άπειρο.....

Έτος 1ο
Αρ. Φύλλου 3
ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008

ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ - ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΡΟΔΟΠΗΣ

Α. Ν. Κολμογόροφ: "Το μαθηματικό άπειρο"

Προλεγόμενα

Με την ευκαιρία της έκδοσης της εφημερίδας «άπειρ0.....» και για να τη χαιρετίσω, έψαξα και βρήκα ένα σημείωμα αφιερωμένο στην έννοια του μαθηματικού απείρου. Το σημείωμα αυτό φέρει την υπογραφή του **Α.Ν. Κολμογόροφ,** ενός γίγαντα της μαθηματικής σκέψης που, με τις εργασίες του, άφησε ανεξίτηλη τη σφραγίδα του στα Μαθηματικά του 20ου αιώνα.

Το μαθηματικό άπειρο λαμβάνεται από την πραγματικότητα, αν και όχι συνειδητά, και επομένως μπορεί να ερμηνευθεί μόνο από την πραγματικότητα, και όχι από τον εαυτό του ή από τη μαθηματική αφαίρεση. Κάθε μαθηματική θεωρία διέπεται από μια αναγκαστική απαίτηση για εσωτερική τυπική συμβιβαστότητα (μη αντιφατικότητα). Έτσι εγείρεται το πρόβλημα του τρόπου της ενοποίησης αυτής της απαίτησης με τον ουσιωδώς αντιφατικό χαρακτήρα της υφής του απείρου. Η εξαφάνιση της αντίφασης αυτής θα σήμαινε το τέλος του απείρου.

Η λύση του προβλήματος αυτού συνίσταται στο εξής: Όταν, στη θεωρία των ορίων, θεωρούνται άπειρα όρια, δηλ. $\lim a_n = \infty$, ή, στη θεωρία των συνόλων, άπειρες δυνάμεις, αυτό δεν οδηγεί σε εσωτερικές τυπικές αντιφάσεις στις θεωρίες αυτές, ακριβώς και μόνο γιατί αυτές οι (δύο) διακεκριμένες μορφές του μαθηματικού απείρου είναι άκρως απλοποιημένες, σχηματοποιημένες μορφές των διαφόρων εκφάνσεων του απείρου στον πραγματικό κόσμο.

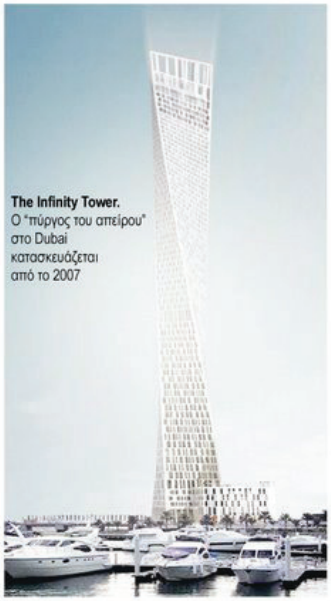
Προσωπικά, *δέχομαι ανεπιφύλακτα τις απόψεις, για το μαθηματικό άπειρο,* ενός γίγαντα της μαθηματικής σκέψης, του Α. Ν. Κολμογόροφ. *Θεωρούμε περιττό και ανώφελο να προσθέσουμε κάτι "δικό μας".* Το άρθρο αυτό περιορίζεται να υποδείξει τις διάφορες θεωρήσεις του απείρου στα Μαθηματικά, οι οποίες αναλύονται (από τον Α.Ν.Κ.) σε άλλα άρθρα του.

Σας το παρουσιάζω, όπως το δανείστηκα από τη Μ.Σ.Ε. (τόμ. 3, σσ.259-260). Λόγω της έκτασης του κειμένου και της πληθώρας ύλης της εφημερίδας έκρινα πως θα έπρεπε να δημοσιευτεί σε δύο συνέχειες.

Γιάννης Κερασαρίδης

μέρος 1ο

«1) Η ιδέα των απείρως μεγάλων και απειροστών μεταβλητών ποσοτήτων αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα στη Μαθηματική Ανάλυση. Η ιδέα που προηγείτο της σύγχρονης θεώρησης της έννοιας του απειροστού, σύμφωνα με την οποία τα πεπερασμένα μεγέθη συνίσταντο από ένα άπειρο αριθμό απείρως μικρών «αδιαιρέτων», και τα οποία δεν χρησιμοποιούνταν σαν μεταβλητές, αλλά σαν σταθερές, μικρότερες από οποιοδήποτε πεπερασμένο μέγεθος, μπορεί να χρησιμεύσει σαν ένα παράδειγμα του



The Infinity Tower.
Ο "πύργος του απείρου" στο Dubai κατασκευάζεται από το 2007

ασθενούς διαχωρισμού μεταξύ του απείρου και του πεπερασμένου. Μόνο η διάσπαση πεπερασμένων μεγεθών σε ένα απεριόριστα αυξανόμενο αριθμό απεριόριστα φθινουσών συνιστωσών έχει πραγματική σημασία.

2) Κάτω από εντελώς διάφορες λογικές συνθήκες, το άπειρο εμφανίζεται στα Μαθηματικά με τη μορφή ***«κατ' εκδοχήν»*** απείρως αφισταμένων γεωμετρικών αντικειμένων «επ' άπειρον». Εδώ, πχ., ένα ***«επ' άπειρον»*** σημείο πάνω σε μια ευθεία (ε) θεωρείται σαν ένα ειδικά καθορισμένο αντικείμενο «συνημμένο» στα συνήθη «καθ' υπόστασην» σημεία της ευθείας. Όμως και εδώ ακόμη διαπιστώνεται η συνεχής σύνδεση του απείρου με το πεπερασμένο: αν πχ., προβάλλουμε, την ευθεία (ε) στον εαυτό της, από ένα κέντρο εκτός αυτής τότε προκύπτει ότι στο «επ' άπειρον» σημείο της (ε) αντιστοιχεί μια ευθεία, που διέρχεται από το κέντρο προβολής και είναι παράλληλη προς την αρχική ευθεία (ε).

Η επέκταση του συστήματος των πραγματικών αριθμών με την επισύναψη των δύο «κατ' εκδοχήν» αριθμών $+\infty$ και $-\infty$, η οποία ικανοποιεί πολλές από τις απαιτήσεις της Ανάλυσης και της Θεωρίας των Συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, είναι ανάλογος. Σε σύνδεση με τη διάκριση ανάμεσα στα μεταβλητά απειροστά καθώς και τα απείρως μεγάλα μεγέθη από τη μια μεριά, και στους θεωρούμενους σταθερούς «κατ' εκδοχήν» απείρως μεγάλους αριθμούς από την άλλη, δημιουργήθηκαν και οι όροι ***«δυνάμει άπειρον»*** (για τα πρώτα) και ***«φύσει άπειρον»*** (για τα τελευταία). Υπό την αρχική αυτή έννοια η διαμάχη μεταξύ των υποστηρικτών του «φύσει απείρου» και του «δυνάμει απείρου» μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει λήξει. Το απειροστό και το απείρως μεγάλο μέγεθος, που αποτελούν τη βάση του ορισμού της παραγώγου σαν λόγου δύο απειροστών, καθώς και του ολοκληρώματος σαν αθροίσματος απείρου πλήθους απειροστών, και ακόμη οι έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης, που τις πλαισιώνουν, πρέπει να ερμηνευτούν σαν «δυνάμει άπειρα». Επιπρόσθετα, κάτω από κατάλληλες λογικές προϋποθέσεις, οι πραγματικά απείρως μεγάλοι «κατ' εκδοχήν» αριθμοί συμπεριλαμβάνονται επίσης, «δικαιωματικά», στα Μαθηματικά [ακόμη και κάτω από πολλές και ποικίλες απόψεις: όπως οι ποσοτικοί και υπερτετελεσμένοι αριθμοί τάξης στη Θεωρία των Συνόλων, όπως τα «κατ' εκδοχήν» (πρόσθετα) στοιχεία $+\infty$ και $-\infty$ στο σύστημα των πραγματικών αριθμών, κ.ο.κ.]».

