ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΛ

Οδηγίες για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας Α΄ τάξης Ημερήσιου ΓΕΛ κατά το σχολικό έτος 2017-2018

Σύμφωνα με την αρ. πρωτ. 163561/Δ2/2-10-2017 εγκύκλιο του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

www.pe03.gr

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Φθιώτιδας και Ευρυτανίας
www.pe03.gr

Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α' Λυκείου εστιάζει στο πέρασμα από τον εμπειρικό στο θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με στοιχεία θεωρητικής γεωμετρικής σκέψης και στο Γυμνάσιο, όπου έχουν αντιμετωπίσει ασκήσεις που απαιτούν θεωρητική απόδειξη. Στην Α' Λυκείου, πρέπει αυτή η εμπειρία των μαθητών να αξιοποιηθεί με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρητικής τους σκέψης. Η διατύπωση ορισμών γεωμετρικών εννοιών είναι κάτι δύσκολο για τους μαθητές, ακόμα και αυτής της τάξης, καθώς απαιτεί τη συνειδητοποίηση των κρίσιμων και ελάχιστων ιδιοτήτων που απαιτούνται για τον καθορισμό μιας έννοιας. Επίσης οι μαθητές χρειάζεται να διερευνούν ιδιότητες και σχέσεις των γεωμετρικών εννοιών και να δημιουργούν εικασίες τις οποίες να προσπαθούν να τεκμηριώσουν. Η αντιμετώπιση της μαθηματικής απόδειξης απλά ως περιγραφή μιας σειράς λογικών βημάτων που παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό, δεν είναι κατάλληλη ώστε να μυηθούν οι μαθητές στη σημασία και την κατασκευή μιας απόδειξης. Αντίθετα, είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές σε αποδεικτικές διαδικασίες, να προσπαθούν να εντοπίζουν τη βασική αποδεικτική ιδέα, μέσω πειραματισμού και διερεύνησης, και να χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς και αναπαραστάσεις, που υποστηρίζουν την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών. Η κατασκευή από τους μαθητές αντιπαραδειγμάτων και η συζήτηση για το ρόλο τους είναι μια σημαντική διαδικασία, ώστε να αρχίσουν να αποκτούν μια πρώτη αίσθηση της σημασίας του αντιπαραδείγματος στα Μαθηματικά. Η απαγωγή σε άτοπο είναι επίσης μια μέθοδος που συχνά συναντούν οι μαθητές στην απόδειξη αρκετών θεωρημάτων. Ο ρόλος του «άτοπου» στην τεκμηρίωση του αρχικού ισχυρισμού αλλά και το κατά πόσο η άρνηση του συμπεράσματος οδηγεί τελικά στην τεκμηρίωσή του, δημιουργούν ιδιαίτερη δυσκολία στους μαθητές. Σε όλα τα παραπάνω ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας.

Διδακτέα ύλη και προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας ανά παράγραφο για το σχολικό έτος 2017-2018

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ., Σίδερη Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ	ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ	ΩΡΕΣ
Κεφ 1ο **Εισαγωγή**	1.1 – Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας	1
	1.2 – Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας	
Κεφάλαιο 3ο **Τρίγωνα**	3.1 – Είδη και στοιχεία τριγώνων	2
	3.2 – 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	
	3.3 – 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	3
	3.4 – 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	
	3.5 – Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	3
	3.6 – Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, εκτός της απόδειξης των θεωρημάτων I και II	
	3.7 – Κύκλος – Μεσοκάθετος – Διχοτόμος	1
	3.10 – Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	2
	3.11 – Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	
	3.12 – Τριγωνική ανισότητα, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	
	3.13 – Κάθετες και πλάγιες, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος II	
	3.14 – Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος I	2
	3.15 – Εφαπτόμενα τμήματα	
	3.16 – Σχετικές θέσεις δυο κύκλων	
	3.17 – Απλές γεωμετρικές κατασκευές	1
	3.18 – Βασικές κατασκευές τριγώνων	
Κεφάλαιο 4ο **Παράλληλες ευθείες**	4.1 – Εισαγωγή	4
	4.2 – Τέμνουσα δυο ευθειών – Ευκλείδειο αίτημα, εκτός της απόδειξης του πορίσματος II στη σελίδα 81 και των προτάσεων I, II, III και IV	
	4.4 – Γωνίες με πλευρές παράλληλες	
	4.5 – Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου	
	4.6 – Άθροισμα γωνιών τριγώνου	3
	4.8 – Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου, εκτός της απόδειξης του πορίσματος	
	Ιστορικό Σημείωμα	2
Κεφάλαιο 5ο **Παραλληλόγραμμα Τραπέζια**	5.1 – Εισαγωγή	4
	5.2 – Παραλληλόγραμμα	
	5.3 – Ορθογώνιο	5
	5.4 – Ρόμβος	
	5.5 – Τετράγωνο	
	5.6 – Εφαρμογές στα τρίγωνα, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος III	5
	5.7 – Βαρύκεντρο τριγώνου, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	
	5.8 – Το ορθόκεντρο τριγώνου, χωρίς το πόρισμα	
	5.9 – Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου	
	5.10 – Τραπέζιο	5
	5.11 – Ισοσκελές τραπέζιο	
Κεφάλαιο 6ο **Εγγεγραμμένα σχήματα**	6.1 – Εισαγωγικά – Ορισμοί	2
	6.2 – Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	
	6.3 – Γωνία χορδής και εφαπτομένης, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	
	6.4 – Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο – Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία	5
	6.5 – Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο	
	6.6 – Το εγγράψιμο τετράπλευρο, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος	
	Σύνολο ωρών	**50**

