εὐθεῖα ΓΕ τέμνει τήν ΑΔ κάθετον ἐπί τήν ΒΓ εἰς τό σημεῖον Η. Δεῖξαι ὅτι $\frac{1}{AH}=\frac{1}{ΓB}+\frac{1}{AΔ}$.

Διά τοῦ κέντρου Ο ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἥτις τέμνει τάς πλευράς τοῦ τριγώνου εἰς τά Μ, Ν καί Ρ. Δεῖξαι ὅτι ἄν θεωρήσωμεν τά $\overline{OM}, \overline{ON}, \overline{OP}$ ἡ ἀλγεβρική σχέσις θά εἶναι $\frac{1}{OM}+\frac{1}{ON}+\frac{1}{OP}=0$.

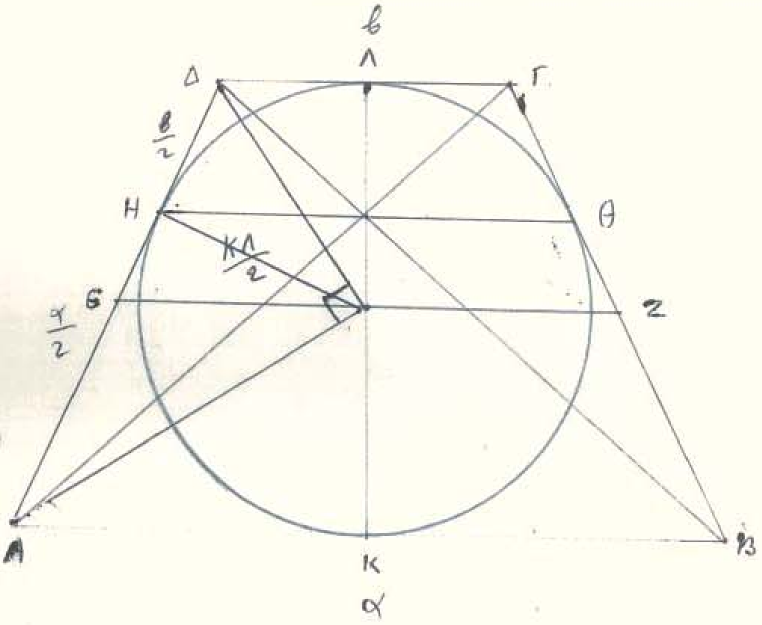
[illegible] [illegible]: Δξ ότι $\frac{2}{υ_α} = \frac{1}{υ_β} + \frac{1}{υ_γ}$.

Ἂν E και F είναι οι πόδες των καθέτων των κορυφών Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ επί την διχοτόμον ΑΔ αυτού Δξ ότι $\frac{2}{δ_α} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$.

Φέρομεν τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓF τριγώνου ΑΒΓ τεμνόμενα εις Η. Ἂν η ΕF τέμνη την ΑΔ εις Ρ. Δξ ότι $\frac{2}{AH} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AΔ}$. —

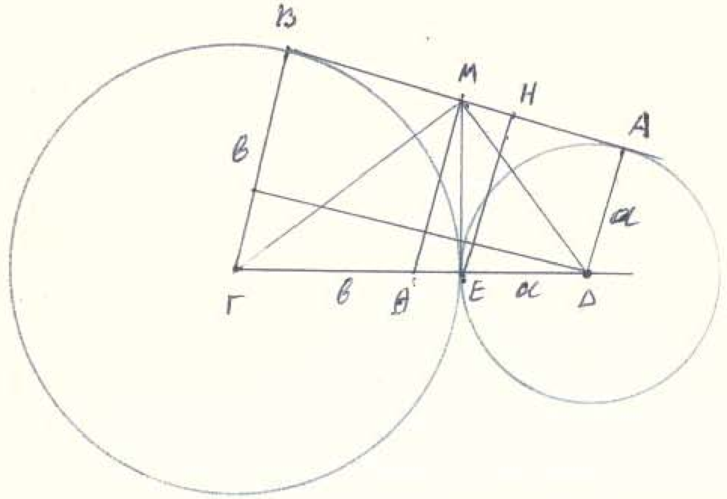
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