η συνέχεια στο επόμενο

«μαγικές» μαθηματικές σχέσεις

Ο «μαγικός» πολλαπλασιασμός για την εύρεση των τετραγώνων των ακεραίων αριθμών που λήγουν σε 5

Είναι:

$5^2 =$	5 x 5 =	25
$15^2 =$	15 x 15 =	225
$25^2 =$	25 x 25 =	625
$35^2 =$	35 x 35 =	1225
$45^2 =$	45 x 45 =	2025
$55^2 =$	55 x 55 =	3025
$65^2 =$	65 x 65 =	*πώς θα το υπολογίσω;*

Κόβω το τελευταίο ψηφίο, το 5, οπότε μένει το 6. Πολλαπλασιάζω το 6 με τον επόμενο του φυσικό το 7 οπότε 6Χ7=42 . Σ' αυτόν τον αριθμό προσαρτώ τον 5Χ5=25 και το αποτέλεσμα είναι 4225
Άρα 65 x 65=4225

Ας δούμε και άλλους πολλαπλασιασμούς
$75^2 = 75 \times 75 = 5625$ (όπου 7 x 8 = 56)
$85^2 = 85 \times 85 = 7225$ (όπου 8 x 9 = 72)
Τι γίνεται με το, ας πούμε, 205
$205^2 = 205 \times 205 = 42025$ (όπου 20 x 21 = 420)
Με το 345; $345^2 = 345 \times 345 = 119025$ (όπου 34 x 35=1190)

Τι συμβαίνει; πώς γίνεται αυτό; Ποιο είναι το «μαγικό»; ή όπως λέμε ποια ΑΛΓΕΒΡΑ υπάρχει;
Οι αριθμοί που λήγουν σε 5 γράφονται στην μορφή $10 \cdot \alpha+5$
π.χ 235=10·23+5
Έτσι: $(10 \cdot \alpha+5)(10 \cdot \alpha+5)= (10 \cdot \alpha)(10 \cdot \alpha)+(10 \cdot \alpha)(5)+(5)(10 \cdot \alpha) + (5)(5)=100 \cdot \alpha^2+50 \cdot \alpha+50 \cdot \alpha+25=100 \cdot \alpha^2+100 \cdot \alpha+25=100\alpha(\alpha+1)+25$
Ας ξαναδούμε τώρα το «μαγικό»: το α είναι ό,τι μένει όταν κόβουμε το 5 και αυτό το α το πολλαπλασιάζουμε με τον επόμενό του φυσικό δηλ το α+1 οπότε παίρνουμε α(α+1) το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάζουμε με το 100 και στο καινούριο αποτέλεσμα προσθέτουμε το 25
Δηλ.$100\alpha(\alpha + 1) + 25 = 100\alpha^2 + 100\alpha + 25 = (10\alpha + 5)^2$.
Πίσω από τα «μαγικά» υπάρχουν πάρα πολύ ενδιαφέροντες Μαθηματικές σχέσεις
Σκεφτείτε ποιο και γιατί είναι το «μαγικό» του πολλαπλασιασμού
11Χ11=;
111Χ111=;
111111111Χ111111111=;
κ.λπ. .....

Ένα ενδιαφέρον βίντεο με τον Μαθηματικομάγο Arthur Benjamin θα βρείτε στο http://www.ted.com/index.php/talks/arthur_benjamin_does_mathemagic.html

Βασίλης Ε. Στεφανίδης

ά πειρο

ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ ΕΚΔΟΣΗ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΡΟΔΟΠΗΣ

Ιδιοκτήτης:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΡΟΔΟΠΗΣ

Διεύθυνση:
ΑΣΤΕΓΟΙ (ελπίζουμε παροδικά)
Τηλ.: 25310 27248-6938442037(πρόεδρος)
25310 20479-6977374855 (ταμίας)

email: emerodopis@gmail.com
http://apeironews.blogspot.com

4: quatre, quattro, cuatro, quatro, patru, four, vier, fyra, fire, četiri, четыре, čtyři, dort

Γιατί μπορεί όλοι να τον συμβολίζουν με το «παγκόσμιο» 4 και οι Έλληνες να το διαβάζουν τέσσερα αλλά... οι αρχαίοι Έλληνες τον έλεγαν τέσσαρα, οι Λατίνοι quattuor, ενώ σήμερα:
οι Γάλλοι τον λένε - quatre, οι Ιταλοί quattro, οι Ισπανοί cuatro, οι Πορτογάλοι quatro, οι Ρουμάνοι patru, οι Άγγλοι four, οι Γερμανοί vier (φίαρ), οι Σουηδοί fyra, οι Δανοί fire, οι Σέρβοι četiri (ακούγεται τσιτίρι), οι Ρώσοι четыре (τσιτίρι), οι Τσέχοι čtyři (τστίρι) και οι Τούρκοι dort, με ήχο που είναι πάρα πολύ κοντά στο «δικό μας» τουρκικής καταγωγής ντόρτια, τη γνωστή ζαριά σε όσους τουλάχιστον παίζουν τάβλι.

Ποια είναι τέσσερα;

- Τα **σημεία** του ορίζοντα, με «αρχηγό» την Ανατολή
- Τα **μέλη** του σώματος που κάποτε όλοι αξιοποιήσαμε για να μπουσουλήσουμε «με τα τέσσερα»
- Τα **πόδια** του τραπεζιού
- Τα **στοιχεία** - Γη, Ύδωρ, Αήρ, Πυρ - στη Φυσική του Αριστοτέλη
- **Καρέ του άσσου:** σπαθί, καρό, κούπα και μπαστούνι
- **Πορτοκάλια,** από τα οποία - σύμφωνα με το άσμα - τα δυο σαπίσανε
- Τα **πόδια** του γάιδαρου, της σκύλας, του τράγου, του γουρουνιού, της κατσίκας, του μαντρόσκυλου, της αρκούδας, του βοδιού, του μουλαριού και της αλόγας, αν περιοριστούμε στα τετράποδα που χρησιμοποιεί ο - με αγροτικό παρελθόν καταπιεσμένος Έλληνας- για να μπορεί να βρίζει.
- Τα **σημεία** του σώματος στα οποία ακουμπάμε το δεξί χέρι για να κάνουμε το σταυρό μας
- *Τα μάτια σου **τέσσερα*** - ενίοτε και δεκατέσσερα- του είχε πει η μάνα του πριν φύγει
- **4Χ4,** αυτοκίνητο αρκετά μεγάλων διαστάσεων
- *Δεν ξέρεις που πάνε τα **τέσσερα,*** του είπε μια μέρα ο δάσκαλος

Τέσσερεις; (ή, σύμφωνα με τη σχολική ορθογραφία, τέσσερις)