Διαχείριση της διδακτέας ύλης για το σχολικό έτος 2017-2018

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8-6-2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ:

http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php

Κεφάλαιο 1ο • Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

1.1 - Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας **1.2 - Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας**	**1 ώρα**

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η διάκριση και επισήμανση των διαφορετικών χαρακτηριστικών της Πρακτικής Γεωμετρίας, που οι μαθητές διδάχθηκαν σε προηγούμενες τάξεις, και της Θεωρητικής Γεωμετρίας που θα διδαχθούν στο Λύκειο. Κάποια ζητήματα που θα μπορούσαν να συζητηθούν για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της Θεωρητικής Γεωμετρίας έναντι της Πρακτικής, είναι: Η αδυναμία ακριβούς μέτρησης, η ανάγκη μέτρησης αποστάσεων μεταξύ απρόσιτων σημείων, η αναξιοπιστία των εμπειρικών προσεγγίσεων (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο ΕΓ1 του ΑΠΣ).

Για να αποκτήσουν οι μαθητές μια πρώτη αίσθηση των βασικών αρχών της ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος, προτείνεται να εμπλακούν σε μια συζήτηση σχετικά με τη σημασία και το ρόλο των όρων «πρωταρχική έννοια», «ορισμός», «αξίωμα», «θεώρημα», «απόδειξη». Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης της Γεωμετρίας μπορούν να αποτελέσουν ένα πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θα αναδειχθούν τα παραπάνω ζητήματα.

Κεφάλαιο 3ο • Τρίγωνα

3.1 - Είδη και στοιχεία τριγώνων **3.2 - 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος**	**2 ώρες**
3.3 - 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος **3.4 - 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος**	**3 ώρες**
3.5 - Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος **3.6 - Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, εκτός της απόδειξης των θεωρημάτων I και II**	**3 ώρες**

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί το μεγαλύτερο μέρος του περιεχομένου των παραγράφων 3.1 έως 3.6 στο Γυμνάσιο. Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε κάποια νέα στοιχεία όπως:

α) Η σημασία της ισότητας των ομόλογων πλευρών στη σύγκριση τριγώνων.

β) Η διαπραγμάτευση παραδειγμάτων τριγώνων με τρία κύρια στοιχεία τους ίσα, τα οποία - τρίγωνα- δεν είναι ίσα (δυο τρίγωνα με ίσες δυο πλευρές και μια μη περιεχόμενη γωνία αντίστοιχα ίση, όπως στις δραστηριότητες Δ.5 και Δ.7 του ΑΠΣ).

γ) Ο σχεδιασμός σχημάτων με βάση τις λεκτικές διατυπώσεις των γεωμετρικών προτάσεων (ασκήσεων, θεωρημάτων) και αντίστροφα.

δ) Η διατύπωση των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών.

ε) Η ισότητα τριγώνων, ως μια στρατηγική απόδειξης ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών (σχόλιο σελ.43).

στ) Ο εντοπισμός κατάλληλων τριγώνων για σύγκριση σε «σύνθετα» σχήματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.6 του ΑΠΣ).

ζ) Η σημασία της «βοηθητικής γραμμής» στην αποδεικτική διαδικασία (πόρισμα Ι της §.3.2).

Προτείνεται να ενοποιηθούν σε μια πρόταση οι προτάσεις που ταυτίζουν τη διχοτόμο, τη διάμεσο και το ύψος από τη κορυφή ισοσκελούς τριγώνου (πόρισμα Ι σελ.42, πόρισμα Ι σελ.45, πόρισμα Ι σελ.50).

Μαζί με την πρόταση αυτή προτείνεται να γίνει η διαπραγμάτευση της εφαρμογής 2 της σελ.61 για την απόδειξη της οποίας αρκούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

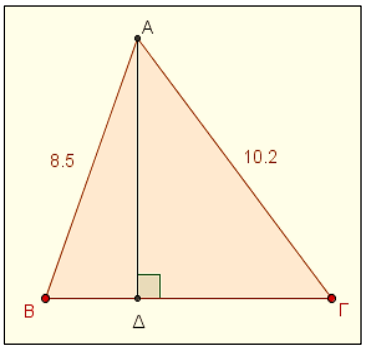
Επίσης, σαν μια ενιαία πρόταση, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να δείξουν ότι σε ίσα τρίγωνα τα δευτερεύοντα στοιχεία τους (διάμεσος, ύψος, διχοτόμος) που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι επίσης ίσα (π.χ. άσκηση 1i Εμπέδωσης σελ. 48, άσκηση 4 Εμπέδωσης σελ.54). Ενιαία μπορούν να αντιμετωπιστούν, ως αντίστροφες προτάσεις, τα πορίσματα Ιν της §3.2 και ΙΙΙ, Ιν της §3.4 που αναφέρονται στις σχέσεις των χορδών και των αντίστοιχων τόξων.