της $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}$



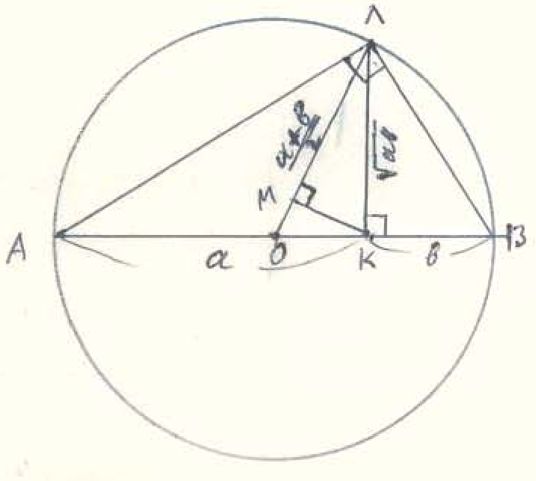
$ΗΘ < ΚΛ < ΕΖ$

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}.$$



$ΕΗ < ΕΜ < ΜΘ$

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}$$



$ΜΛ < ΚΛ < ΟΛ$

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}$$

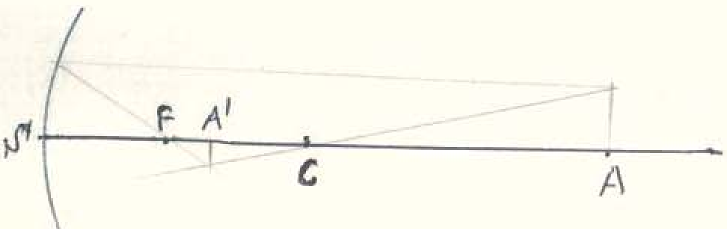
<u>Φυσική ἑρμηνεία</u> τῶν $m_a = \frac{a+b}{2}$, $m_p = \sqrt{ab}$ καί $m_h = \frac{2ab}{a+b}$.

Ἔστω κάτοπτρον κοῖλον S, F ἡ ἑστία του, C τό κέντρον A ἕν φωτεινόν σημεῖον καί A' ἡ εἰκών του.

AF εἶναι ὁ μέσος ἀριθμητικός τῶν AC καί AS

SC ὁ μέσος ἁρμονικός τῶν SA καί SA'.

FC ὁ μέσος γεωμετρικός τῶν FA καί FA'. Ἡ διάταξις τῶν σημείων, ἐπί τοῦ κυρίου ἄξονος δεικνύει τήν ἀνισοτικήν σχέσιν

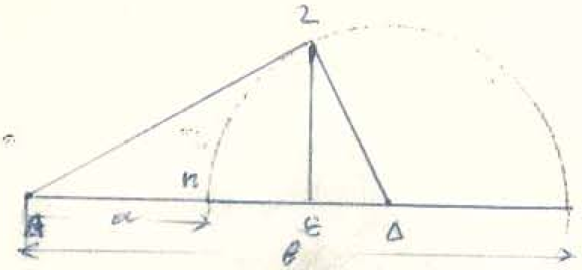


$m_h < m_p < m_a$

$$AF = \frac{AC + AS}{2}, \quad SC = \frac{2\, SA \cdot SA'}{SA + SA'}, \quad FC = \sqrt{FA \cdot FA'}$$

Παρατήρησις 1) $m_p^2 = m_a m_h$.

2) $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$



Εἰς τό ἔναντι σχῆμα

$AΔ = \frac{a+b}{2}$ (1)

$AZ = \sqrt{ab}$ (2)

$AE = \frac{2ab}{a+b}$ (3) διότι $AE \cdot AΔ = AZ^2$)

$AΔ > AZ > AE$

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

ΟΠΛΑ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

1. Εὐθεῖα κάθετος ἐπί ἐπίπεδον.
2. Κλίσις εὐθείας ὡς πρός ἐπίπεδον.
3. Θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων.
4. Ἐλαχίστη ἀπόστασις μεταξύ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.
5. Ὀρθογωνίως ἀσύμβατοι εὐθεῖαι . Συνθήκη ὀρθογωνιότητος μεταξύ δύο τμημάτων ΑΒ καί ΓΔ.
6. V.ΣΑΒΓ/VΣΑΒΓ' - (ΣΑ.ΣΒ.ΣΓ)/(ΣΑ'.ΣΒ'.ΣΓ').
7. Τρισορθογώνιον τετράεδρον.
8. Ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον.
9. Περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον,περί τετράεδρον.
10. Ὄγκος τετραέδρου μέ ἴσας ἀντικειμένας ἀκμάς.
11. Θεώρημα STEINER. VΣΑΒΓ= 1/6 αάδημα α α'.
12. Παράπλευρος Ἐπιφάνεια Κολούρου Κώνου.
13. Ὄγκος τριγώνου στρεφομένου περί μίαν του πλευράν.
14. Τομαί στερεῶν ὑπό ἐπιπέδου.
15. Τόποι ἐν τῷ χώρῳ .

1

Προσέξατε τ' ακόλουθα:

13, 15, 15β, 16, 17α, 18, 19, 20,
23, 28, 29, 31, 32, 33, 34α, 37,
44, 45, 46, 48

ΚΑΡΤΕΛΛΕΣ ΠΡΟΣ ΜΕΛΕΤΗΝ.

1, $\boxed{2}$, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11
12, 13, 14, $\boxed{23}$, 25, 26, 28, 44,
45, 48