- Οι **Ιππότες** της Αποκαλύψεως
- Οι **τροχοί** ενός αυτοκινήτου
- Οι **ρηγάδες** στην τράπουλα και οι ρηγάδες της δεκαετίας του 70 που μαζεύονταν σε μία διαδήλωση
- Οι **ευαγγελιστές.** Ο Ματθαίος, ο Λουκάς, ο Μάρκος και ο Ιωάννης
- Οι **μουσικοί** ενός κουαρτέτου
- Οι **Beatles.** Τζων Λέννον, Πωλ Μακ Κάρντνι, Τζωρτζ Χάρισον και Ρίνγκο Σταρ
- Οι **τοίχοι** του δωματίου, «μέσα στους οποίους» νιώθει κανείς κλεισμένος
- Οι **κβαντικοί αριθμοί** του ηλεκτρονίου
- Οι **πύργοι** στο σκάκι. Και οι **αξιωματικοί.**
- ***Στρατηγοί*** *που κινάν και παν' για πόλεμο στο μακρινό το Ιράν,* σύμφωνα με το τραγούδι του Μάνου Χατζιδάκι.
- Οι **παίκτες** σε μία παρτίδα μπριτζ
- Οι **εποχές,** με αρχηγό την θηλυκού - στην ελληνική γλώσσα- γένους Άνοιξη. Στα γαλλικά η Άνοιξη - Le Printemps - είναι γένους αρσενικού και στην αρχαία ελληνική - το Έαρ - γένους ουδετέρου.
- Οι **έδρες** κάθε τετράεδρου
- Οι **μεγάλες νικήτριες δυνάμεις** που μοιράστηκαν το Βερολίνο μετά τον πόλεμο
- Οι **βάσεις** στο DNA. Η αδενίνη, η θυμίνη, η κυτοσίνη, η γουανίνη
- Οι **εβδομάδες** του Φεβρουαρίου με την εξαίρεση στα δίσεκτα
- Οι **τέσσερις εποχές** στο έργο του Antonio Vivaldi
- Οι **δυνάμεις** στο Σύμπαν. Σύμφωνα με όσα υποστηρίζουν σήμερα οι φυσικοί οι δυνάμεις στο Σύμπαν είναι τέσσερις. Η Βαρυτική, η Ασθενής, η Ηλεκτρομαγνητική και η Ισχυρή. Πιστεύουν επίσης ότι πριν από δεκαπέντε περίπου δισεκατομμύρια χρόνια, στο «νεογέννητο» τότε Σύμπαν, οι τέσσερις δυνάμεις ήταν μία.
- Οι **ομάδες** στο φάιναλ φορ
- Οι **διαστάσεις του χωροχρόνου,** θα έλεγε ο θείος Αλβέρτος

Με την ευγενική παραχώρηση του Ανδρέα Κασσέτα από την ιστοσελίδα του http://users.att.sch.gr/kassetas/

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} τέμνονται και εκτός της ευθείας $y=x$

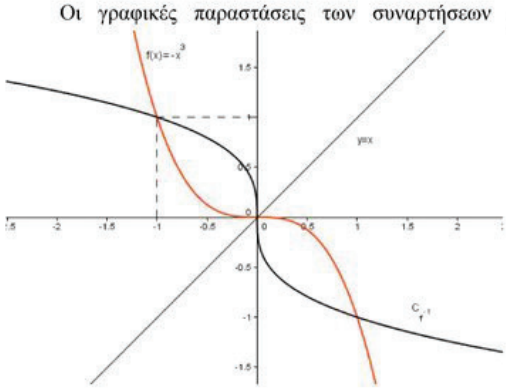
Αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Ακόμη, αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$ και μόνο εκεί.

Όσα αναφέρονται στην παραπάνω παράγραφο είναι μαθηματική γνώση η οποία βρίσκεται σε πολλά πανεπιστημιακά συγγράμματα ελληνικά ή ξενόγλωσσα. Ενδεικτικά αναφέρω στη βιβλιογραφία ορισμένα βιβλία στα οποία αναφέρονται τα παραπάνω. Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι ότι σε κανένα από αυτά τα βιβλία δεν αναφέρεται, έστω και ως παρατήρηση, ότι αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$ και μόνο εκεί.

Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κάποιος γιατί συμβαίνει αυτό. Είναι άραγε άσχετοι αυτοί που έγραψαν τα βιβλία; Αυτό αποκλείεται γιατί είναι γραμμένα από μαθηματικούς με μεγάλο κύρος. Η απάντηση είναι απλή. Δεν το έγραψαν γιατί **απλά δεν ισχύει**. Είναι πολύ εύκολο να βρούμε παραδείγματα τα οποία να δείχνουν ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται και εκτός της ευθείας $y=x$.

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεπώς αντιστρέψιμη. Ως γνωστόν, για να βρούμε τον τύπο της f^{-1} πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $y=-x^3$ ως προς x. Αν $y<0$ η λύση είναι $x=\sqrt[3]{-y}$ ενώ αν $y\geq 0$ η λύση είναι $x=-\sqrt[3]{y}$. Άρα, $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{-x}, & \text{αν } x<0\\ -\sqrt[3]{x}, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$.

Σημείωση: Για τις συναρτήσεις $f(x)=-x^3$ και $g(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{-x}, & \text{αν } x<0\\ -\sqrt[3]{x}, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$ είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η μια είναι η αντίστροφη της άλλης.



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα τέμνονται στα σημεία $(-1,1)$, $(0,0)$ και $(1,-1)$. Το πανεπιστήμιο Drexel που βρίσκεται στην Αμερική παρέχει μια υπηρεσία μέσω internet. Έχει φτιάξει ένα forum το οποίο ονομάζεται Ask Dr. Math. Όπως το λέει και το όνομά του σ' αυτό το forum μπορεί ο καθένας να υποβάλει οποιαδήποτε μαθηματική απορία (αρκεί να γνωρίζει αγγλικά). Υπάρχει μια ομάδα εθελοντών μαθηματικών οι οποίοι απαντούν στις απορίες αυτές. Διαπίστωσα ότι στο παρελθόν είχε γίνει ερώτηση στο forum αν οι f και f^{-1} τέμνονται μόνο πάνω στην $y=x$ είτε είναι γνησίως αύξουσες είτε γνησίως φθίνουσες και κάποιος από τους εθελοντές μαθηματικούς, με το όνομα Gaff, που ανέλαβε να απαντήσει απάντησε καταφατικά.

Έστειλα λοιπόν πρόσφατα μια σχετική ερώτηση σ' αυτό το forum ζητώντας εξηγήσεις για αυτή την λάθος απάντηση και αναφέροντας ότι σε κάποιο ελληνικό site δημοσιεύεται η άποψη του Gaff. Η απάντηση ήταν άμεση. Την έστειλε ο Doctor Peterson ένας από τους κύριους συνεργάτες του forum. Ανακάλεσε πλήρως την λάθος απάντηση που είχε δοθεί στο παρελθόν.

Απάντηση (του Doctor Peterson)

Στα αρχεία μας (εννοεί στο site) βάζουμε απαντήσεις μας οι οποίες νομίζουμε ότι αξίζουν να τις μοιραστούμε με άλλους. Ορισμένες φορές κάποιοι μας γράφουν όταν βρίσκουν κάποιο λάθος μας και τότε το διορθώνουμε. Είμαστε απλά άνθρωποι και είμαστε ευγνώμονες όταν μας διορθώνουν.