Με στόχο την ανάδειξη της διδακτικής αξίας των γεωμετρικών τόπων προτείνεται τα πορίσματα ΙΙΙ της §3.2 και ΙΙ της §3.4, που αφορούν στη μεσοκάθετο τμήματος, καθώς και το θεώρημα Ιν της §3.6, που αφορά στη διχοτόμο γωνίας, να διδαχθούν ενιαία ως παραδείγματα βασικών γεωμετρικών τόπων. Συγκεκριμένα, προτείνεται οι μαθητές πρώτα να εικάσουν τους συγκεκριμένους γεωμετρικούς τόπους και στη συνέχεια να τους αποδείξουν (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.8, Δ.9 και Δ.10 του ΑΠΣ).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Με το μικροπείραμα «3^{ο} κριτήριο ισότητας τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια της ισότητας των τριγώνων. Αναζητούν απαντήσεις, με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το κατασκευαστικό περιβάλλον του Χελωνόκοσμου.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5821

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:



Με το μικροπείραμα «Ύψος, Διάμεσος και διχοτόμος της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές οδηγούνται μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της σχέσης που συνδέει το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου. Παράλληλα μαθαίνουν για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2277

3.7 - Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος	**1 ώρα**

3.10 - Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος **3.11 - Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος** **3.12 - Τριγωνική ανισότητα, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος** **3.13 - Κάθετες και πλάγιες, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος ΙΙ**	**2 ώρες**

Η ύλη των παραγράφων αυτών είναι νέα για τους μαθητές. Να επισημανθεί στους μαθητές ότι η τριγωνική ανισότητα αποτελεί κριτήριο για το πότε τρία ευθύγραμμα τμήματα αποτελούν πλευρές τριγώνου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ). Στόχος είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν την αναγκαιότητά της, αλλά και τη λειτουργικότητά της, για την κατασκευή ενός τριγώνου.

Επίσης, προτείνονται οι ασκήσεις 4 και 6 (Αποδεικτικές), που διαπραγματεύονται την απόσταση σημείου από κύκλο και σχέσεις χορδών και τόξων αντίστοιχα.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να εξετάσετε αν κατασκευάζονται τρίγωνα με μήκη πλευρών τις τιμές των α, β και γ για τις περιπτώσεις του παρακάτω πίνακα.

α	β	γ
5	6	7
10	3	4
8	9	10
12	3	5

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Αν δύο πλευρές τριγώνου έχουν μήκη 5 και 9:

α) Να δώσετε ενδεικτικές τιμές για την τρίτη πλευρά,

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το μήκος της τρίτης πλευράς.

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ευθείας, για το οποίο:

α) Το άθροισμα ΑΜ+ΒΜ γίνεται ελάχιστο,

β) Η διαφορά ΑΜ-ΜΒ γίνεται μέγιστη.

Να λύσετε το πρόβλημα στην περίπτωση που τα Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας και στην περίπτωση που βρίσκονται προς την ίδια μεριά.

Υπάρχει σημείο Μ, ώστε το άθροισμα να γίνει μέγιστο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Υπάρχει σημείο Μ, ώστε η διαφορά να γίνει ελάχιστη; Αν ναι, ποιο;

Σχόλιο-στόχος: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις ανισοτικές σχέσεις σε ένα τρίγωνο για επίλυση προβλήματος

3.14 - Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος Ι **3.15 - Εφαπτόμενα τμήματα** **3.16 - Σχετικές θέσεις δυο κύκλων**	**2 ώρες**

Τα συμπεράσματα της §3.14 είναι γνωστά στους μαθητές από το Γυμνάσιο. Οι αιτιολογήσεις, όμως, προέρχονται από τα θεωρήματα της §3.13. Το περιεχόμενο της §3.16 δεν είναι γνωστό στους μαθητές και χρειάζεται και για τις γεωμετρικές κατασκευές που ακολουθούν (προτείνονται οι Δ.14 και Δ.15 του ΑΠΣ).

3.17 - Απλές γεωμετρικές κατασκευές **3.18 - Βασικές κατασκευές τριγώνων**	**1 ώρα**

Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών κατασκευών συμβάλλει στην κατανόηση των σχημάτων από τους μαθητές με βάση τις ιδιότητές τους καθώς και στην ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί και σε εξωμαθηματικές γνωστικές περιοχές. Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα τα προβλήματα 2 και 4 της §3.17 και τα προβλήματα 2 και 3 της §3.18.

Κεφάλαιο 4ο • Παράλληλες ευθείες

4.1 - Εισαγωγή **4.2 - Τέμνουσα δυο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα, εκτός της απόδειξης του πορίσματος ΙΙ στη σελίδα 81 και των προτάσεων Ι, ΙΙ, ΙΙΙ και IV** **4.4 - Γωνίες με πλευρές παράλληλες** **4.5 - Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος που αναφέρεται στον εγγεγραμμένο κύκλο τριγώνου**	**4 ώρες**

Το σημαντικότερο θέμα στις παραγράφους αυτές αποτελεί το «αίτημα παραλληλίας» το οποίο καθορίζει τη φύση της Γεωμετρίας στην οποία αναφερόμαστε. Η σημασία του «αιτήματος παραλληλίας», για τη Γεωμετρία την ίδια και για την ιστορική της εξέλιξη, μπορεί να διαφανεί από στοιχεία που παρέχονται στο ιστορικό σημείωμα της σελ. 96 καθώς επίσης και στη δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ. Οι μαθητές είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν την αδυναμία χρήσης του ορισμού και τη σημασία των προτάσεων της §4.2 (που προηγούνται του «αιτήματος παραλληλίας») ως εργαλεία για την απόδειξη της παραλληλίας δύο ευθειών. Προτείνεται να διερευνήσουν οι μαθητές τη σχέση του θεωρήματος της §4.2 και της Πρότασης Ι της σελ. 82 με στόχο να αναγνωρίσουν ότι το ένα είναι το αντίστροφο του άλλου.

Προτείνεται, πριν τη διαπραγμάτευση των θεωρημάτων της παραγράφου 4.5 να επισημανθεί η στρατηγική που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις των θεωρημάτων σχετικά με το πώς δείχνουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, γιατί δεν είναι οικεία στους μαθητές, διαδικασία η οποία αναδεικνύεται με τις αποδείξεις των θεωρημάτων της παραγράφου.

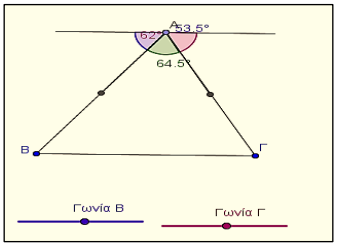
4.6 - Άθροισμα γωνιών τριγώνου **4.8 - Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου, εκτός της απόδειξης του πορίσματος**	**3 ώρες**

Προτείνεται το θεώρημα της §4.6 να συνδεθεί με τα πορίσματα της σελ. 59, ώστε οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι ισχυρότερο από τα πορίσματα και ότι αυτό οφείλεται στη χρήση του «αιτήματος παραλληλίας» στην απόδειξή του. Το ίδιο ισχύει και για το πόρισμα (i) της σελ. 89 σε σχέση με το Θεώρημα της σελ. 59.

Προτείνεται οι μαθητές, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών τριγώνου, να βρουν το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου, πενταγώνου κ.α., να εικάσουν το άθροισμα των γωνιών ν-γώνου και να αποδείξουν την αντίστοιχη σχέση (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο ΠΕ4 του ΑΠΣ). Δίνεται έτσι η δυνατότητα σύνδεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας. Να επισημανθεί, επίσης, η σταθερότητα του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών ν-γώνου.

<u>Ενδεικτική δραστηριότητα 1:</u>

Με το μικροπείραμα «Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές διερευνούν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και οδηγούνται σταδιακά από την διαίσθηση στην τυπική απόδειξη του σχετικού θεωρήματος.
http://photodentro.edu.gr/lor/i78521/2265



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα. Στη στήλη «Τρίγωνα» να συμπληρώσετε τον αριθμό των τριγώνων στα οποία χωρίζεται το πολύγωνο από διαγώνιους που άγονται από μία κορυφή του.

Αριθμός πλευρών	Τρίγωνα	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου
4		
5		
6		
…		
ν		

Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο του αθροίσματος των γωνιών κυρτού ν-γώνου;

Σχόλιο: Αυτή η δραστηριότητα αποσκοπεί στην δημιουργία εικασίας, που θα οδηγήσει στην απόδειξη του τύπου.

Ιστορικό σημείωμα **2 ώρες**

Στο ιστορικό σημείωμα αναδεικνύεται η σημασία του 5^{ου} αιτήματος στην δημιουργία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και παρουσιάζεται η συζήτηση και οι αναζητήσεις που προκάλεσε η διατύπωσή του, μέχρι τον 19^{ο} αιώνα, και που τελικά οδήγησαν στη δημιουργία των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών. Προτείνεται, η θεματολογία του ιστορικού σημειώματος, να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν σχετικές εργασίες από τους μαθητές.

Κεφάλαιο 5^{ο} • Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

5.1 - Εισαγωγή
5.2 - Παραλληλόγραμμα **4 ώρες**

Να επισημανθεί ότι καθένα από τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του παραλληλογράμμου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν αν ένα τετράπλευρο με τις δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και τις άλλες δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο. Για την εφαρμογή των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων μπορεί να αξιοποιηθεί η δραστηριότητα Δ.19 του ΑΠΣ.

Προτεινόμενη εργασία:

Να επιλέξετε ένα από τα κριτήρια που καθιστούν ένα τετράπλευρο, παραλληλόγραμμο. Θεωρώντας το κριτήριο που επιλέξατε ως ορισμό, να αποδείξετε τον παλιό ορισμό και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

Σχόλιο: Με αυτή την εργασία, οι μαθητές διακρίνουν τον ορισμό από τις ιδιότητες και τα κριτήρια και εξετάζουν το ισοδύναμο μεταξύ ορισμού και κριτηρίου

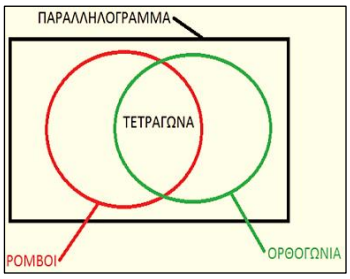
5.3 - Ορθογώνιο
5.4 - Ρόμβος **5 ώρες**
5.5 - Τετράγωνο