Προφανώς αυτή η απάντηση (εννοεί του/της Gaff) την οποία δεν την έχουμε στο αρχείο μας, βρίσκεται σε ένα site που δεν ελέγχουμε και άρα δεν μπορούμε να διορθώσουμε. Αυτό είναι ατυχία.

Είναι απλά μια λάθος απάντηση και από τότε έχουμε απαντήσει πιο σωστά όταν ερωτηθήκαμε για κάτι παρόμοιο. Δεν είναι αλήθεια ότι μια συνάρτηση τέμνει την αντίστροφή της μόνο πάνω στην $y=x$ και το παράδειγμά σου της $f(x)=-x^3$ το αποδεικνύει. Υπάρχουν βεβαίως πολλά ακόμη παραδείγματα, σε αυτά περιλαμβάνονται συναρτήσεις που είναι αντίστροφες του εαυτού τους όπως οι $f(x)=\frac{c}{x}$ ή $f(x)=c-x$, αλλά και πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις όπως η συνάρτηση $f(x)=2\ln(5-x)$.

Η σωστή δήλωση είναι ότι η f τέμνει την f^{-1} σε κάθε x για το οποίο ισχύει $f(x)=x$, αλλά μπορεί να τέμνονται και σε άλλα σημεία. Υποθέτω ότι έχεις την απόδειξη της πρότασης ότι κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση τέμνει την αντίστροφή της μόνο πάνω στην $y=x$. Δεν νομίζω ότι αυτό είναι δύσκολο να αποδειχθεί. Προφανώς, δεν είναι αλήθεια για μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Ένας μαθηματικός ξέρει να μην εμπιστεύεται ότι ο οποιοσδήποτε λέει χωρίς απόδειξη. Το αντιπαράδειγμά σου δείχνει ότι αυτός που ισχυρίζεται το αντίθετο δεν μπορεί να έχει απόδειξη. Έτσι μπορείς να αγνοήσεις (ή να διορθώσεις) αυτόν τον επιπόλαιο ισχυρισμό.

Επίλογος

Έχοντας την εμπειρία του διδακτορικού γνωρίζω ότι για την επικύρωση μιας οποιασδήποτε μαθηματικής ανακάλυψης υπάρχει μια και μόνο επίσημη οδός. Αν κάποιος νομίζει ότι έχει αποδείξει μια αλήθεια μπορεί να στείλει τις ανακαλύψεις του σε κάποιο επιστημονικό – εξειδικευμένο διεθνές περιοδικό με κριτές. Κατάλληλος κριτής του περιοδικού μελετάει τις αποδείξεις και αν δεν βρει λάθος τότε το άρθρο γίνεται δεκτό προς δημοσίευση. Οι κριτές είναι πανεπιστημιακοί καθηγητές που πληρώνονται από τα περιοδικά για να κάνουν αυτή τη δουλειά, δεν είναι απλά εθελοντές. Αν λοιπόν κάποιος έχει κάτι καινούργιο να μας πει ας ακολουθήσει την ενδεδειγμένη οδό και εγώ θα υποκλιθώ στις απόψεις του. Δεν είναι σωστό όμως να περιφέρονται ανυπόστατοι ισχυρισμοί σε διάφορα forum ή έντυπα όταν οι υπεύθυνοί τους δεν έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν την αλήθεια των ισχυρισμών αυτών.

Νίκος Φωτιάδης Δρ. Μαθηματικών
nfotiad@otenet.gr

Από την σύνταξη: Τα αγγλικά κείμενα της ερώτησης και της απάντησης στο Dr. Math δεν δημοσιεύονται λόγω έλλειψης χώρου, αλλά είναι στη διάθεση όποιου τα ζητήσει.

Βιβλιογραφία

1. **Louis Brand**, *Μαθηματική Ανάλυση*, σελ. 134-138
2. **Tom Apostol**, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός τομ. 1*, σελ 228-240
3. **Michael Spivak**, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, σελ 193-203.
4. **Lynn H. Loomis, Shlomo Sternberg**, *Advanced Calculus*, σελ. 8-15.
5. **John C. Sparks**, *Calculus without limits*, σελ. 33-36.
6. **Jerome H. Keisler**, *Elementary Calculus*, σελ. 70-78 και 381-390
7. **Lawrence Baggett**, *Analysis of functions of a single variable*, σελ. 53-68
8. **David A. Brannan**, *A first course in mathematical analysis*, σελ. 151-166
9. **Γρηγόρης Κωστάκος**, *Θεωρία πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής*, σελ. 25-28.

άπειρο

Απάντηση στο άρθρο του κ. Πετράκη, με τίτλο *οι αντίστροφες συναρτήσεις τέμνονται μόνο πάνω στην διχοτόμο ψ=x,* που δημοσιεύτηκε στο προηγούμενο τεύχος

Α. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Πρώτο λάθος

Ο κ. Πετράκης γράφει ότι «τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο αντίστροφων συναρτήσεων f και f^{-1} βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση $\vec{r}_f(t)=\vec{r}_{f^{-1}}(t)$, $t\in D(f)$» ($\vec{r}_f$ και $\vec{r}_{f^{-1}}$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις των γραμμών C_f και $C_{f^{-1}}$, αντίστοιχα). **Αυτό είναι λάθος. Γιατί, για να βρούμε τα κοινά σημεία των δύο αυτών γραμμών, πρέπει να βρούμε όλα τα ζεύγη (t_1,t_2) με $t_1\in D(\vec{r}_f)$, $t_2\in D(\vec{r}_{f^{-1}})$, για τα οποία ισχύει $\vec{r}_f(t_1)=\vec{r}_{f^{-1}}(t_2)$.** Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}$ έχει σύνολο ορισμού $A=(-\infty,1]$ και σύνολο τιμών $f(A)=[0,+\infty)$. Η συνάρτηση αυτή έχει αντίστροφη τη συνάρτηση

$f^{-1}:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=1-x^2$.

Μια διανυσματική εξίσωση της γραμμής C_f είναι:

$\vec{r}_f(t)=t\cdot\vec{i}+\sqrt{1-t}\cdot\vec{j}$, $t\in A$. (1)

Μια διανυσματική εξίσωση της γραμμής $C_{f^{-1}}$ είναι:

$\vec{R}_{f^{-1}}(t)=t\cdot\vec{i}+(1-t^2)\cdot\vec{j}$, $t\in f(A)$. (2)

Όμως, μια γραμμή δεν έχει μία μόνο διανυσματική εξίσωση, αλλά πολλές. Αν στην εξίσωση (2) αλλάξουμε παράμετρο και θέσουμε $\omega=1-t^2$, $t\in[0,+\infty)$, τότε $\omega\in(-\infty,1]$ και $t=\sqrt{1-\omega}$. Έτσι, μια άλλη διανυσματική εξίσωση της γραμμής $C_{f^{-1}}$ είναι: $\vec{r}_{f^{-1}}(\omega)=\sqrt{1-\omega}\cdot\vec{i}+\omega\cdot\vec{j}$, $\omega\in A$

ή αλλιώς, $\vec{r}_{f^{-1}}(t)=\sqrt{1-t}\cdot\vec{i}+t\cdot\vec{j}$, $t\in A$. (3)