Να επισημανθεί ότι κάθε ένα από τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του ορθογωνίου ή του ρόμβου ή του τετραγώνου αντίστοιχα. Επιδιώκεται οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) με βάση τα αντίστοιχα κριτήρια και όχι με βάση κάποια πρότυπα σχήματα που συνδέονται με την οπτική γωνία που

τα κοιτάμε. Να δοθεί έμφαση στην ταξινόμηση των παραλληλογράμμων με βάση τις ιδιότητές τους (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 1) στην άρση της παρανόησης που δημιουργείται σε μαθητές, ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν: αν ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο και αν ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος, καθώς και να αξιοποιήσουν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων (δραστηριότητες Δ.20, Δ.21 και Δ.22 του ΑΠΣ).

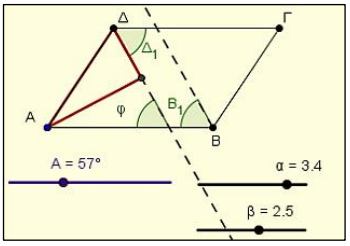
Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να δημιουργήσετε διαγραμματική αναπαράσταση της ταξινομίας των παραλληλογράμμων (π.χ. με χρήση εννοιολογικού χάρτη, διαγράμματος Venn).



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η άσκηση εμπέδωσης 3 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να υλοποιηθεί πιο διερευνητικά με το μικροπείραμα «Τι σχήμα δημιουργούν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός παραλληλογράμμου;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. Με τη βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές μεταβάλλουν τις γωνίες και τις πλευρές ενός παραλληλογράμμου για να δημιουργήσουν την εικασία σχετικά με το σχήμα που δημιουργείται από τις διχοτόμους, ενώ στη συνέχεια αποδεικνύουν την εικασία αυτή.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5825



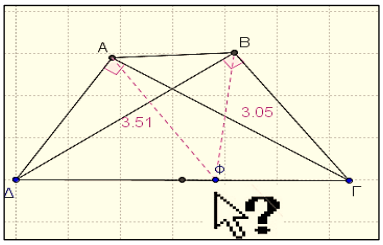
5.6 - Εφαρμογές στα τρίγωνα, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος ΙΙΙ **5.7 - Βαρύκεντρο τριγώνου, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος** **5.8 - Το ορθόκεντρο τριγώνου, χωρίς το πόρισμα** **5.9 - Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου**	**5 ώρες**

Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να εικάσουν σε ποια γραμμή ανήκουν τα σημεία που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι η μεσοπαράλληλή τους είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Προτείνεται, επίσης, η διαπραγμάτευση της Εφαρμογής 1 της σελ. 106. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν τα είδη των τριγώνων που το ορθόκεντρο είναι μέσα ή έξω από το τρίγωνο. Θα μπορούσαν να αναζητηθούν εναλλακτικές αποδείξεις για τα θεωρήματα που αφορούν στις ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου.

Προτείνεται η απόδειξη του θεωρήματος της παραγράφου 5.7 να αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην τάξη με στόχο την ανάδειξη των μεθοδολογικών στοιχείων της.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά το μικροπείραμα «Η σχέση της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με την διάμεσο που αντιστοιχεί σ' αυτήν και επίλυση προβλημάτων με τη σχέση αυτή».
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5781



5.10 - Τραπέζιο **5.11 - Ισοσκελές τραπέζιο**	**5 ώρες**

Εκτός από το συγκεκριμένο αντικείμενο των παραγράφων αυτών, προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων που συνδυάζουν γεωμετρικά θέματα από όλο το κεφάλαιο. Προτείνεται επίσης να συζητηθεί με τους μαθητές η ταξινόμηση των τετραπλεύρων του σχολικού βιβλίου (σελ. 125) και, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού, η συσχέτιση με άλλες ταξινομήσεις όπως αναφέρονται στο ιστορικό σημείωμα των σελ. 123, 124.

Κεφάλαιο 6ο • Εγγεγραμμένα σχήματα

6.1 - Εισαγωγικά - Ορισμοί **6.2 - Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος** **6.3 - Γωνία χορδής και εφαπτομένης, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος**	**2 ώρες**

Στόχος είναι οι μαθητές να χρησιμοποιούν τη σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας σε επίλυση προβλημάτων, καθώς και να αναγνωρίζουν ως ορθές τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο. Επίσης να χρησιμοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος της §6.3 (γωνία χορδής και εφαπτομένης).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να βρείτε το μέτρο της γωνίας δύο τεμνουσών ευθειών κύκλου, συναρτήσει των οριζομένων από αυτές τόξων κύκλου (προτείνεται η δραστηριότητα να υλοποιηθεί σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας).

6.4 - Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο - Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία **6.5 - Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο** **6.6 - Το εγγράψιμο τετράπλευρο, εκτός της απόδειξης του θεωρήματος**	**5 ώρες**

Να γίνει απλή αναφορά στην παράγραφο 6.4 (τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία). Προτείνεται, ως εισαγωγή στο πρόβλημα εγγραψιμότητας ενός τετραπλεύρου σε κύκλο, οι μαθητές να διερευνήσουν ποια από τα γνωστά τετράπλευρα (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο) είναι εγγράψιμα, βασιζόμενοι στις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων (π.χ., ο ρόμβος δεν είναι εγγράψιμος σε κύκλο, γιατί αν ήταν εγγράψιμος θα έπρεπε να έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές). Η διερεύνηση θα μπορούσε να επεκταθεί και σε τυχαία τετράπλευρα (και με τη βοήθεια λογισμικού), ώστε οι μαθητές να εικάσουν τα κριτήρια εγγραψιμότητας.

Επίσης, στόχος είναι οι μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ των θεωρημάτων που ισχύουν για τα εγγράψιμα τετράπλευρα και στα κριτήρια, που πρέπει να ισχύουν, ώστε να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο (ενδεικτική δραστηριότητα 1).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

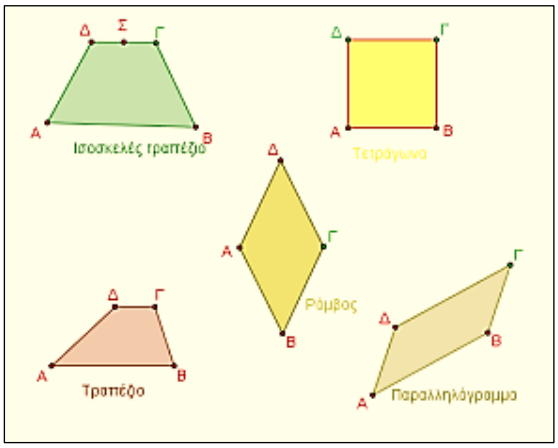
Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Η. Σχεδιάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ, ΕΖ και ΖΔ.

α) Να βρείτε τα εγγράψιμα τετράπλευρα που σχηματίζονται.

β) Να αποδείξετε ότι τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ.

Ενδεικτική (ψηφιακή) δραστηριότητα 2:

Η ερώτηση κατανόησης 6 προτείνεται να διερευνηθεί με το μικροπείραμα «Εγγράψιμα τετράπλευρα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2264



Σημείωση

Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση

https://www.geogebra.org/download

ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση

http://photodentro.edu.gr/edusoft/.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση https://get.adobe.com/flashplayer/.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση http://java.com/en/. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις http://photodentro.edu.gr και http://digitalschool.minedu.gov.gr στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Απόσπασμα από το αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών στη Γεωμετρία Α΄ τάξης ΓΕΛ ΦΕΚ: 1168/τ. Β΄/08-06-2011

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δ.1 Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους 2 εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, αν η μια από τις δύο γωνίες είναι: α) 30° β) 45° γ) 60° ή δ) 90°. Τι παρατηρείτε;

α) Μπορείτε να εικάσετε το μέτρο της γωνίας φ που σχηματίζουν οι διχοτόμοι κάθε παραπάνω ζεύγους εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών; Προσπαθήστε να αποδείξετε την εικασία σας.

β) Μπορείτε να αποδείξετε αν η κάθετη στη διχοτόμο μιας γωνίας είναι διχοτόμος της εφεξής και παραπληρωματικής της;

(Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές. Σε τέτοιο περιβάλλον, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν τις διχοτόμους δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, να μετρήσουν τη μεταξύ τους γωνία φ, όταν η κοινή πλευρά των εφεξής γωνιών στρέφεται γύρω από την αρχή της, και να κάνουν μια εικασία για το μέτρο της γωνίας φ. Στη συνέχεια μπορεί να τους ζητηθεί να αποδείξουν την εικασία.)

Δ.2 Δίνονται δυο προτάσεις Α και Β.

<u>Πρόταση Α:</u> Η ακτίνα που αντιστοιχεί στο μέσο ενός τόξου διχοτομεί την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο αυτό.

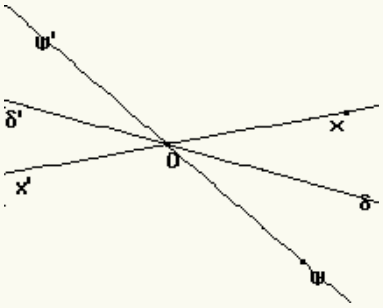
<u>Πρόταση Β:</u> Έστω Α, Β, Γ διαδοχικά σημεία μιας ευθείας και Μ, Ν εσωτερικά σημεία των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ. Αν τα Μ, Ν είναι μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, τότε το τμήμα ΜΝ είναι ίσο με το ημιάθροισμα των ΑΒ, ΒΓ.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Α και Β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε τις αντίστροφες των προτάσεων Α και Β και να εξετάσετε αν ισχύουν.

γ) Αν κάποια από τις προτάσεις Α, Β ισχύει η ίδια και η αντίστροφή της να τη διατυπώσετε σαν ενιαία πρόταση.