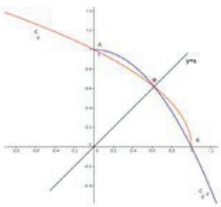
Ο κ. Πετράκης, για να βρει τα κοινά σημεία των δύο γραμμών C_f και $C_{f^{-1}}$ χρησιμοποιεί τις εξισώσεις (1) και (3) και λύνει την εξίσωση: $\vec{r}_f(t)=\vec{r}_{f^{-1}}(t)$ $t\in A$ και βρίσκει ότι οι δύο αυτές γραμμές έχουν κοινό σημείο μόνο το $M(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$, το οποίο ανήκει στη διχοτόμο: $y=x$. **Αυτό όμως είναι λάθος.** Γιατί, για να βρούμε τα κοινά σημεία των δύο αυτών γραμμών, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1) και (3), όπως είπαμε και παραπάνω, θα πρέπει να βρούμε όλα τα ζεύγη (t_1,t_2) με:

$$\begin{cases}t_1,t_2\in A\\ \vec{r}_f(t_1)=\vec{r}_{f^{-1}}(t_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1\le 1,\ t_2\le 1\\ t_1=\sqrt{1-t_2}\\ \sqrt{1-t_1}=t_2\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε:

$(t_1=1,t_2=0)$, $(t_1=0,t_2=1)$, $(t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},t_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

Έτσι, οι δύο γραμμές C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν τρία κοινά σημεία **(και όχι μόνο ένα που μας λέει ο κ. Πετράκης)**, τα εξής:



Κ(1,0), Λ(0,1) και $M(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

Από τα σημεία αυτά μόνο το τρίτο ανήκει στη διχοτόμο: $y=x$.

Δεύτερο λάθος

Για να αποδείξει ότι η συνάρτηση $f(x)=4-x$, $\chi\in\mathbb{R}$ δεν είναι ίση με την αντίστροφή της: $f^{-1}(x)=4-x$, $\chi\in\mathbb{R}$ (!!!) υποθέτει ότι είναι ίσες και θεωρεί τις εξής διανυσματικές εξισώσεις των C_f και $C_{f^{-1}}$:

$\vec{r}_f(t)=t\cdot\vec{i}+(4-t)\cdot\vec{j}$, $t\in\mathbb{R}$ (4)

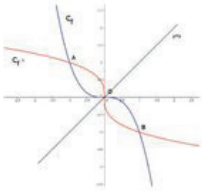
και $\vec{r}_{f^{-1}}(t)=(4-t)\cdot\vec{i}+t\cdot\vec{j}$, $t\in\mathbb{R}$ (5)

Βρίσκει ότι: $\dot{\vec{r}}(t)=1\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}=(1,-1)$ και $\dot{\vec{r}}_{f^{-1}}(t)=-1\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}=(-1,1)$ και φθάνει, όπως λέει, στο συμπέρασμα ότι «τα εφαπτόμενα διανύσματα σε οποιοδήποτε σημείο των γραφικών τους παραστάσεων κατά τη φορά διαγραφής τους, είναι αντίθετα!!! ΑΤΟΠΟ». **Αυτό όμως, όχι μόνο δεν είναι καταπληκτικό και άτοπο αλλά σύμφωνα με τη Διαφορική Γεωμετρία, είναι αναμενόμενο.** Πράγματι η εξίσωση (5) προκύπτει από την (4) θέτοντας όπου t το $4-t$ (αλλαγή παραμέτρου). Έτσι, οι εξισώσεις (4) και (5) παριστάνουν την ίδια ευθεία και επειδή $\frac{d(4-t)}{dt}=-1<0$, την διαγράφουν κατά αντίθετες φορές. Άρα τα εφαπτόμενα διανύσματα σε οποιαδήποτε σημεία τους κατά την φορά διαγραφής τους είναι αντίθετα. **Που είναι το καταπληκτικό; Που είναι το άτοπο;**

Το ότι οι εξισώσεις (4) και (5) παριστάνουν την ίδια γραμμή (ευθεία) δε σημαίνει ότι για το ίδιο t από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε το ίδιο σημείο της γραμμής αυτής. Αν ένα σημείο, της γραμμής αυτής, προκύπτει από την (4) για $t=t_0$, από την (5) το ίδιο σημείο προκύπτει για $t=4-t_0$. Μόνο για $t=2$ και από τις δύο εξισώσεις παίρνουμε το ίδιο σημείο, το (2,2), το οποίο ο κ. Πετράκης λέει ότι είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο. Αλλά και στο σημείο αυτό τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι αντίθετα, άτοπο όπως μας λέει. Άρα, ο ίδιος απέδειξε ότι *το μοναδικό κοινό σημείο (2,2) των δύο γραμμών C_f και $C_{f^{-1}}$ δεν είναι κοινό σημείο αυτών !!!*

Β. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εδώ, ο συντάκτης μπερδεύει τα αναλλοίωτα σημεία ενός γραμμικού μετασχηματισμού με τα κοινά σημεία μιας γραμμής και της εικόνας της μέσω του γραμμικού αυτού μετασχηματισμού. Με άλλα λόγια ισχυρίζεται ότι δύο γραμμές συμμετρικές ως προς την ευθεία: $y=x$ δεν μπορούν να έχουν κοινά σημεία έξω από την ευθεία αυτή!!! Στο παρακάτω σχήμα οι γραμμές C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, αλλά εκτός από το σημείο Ο, που ανήκει στην ευθεία $y=x$, έχουν κοινά και τα σημεία Α και Β, τα οποία δεν ανήκουν στην ευθεία $y=x$.



Γ. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρώτο λάθος.

Έστω ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ $(A\neq\emptyset, A\subset\mathbb{R}$ αντιστρέφεται. Ένα σημείο του επιπέδου $M(x_0,y_0)$ είναι κοινό σημείο των δύο γραμμών C_f και $C_{f^{-1}}$ αν, και μόνο αν: $x_0\in(A\cap f(A))$ και $f(x_0)=f^{-1}(x_0)=y_0$.

Πράγματι, αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε: $x_0\in(A\cap f(A))$ και οι περιορισμοί των συναρτήσεων f και f^{-1} στο σύνολο

Πράγματι, αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε: $x_0\in(A\cap f(A))$ και οι περιορισμοί των συναρτήσεων f και f^{-1} στο σύνολο $B=\{x_0\}$ είναι ίσες συναρτήσεις με τιμή y_0.

Έστω λοιπόν ότι $x_0\in(A\cap f(A))$ και ας ονομάσουμε f^* τον περιορισμό της f στο $B=\{x_0\}$ και $(f^{-1})^*$ τον περιορισμό της f^{-1} στο $B=\{x_0\}$, οπότε: $f^*:\{x_0\}\to\mathbb{R}$ με $f^*(x_0)=f(x_0)$ και $(f^{-1})^*:\{x_0\}\to\mathbb{R}$ με $(f^{-1})^*(x_0)=f^{-1}(x_0)$.

Έτσι, το σημείο $M(x_0,y_0)$ είναι κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ αν, και μόνο αν: $x_0\in(A\cap f(A))$ και

$$\begin{cases}f^*=(f^{-1})^*\\ f^*(x_0)=y_0\end{cases}\Leftrightarrow f(x_0)=f^{-1}(x_0)=y_0$$

Όμως οι δύο περιορισμοί f^* και $(f^{-1})^*$ δεν είναι αναγκαίως αντίστροφες συναρτήσεις όπως ισχυρίζεται ο κ. Πετράκης. Δεν υπάρχει τέτοιο θεώρημα.

Για παράδειγμα, η αντίστροφη της συνάρτησης $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{1-x}$ είναι η συνάρτηση $f^{-1}:[0,+\infty]\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=1-x^2$.

Το σημείο $M(x_0=1,y_0=0)$ είναι κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ αφού: $1\in(-\infty,1]\cap[0,+\infty)$ και $f(1)=f^{-1}(1)=0$.

Ο περιορισμός της f στο $B=\{1\}$ είναι: $f^*:\{1\}\to\mathbb{R}$ με $f^*(1)=f(1)=0$ και ο περιορισμός της f^{-1} στο $B=\{1\}$ είναι: $(f^{-1})^*:\{1\}\to\mathbb{R}$ με $(f^{-1})^*(1)=f^{-1}(1)=0$.

Η αντίστροφη της συνάρτησης f^* είναι: $(f^*)^{-1}:\{0\}\to\mathbb{R}$ με $(f^*)^{-1}(0)=1$. Όπως βλέπουμε: $(f^*)^{-1}\neq(f^{-1})^*$.

Δεύτερο λάθος

Γράφει ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} που ορίζονται από τα ζεύγη του 3ου πινακιδίου της 3ης στήλης (στη σελίδα 4 της εφημερίδας), που με άλλους συμβολισμούς μπορούν να γραφούν, ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases}4, & \text{αν } x=0\\ 3, & \text{αν } x=1\\ 2, & \text{αν } x=2\\ 1, & \text{αν } x=3\\ 0, & \text{αν } x=4\end{cases}\quad\text{και}\quad f^{-1}(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x=4\\ 1, & \text{αν } x=3\\ 2, & \text{αν } x=2\\ 3, & \text{αν } x=1\\ 4, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

δεν είναι ίσες!!! Όμοια και για τις συναρτήσεις f και f^* του 6ου πινακιδίου της 3ης στήλης. Αυτό είναι απαράδεκτο. Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης, δύο συναρτήσεις με το ίδιο σύνολο αφίξεως (συνήθως θεωρούμε το $\mathbb{R}$) και το ίδιο γράφημα είναι ίσες. (Αν βέβαια γνωρίζουμε τον ορισμό της συνάρτησης).

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Όπως αποδείξαμε παραπάνω, από αυτά που γράφει ο κ. Πετράκης, τίποτα δεν είναι σωστό. Από αυτά που γράφει στην εφημερίδα, όπως και από αυτά που γράφει σε ένα βιβλιαράκι, που μου έχει στείλει, με τίτλο «Αντίστροφες Συναντήσεις», έχω σχηματίσει την εντύπωση ότι ο κ. Πετράκης στον τύπο $f^{-1}(y)=x$ (σελίδα 23 στο παραπάνω βιβλιαράκι) εξακολουθεί να θεωρεί για την συνάρτηση f^{-1} ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y, που είναι απαράδεκτο λάθος. Ίσως αυτό να είναι η αιτία όλων των τραγελαφικών που μας λέει. Όμως, εξακολουθώ να έχω την απορία: Με ποια κριτήρια η εφημερίδα σας δημοσίευσε το άρθρο αυτό (και επίσης με ποια κριτήρια η Επιστημονική Επιτροπή της Μαθηματικής Εβδομάδας στη Θεσσαλονίκη, ενέκρινε την εισήγηση αυτή). Μου προκαλεί θλίψη το γεγονός ότι υπάρχουν συνάδελφοι «Μαθηματικοί», οι οποίοι ασπάζονται και υποστηρίζουν αυτά τα παρανοϊκά που λέει ο κ. Πετράκης. Η σοβαρότητα και η εγκυρότητα ενός εντύπου προκύπτει από την ποιότητα των άρθρων που περιέχει. Η άποψη που λέει ότι όταν ένα άρθρο είναι ενυπόγραφο πρέπει να δημοσιεύεται άτι και να λέει είναι όχι μόνο λανθασμένη, αλλά και ανόητη. Γιατί, τότε, τα περιοδικά δεν θα υπήρχε λόγος να έχουν συντακτικές επιτροπές, επιστημονικές επιτροπές και υπεύθυνους του περιοδικού. Δηλαδή, αν γράψει ένας ένα άρθρο στο οποίο να εκθειάζει τα ναρκωτικά πρέπει το περιοδικό να το δημοσιεύσει επειδή θα είναι ενυπόγραφο;

Θα μου πείτε τι σχέση έχουν τα ναρκωτικά.

Απαντώ:

Ακριβώς την ίδια σχέση που έχουν τα λάθη στα μαθηματικά.

Με τιμή

Αντώνης Κυριακόπουλος

Αντώνης Κυριακόπουλος, Τηλ.: 2106518543-6977585013, e-mail: a_kiriak@otenet.gr

Τεχνικές Διαχείρισης θυμού για παιδιά

(μια μικρή προσπάθεια προσέγγισης ενός μεγάλου θέματος)

Ο θυμός είναι ένα συναίσθημα αλλά το τι ακριβώς είναι ένα συναίσθημα είναι κάπως απροσδιόριστο. Είναι περισσότερες οι άρρητες (~ εμπειρικές / ανεπίσημες) "θεωρίες" συναισθημάτων παρά οι αυστηρά επιστημονικές (προϊόν μελέτης, έρευνας κτλ.). Η δυσκολία με τα συναισθήματα είναι πως παρεμβαίνοντας παντού α) μας δίνουν την αίσθηση πως όλοι τα γνωρίζουμε, β) παρεμβαίνουν και στην έρευνά τους και γ) είναι σε μεγαλύτερο βαθμό από π.χ. τις γνωστικές λειτουργίες, υποκειμενικά. Τελικά και γλωσσολογικά ο όρος συναίσθημα αναφέρεται σε αφηρημένη έννοια.

Είναι συχνά πολύ δύσκολο και τα συναισθήματα των άλλων να κατανοήσουμε πλήρως αλλά ακόμα και τα δικά μας να περιγράψουμε επαρκώς με λέξεις.

Ο **θυμός** μπορεί να προσεγγιστεί σαν ***φυσική αντίδραση στην δυσαρέσκεια και την απογοήτευση*** (ματαίωση). Η **επιθετικότητα** δε είναι συχνά η συμπεριφορική εκδήλωση του θυμού και σημαίνει πως κάποιος ή κάτι θα πάθει κακό (φυσικά ή λεκτικά). Τα παιδιά νιώθουν επίσης θυμό. Και έχουν και καλούς λόγους. Είναι - πιο συχνά από ό,τι οι ενήλικες - υποχρεωμένα να δέχονται τα πράγματα γύρω τους ως έχουν (πιθανή πηγή δυσαρέσκειας) και εξαρτώνται έντονα από τους άλλους για να τους παρέχουν ό,τι έχουν ανάγκη (πιθανή πηγή ματαίωσης). Υποθέτουμε πως τα διαμορφωμένα έμβρυα νιώθουν δυσαρέσκεια και ματαίωση π.χ. τραυματισμού της μητέρας. Άρα είναι πιθανό να νιώθουν και θυμό.

Όπως όλα τα συναισθήματα έτσι και ο θυμός όταν καταπιέζεται διογκώνεται. Ο διογκωμένος θυμός μπορεί να ξεσπάσει με μικρή σχετικά αφορμή και με δυσανάλογο (της αφορμής) μέγεθος. Η ελεγχόμενη απελευθέρωση του θυμού α) μειώνει τις πιθανότητες εκδήλωσης επιθετικής συμπεριφοράς και β) μας επιτρέπει να σκεφτόμαστε πιο καθαρά.