Δ.3 Ένας μαθητής, στην προσπάθειά του να αποδείξει ότι «οι διχοτόμοι δυο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες», σχεδίασε το διπλανό σχήμα και έγραψε τα εξής:



$\delta'\hat{O}\delta = \delta'\hat{O}\psi' + \psi'\hat{O}\delta = \delta\hat{O}\psi + \psi'\hat{O}\delta = \psi'\hat{O}\psi$

($\delta'\hat{O}\psi' = \delta\hat{O}\psi$ ως κατακορυφήν)

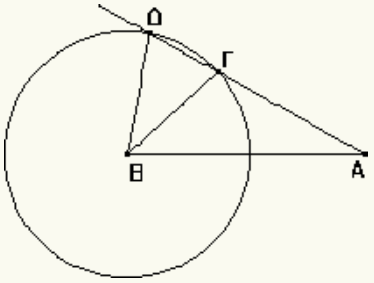
Άρα Οδ’, Οδ αντικείμενες ημιευθείες.

Μπορείτε να σχολιάσετε το συλλογισμό του μαθητή;

Θα μπορούσατε να δώσετε μια δική σας απόδειξη για τη συγκεκριμένη πρόταση;

Δ.4 Να δείξετε ότι τα μέσα δυο διαδοχικών τμημάτων/τόξων ορίζουν τμήμα/τόξο ίσο με το ημιάθροισμά τους. Μπορείτε να διατυπώσετε και να αποδείξετε μια αντίστοιχη πρόταση για τις γωνίες;

Δ.5 Στο διπλανό σχήμα στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι η ΑΒ κοινή πλευρά, ΒΔ = ΒΓ και η γωνία Α κοινή και προφανώς τα τρίγωνα δεν είναι ίσα. Έτσι παρά το ότι τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και μια γωνία ίση αυτά δεν είναι ίσα. Γιατί συμβαίνει αυτό;

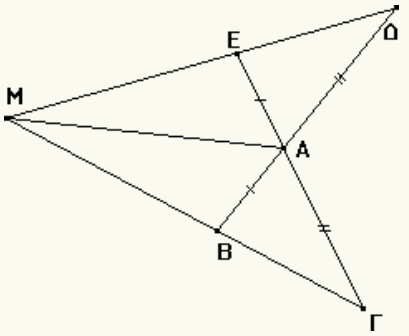


Δ.6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($AB < AΓ$) και στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Δ, Ε αντίστοιχα ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΒΑ. Αν Μ το κοινό σημείο των ευθειών ΕΔ και ΒΓ:

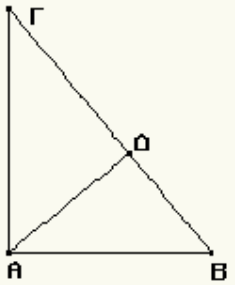
α) Να βρείτε στο σχήμα αυτό όσα ζεύγη ίσων τριγώνων μπορείτε.

β) Να δείξετε ότι η διαγώνιος του τετραπλεύρου ΑΕΜΒ διχοτομεί δυο γωνίες του.

γ) Να δείξετε ότι μια διαγώνιος του τετραπλεύρου ΑΕΜΒ είναι μεσοκάθετος της άλλης.



Δ.7 Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^o$) το ΑΔ είναι ύψος. Έτσι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ορθογώνια έχουν την ΑΒ κοινή και τη γωνία Β κοινή αλλά προφανώς δεν είναι ίσα. Γιατί συμβαίνει αυτό;



Δ.8 Δίνεται τμήμα ΑΒ και σημείο Κ εσωτερικό του ΑΒ, ώστε $\rho = AK > \frac{AB}{2}$. Αν Λ, Μ είναι τα σημεία τομής των κύκλων (Α, ρ), (Β, ρ), να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκουν τα σημεία Λ, Μ καθώς το Κ μεταβάλλεται; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.
(Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)

Δ.9 Να σχεδιάσετε σημεία τα οποία ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας. Να προσδιορίσετε τη γραμμή στη οποία ανήκουν τα σημεία αυτά και αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας.
(Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)

Δ.10 Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο τεμνόμενες ευθείες;
(Η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές.)

Δ.11	Μπορείτε να κατασκευάσετε τρίγωνα με πλευρές: i) $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ ii) $\alpha=2$, $\beta=7$, $\gamma=4$ iii) $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=6$ Μπορείτε να εικάσετε ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα μήκη τριών δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων για να αποτελούν αυτά πλευρές τριγώνου;

Δ.12	Ο Ανδρέας ισχυρίζεται ότι: «Αν θέλουμε να ελέγξουμε την ύπαρξη τριγώνου με πλευρές α = 3,75cm, β = 4,08cm και γ = 7,82cm, θα πρέπει να δούμε αν ικανοποιούνται οι εξής 3 ανισότητες α < β + γ, β < α + γ, γ < α + β». Η Ειρήνη ρωτά: «Δεν αρκεί ο έλεγχος να γίνει μόνο για μια πλευρά;». Τι θα απαντούσατε στην Ειρήνη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Δ.13	Δίνονται μια ευθεία και δύο σημεία εκτός αυτής. Να βρεθεί το σημείο της ευθείας που το άθροισμα των αποστάσεων του από τα δύο σημεία είναι ελάχιστο. (Η χρήση λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει στη διερεύνηση του θέματος.)

Δ.14	Δίνεται κύκλος και σημείο Ρ εκτός αυτού. Να φέρετε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ του κύκλου και μια εφαπτόμενη του κύκλου σε σημείο Ε του κυρτού τόξου ΑΒ, η οποία να τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Μεταβάλλεται η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ όταν μεταβάλλεται η θέση του σημείου Ε; Αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας. (Η χρήση λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει στη διερεύνηση του θέματος.)