Για τα παιδιά είναι πιο δύσκολο να καταλάβουν τα αρνητικά τους συναισθήματα και να τα εκφράσουν με κοινωνικά αποδεκτό τρόπο. Έτσι μπορούν πιο εύκολα να καταφύγουν σε λεκτική ή φυσική κακοποίηση ή σε περιφρόνηση / απομόνωση ή ακόμη σε αυτο - τιμωρητικές συμπεριφορές (αυτοτραυματισμός, άρνηση τροφής κτλ.). Ή να καταφύγουν σε αντικοινωνική συμπεριφορά (αντιδρώντας σε κανόνες, αποφεύγοντας συναναστροφές, μειώνοντας τις σχολικές τους επιδόσεις).

Οι ενήλικες μπορούμε να αρχίσουμε να τα βοηθούμε,

α) μιλώντας μαζί τους για τα συναισθήματά τους και υποστηρίζοντάς τα να καταλάβουν τα συναισθήματά τους. Είναι σημαντικό να απενοχοποιήσουμε τα συναισθήματα. Κανείς δεν είναι υπεύθυνος για αυτά που νιώθει, μόνο για το πώς διαχειρίζεται τα όσα νιώθει. Αυτό είναι ανάγκη να το πιστέψουμε πρώτα εμείς και μετά να το περάσουμε και στα παιδιά μας.

β) Μένοντας κοντά στο παιδί καθώς προσπαθεί να καταλάβει και να "δουλέψει" με τον θυμό του. Δίνοντάς του το μήνυμα πως είμαστε εκεί, πως δεν το απορρίπτουμε, πως δεν το αγαπούμε μόνο όταν είναι "καλό παιδί".

γ) Βοηθώντας το παιδί να εκφράσει με θετικό τρόπο τον θυμό του. Μαθαίνοντάς του να λέει "με εξοργίζει όταν ο φίλος μου ... (κάνει ή λέει κάτι)" κι όχι "μισώ τον φίλο μου". Έτσι αρχίζει να κατανοεί τα συναισθήματα και τις ανάγκες του και όχι να κάνει προσωποποιήσεις και προβολές.

δ) Εμποδίζοντας τον θυμό να διογκωθεί. Δίνοντας διεξόδους (μη επιθετικές) όπως δυνατότητες φυσικής εκτόνωσης (τρέξιμο, φωνές), έντονου παιχνιδιού (π.χ. μαξιλαρομαχία) κτλ. Τεχνικές όπως καταγραφή των αρνητικών συναισθημάτων σε χαρτί και μετά καταστροφή του χαρτιού ή εκτόνωση μέσω ζωγραφικής, συχνά μπορούν ν' αποδειχθούν χρήσιμες.

& **ε) Με το να είμαστε εμείς ένα καλό παράδειγμα** διαχείρισης θυμού.

Τέλος, η διαχείριση θυμού δεν πρέπει να εφαρμόζεται όταν γίνονται τα ξεσπάσματα αλλά να είναι μέρος της διαπαιδαγώγησης των παιδιών μας.

Λ. Α.Βλαχόπουλος, MSc, PsyD
Σχολικός & Συμβουλευτικός Ψυχολόγος
Ψυχοθεραπευτής (Group & Drama)

References:
Fisher, Shaver & Carnochan, *A skill approach to emotional dev.*, Jossey-bass Publ. 1989
APA - *Anger Management Handbook*
Kathy Garber B.S.N - *Stop Anger - be Happy*

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

Η Ε.Μ.Ε. διοργανώνει τον 69ο Πανελλήνιο Μαθητικό Διαγωνισμό (Π.Μ.Δ.) στα Μαθηματικά «Ο ΘΑΛΗΣ» το Σάββατο, 1 Νοεμβρίου 2008 και ώρα 9.00 π.μ. στο 3ο ΓΕΛ Κομοτηνής

Η εφημερίδα μας θα δημοσιεύεται πλέον και ηλεκτρονικά, στη διεύθυνση: http://apeironews.blogspot.com

Αν είστε μαθηματικός ή μη και αγαπάτε τα μαθηματικά, έχετε τη δυνατότητα να δημοσιεύσετε το άρθρο σας στην εφημερίδα της Ε.Μ.Ε. Ροδόπης, αρκεί να το στείλετε στην ηλεκτρονική μας διεύθυνση emerodopis@gmail.com

Η ΕΜΕ διοργανώνει το 25ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας στο ΒΟΛΟ, στις 21-22-23/11 2008

Άρθρο στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Η ανισότητα $||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ με $\alpha, \beta \in C$ και η χρήση της στην εύρεση ακροτάτων

Μπάμπης Στεργίου – Μαθηματικός

Α. Εισαγωγή

Το άρθρο αυτό ξεκίνησε με αφορμή το φετινό θέμα (Μάιος 2008) στις πανελλαδικές εξετάσεις, στο οποίο ζητούνταν μεταξύ των άλλων και η μέγιστη τιμή του μέτρου της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών, από τους οποίους ο ένας έγραφε ένα κύκλο και ο άλλος μια ευθεία. Στο βιβλίο μας: **Μαθηματικά γ΄ Λυκείου, Στεργίου – Νάκης, τόμος $Γ_1$** έχουμε επισημάνει από καιρό ότι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή μιας παράστασης με μιγαδικούς, που περιέχει μέτρα, δεν εξασφαλίζεται από τη χρήση και μόνο της βασικής ανισότητας

$$||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$$

αλλά απαιτείται επαλήθευση των τιμών αυτών (ή η χρήση γεωμετρίας). Φαίνεται όμως ότι η λεπτή αυτή επισήμανση δεν έγινε αρκούντως αντιληπτή από τους μαθητές, με αποτέλεσμα στην διόρθωση των γραπτών να χαθούν μερικές πολύτιμες, έστω και λίγες, μονάδες. Το θέμα βέβαια το είχαμε συζητήσει κατά τη διάρκεια του χειμώνα και στο δικτυακό τόπο http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA με αρκετούς και εκλεκτούς συναδέλφους, όπου μάλιστα παρουσιάσαμε και παραδείγματα για τον τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων ασκήσεων.

Β. Γενικές επισημάνσεις

Η βασική ανισότητα $||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ μας δίνει άνω και κάτω φράγμα για την παράσταση $\mathbf{K = |\alpha \pm \beta|}$, με την προϋπόθεση βέβαια ότι τα μέτρα των α, β παίρνουν τιμές από ένα διάστημα με θετικά άκρα, καθώς οι μεταβλητοί μιγαδικοί α, β παίρνουν τιμές από κάποια δοσμένα σύνολα. Πιο συγκεκριμένα το $|\alpha|+|\beta|$ είναι στην περίπτωση αυτή ένα άνω φράγμα και το $||\alpha|-|\beta||$ είναι ένα κάτω φράγμα για το Κ. Επομένως, αν οι εικόνες των μιγαδικών α, β κινούνται πάνω σε καθορισμένες γραμμές ή ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς, τότε η παράσταση $K = |\alpha \pm \beta|$ ενδέχεται να λαμβάνει δύο ακρότατες τιμές, πιθανόν όμως να λαμβάνει μόνο μέγιστο ή μόνο ελάχιστο. Είναι επίσης πιθανόν η παράσταση αυτή να μην έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο. Αυτό που θέλουμε να τονίσουμε με το άρθρο αυτό είναι το γεγονός ότι η χρήση της παραπάνω ανισότητας ναι μεν μας δίνει φράγματα (αν υπάρχουν) για την παράσταση $K = |\alpha \pm \beta|$, αλλά δεν μας δίνει πάντα τις επιθυμητές ακρότατες τιμές, δηλαδή το ελάχιστο ή το μέγιστο με την προϋπόθεση βέβαια ότι υπάρχουν τέτοιες τιμές. Επομένως, αν χρησιμοποιώντας την ανισότητα $||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα της μορφής