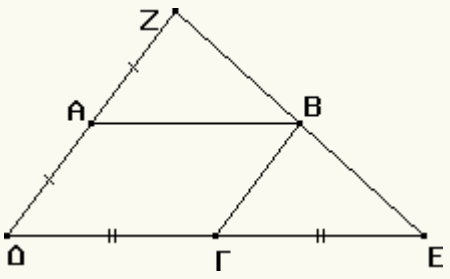
Δ.15	Δυο σταθεροί κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά ενώ ένας τρίτος κύκλος μεταβάλλεται έτσι ώστε να εφάπτεται στον μεγαλύτερο εσωτερικά και στον μικρότερο εξωτερικά. Να δείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου που έχει κορυφές τα κέντρα των τριών κύκλων είναι σταθερή και ίση με τη διάμετρο του μεγαλύτερου κύκλου.

Δ.16	Μια από τις βασικές ιδιότητες της ευθείας είναι ότι αποτελεί το συντομότερο δρόμο μεταξύ δυο σημείων του επιπέδου. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δυο σημείων Α, Β της σφαίρας είναι σ' ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας (τον κύκλο με κέντρο το κέντρο της σφαίρας που διέρχεται από τα Α,Β). Θεωρούμε μια νέα Γεωμετρία, που την ονομάζουμε σφαιρική Γεωμετρία, με «επίπεδο» την επιφάνεια της σφαίρας και «ευθείες» τους μέγιστους κύκλους της. Στη σφαιρική Γεωμετρία θεωρήστε μια «ευθεία» (μέγιστο κύκλο) και ένα σημείο Α της σφαίρας εκτός αυτής. Πόσες παράλληλες «ευθείες» διέρχονται από το σημείο Α προς την «ευθεία»;

Δ.17	Να διερευνήσετε πότε από τρία διαφορετικά σημεία Α, Β και Γ διέρχεται κύκλος. Μπορούν δυο διαφορετικοί κύκλοι να διέρχονται από τρία διαφορετικά σημεία;

Δ.18	Ποιες ιδιότητες του παραλληλογράμμου γνωρίζετε; Ποιές είναι οι ελάχιστες δυνατές που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Δ.19 Σ' ένα μαθητή δόθηκε η εξής άσκηση: «Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΔΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα ώστε $AZ = \Delta A$ και $\Gamma E = \Delta \Gamma$. Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β, Ε είναι συνευθειακά». Ο μαθητής, αφού σχεδίασε το διπλανό σχήμα, έγραψε: $\Gamma\hat{E}B + E\hat{\Gamma}B + \Gamma\hat{B}E = 180^o$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΕΓΒ) και επειδή $A\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από τη ΒΓ) και $\Gamma\hat{E}B = Z\hat{B}A$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ που τέμνονται από την ΖΕ) έχουμε: $Z\hat{B}A + A\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}E = 180^o$. Δηλαδή $Z\hat{B}E = 180^o$. Οπότε τα σημεία Ζ, Β, Ε είναι συνευθειακά». Είναι σωστός ο συλλογισμός του μαθητή; Πως θα λύνατε εσείς την παραπάνω άσκηση;



Δ.20 Να σχεδιάσετε:
α) τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες που δεν είναι ορθογώνιο
β) τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες που δεν είναι ρόμβος.

Δ.21 Με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο με διαγώνιους δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα.
Σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας να κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο με τέτοιο τρόπο, ώστε κατά τη μετακίνηση μιας εκ των κορυφών του να παραμένει παραλληλόγραμμο.

Δ.22 Να σχεδιάσετε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου με κορυφές τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του ΑΒΓΔ αντίστοιχα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, ρόμβος ή τετράγωνο, ποιό είναι το είδος του τετρπλεύρου ΚΛΜΝ. Να αποδείξτε τους ισχυρισμούς σας.
(Στη διερεύνηση της δραστηριότητας αυτής μπορεί να βοηθήσει η χρήση λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας).

Δ.23 Γνωρίζετε ότι κάθε τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.
α) Είναι κάθε τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο;
β) Διέρχονται οι μεσοκάθετοι κάθε τετραπλεύρου από το ίδιο σημείο;
Για τη διερεύνηση των παραπάνω ερωτημάτων, να σχεδιάσετε σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να ονομάσετε Κ, Λ, Μ, Ν τα σημεία τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του ΑΒΓΔ. Παρατηρήστε ότι αν μεταβάλλεται μια από τις κορυφές του ΑΒΓΔ τότε ένα από τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν παραμένει σταθερό. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό; Να γράψετε κύκλο με κέντρο αυτό το σταθερό σημείο και ακτίνα την απόσταση του σημείου αυτού από μια από τις σταθερές κορυφές του ΑΒΓΔ. Αν μετατοπίσουμε το μεταβλητό σημείο του ΑΒΓΔ ώστε να (φαίνεται ότι) διέρχεται από τον κύκλο, τι παρατηρείτε για τις μεσοκάθετες των πλευρών του ΑΒΓΔ; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κριτήριο εγγραψιμότητας τετραπλεύρων και να ελέγξετε αποδεικτικά την ισχύ του;