$$E \le |\alpha \pm \beta| \le M \quad (1)$$

τότε δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι το μέγιστο της παράστασης $K = |\alpha \pm \beta|$ είναι το Μ και το ελάχιστο είναι το Ε. Για να καταλήξουμε με βεβαιότητα σε αυτό το συμπέρασμα πρέπει απαραίτητα να βρούμε τιμές για τα α, β που να ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς (συνθήκες) ώστε η παράσταση Κ να δίνει στην (1) τη μια φορά την τιμή Μ και την άλλη την τιμή Ε. Πρέπει ωστόσο να επισημάνουμε από την αρχή ότι σε μερικές περιπτώσεις η ανισότητα $||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ μας δίνει όντως τις ακρότατες τιμές (ελάχιστο ή μέγιστο) και το μόνο που απομένει είναι η επαλήθευση. Σε πολλές όμως περιπτώσεις που είναι και οι πιο ενδιαφέρουσες, οι τιμές Ε και Μ στην σχέση $E \le K = |\alpha \pm \beta| \le M$ δεν είναι το ελάχιστο ή το μέγιστο αντίστοιχα, αλλά είναι τελείως παραπλανητικές. Έτσι, η εύρεση του ελαχίστου ή του μεγίστου για το Κ πρέπει να γίνει είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά, με άλλον όμως τρόπο.

Αλλά και η γεωμετρική (εποπτική) προσέγγιση μπορεί καμιά φορά να μας οδηγήσει σε πλάνη, κυρίως όταν οι μεταβλητές της παράστασης βρίσκονται σε αλληλεξάρτηση. Ως εκ τούτου φαίνεται ότι η επαλήθευση, όπου αυτή δεν είναι ιδιαίτερα δυσχερής, είναι η ασφαλέστερη μέθοδος για τον εντοπισμό των ακρότατων τιμών της παράστασης $K = |\alpha \pm \beta|$ και την ορθή διατύπωση του τελικού συμπεράσματος. Για να δείξουμε αυτή την αναγκαιότητα , θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω παραδείγματα.

Γ. Εφαρμογές

Άσκηση 1η

Αν ο αριθμός z είναι μιγαδικός και ισχύει $|z - 3 - 4i| = 3$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

Λύση

Αυτή είναι η πιο απλή περίπτωση που μπορούμε να συναντήσουμε. Σύμφωνα με τη ανισότητα

$$||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$$

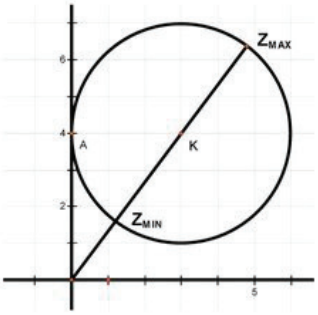
έχουμε:

$$|z| - |3+4i| \le ||z| - |3+4i|| \le |z-3-4i| = 3$$

οπότε

$$|z| - 5 \le 3 \Leftrightarrow |z| \le 3+5 \Leftrightarrow |z| \le 8$$

Φαίνεται λοιπόν ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το 8, αλλά πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι για αυτό; Ένας τρόπος είναι να ψάξουμε να βρούμε έναν αριθμό z_1 που να ικανοποιεί τη σχέση $|z - 3 - 4i| = 3$ και συγχρόνως να είναι $|z_1| = 8$. Ο καλύτερος όμως τρόπος είναι προσφύγουμε στη γεωμετρική μέθοδο και να χαράξουμε το σχήμα.



Η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(3, 4) και ακτίνα ρ = 3. Εύκολα βλέπουμε ότι το πιο απομακρυσμένο σημείο του

κύκλου από την αρχή Ο βρίσκεται στην ευθεία ΟΚ και απέχει από το Ο απόσταση d = ΟΚ + ρ = 5 + 3 = 8. Επομένως η μέγιστη τιμή για το |z| είναι ίση με 8. Επίσης από την ίδια ανισότητα παίρνουμε

$$|3+4i|-|z|\,|\le|\,|z|-|3+4i|\,|\le|z-3-4i|=3$$

οπότε

$$|z|\ge|3+4i|-3\Leftrightarrow|z|\ge5-3\Leftrightarrow|z|\ge2$$

Και εδώ φαίνεται πως η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι το 2, αλλά η απόδειξη δεν είναι επαρκής . Ή πρέπει να βρούμε μιγαδικό z_2 που να επαληθεύει τη σχέση $|z-3-4i|=3$ και συγχρόνως να είναι $|z_2|=2$ ή να χρησιμοποιήσουμε όπως και πριν το σχήμα και να διαπιστώσουμε ότι πράγματι η ελάχιστη τιμή για το |z| είναι d= ΟΚ – ρ = 5 – 3 = 2. Επομένως η ελάχιστη τιμή για το |z| είναι ίση με 2.

Σχόλιο

Όπως φάνηκε στην άσκηση αυτή, η ανισότητα έδωσε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή, αλλά χρειάστηκε επαλήθευση είτε αλγεβρική είτε γεωμετρική, κάτι που πάντα είναι απαραίτητο. Στην επόμενη άσκηση θα δούμε ότι η ανισότητα δεν δίνει την ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή και τα αποτελέσματα είναι τελείως παραπλανητικά.

Άσκηση 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $|z-3+4i|\le2$ και η παράσταση $A(z)=|z-3-4i|$

α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση.

β) Τι εκφράζει γεωμετρικά η παράσταση A(z);

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης A(z) .

Υπόδειξη

α) Είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο Κ(3 , - 4) και ακτίνα ρ = 2

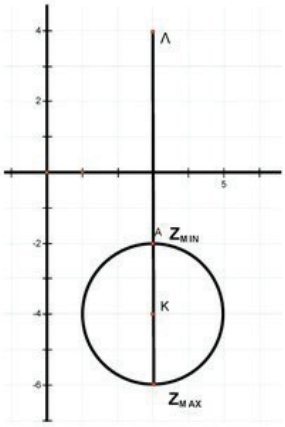
β) Την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο Λ(3 , 4)

γ) Η βασική ανισότητα $||z|-|w||\le|z-w|\le|z|+|w|$ **(1)**

δίνει: $|z-(3-4i)|\le|z|+|(3-4i)|\le2+5=7$ (2)

Άρα $A(z)=|z-3-4i|\le|z|+|3+4i|\le7+5=12$ (3)

Ωστόσο η τιμή 12 δεν είναι η μέγιστη, κάτι που δείχνει η γεωμετρική λύση της άσκησης.



Η μέγιστη τιμή είναι 10. Πού βρίσκεται άραγε το λάθος; Την απάντηση θα τη δούμε στο γενικό σχόλιο στο τέλος αυτού του άρθρου.

Σχόλιο

Μπορούμε να γράψουμε:

$$A(z)=|z-3-4i|=|(z-3+4i)-8i|\le|z-3+4i|+|8i|\le2+8=10\quad(4)$$

Βλέπουμε τώρα ότι η μέγιστη τιμή που δίνει η σχέση (4) είναι η σωστή, αν και χρησιμοποιήσαμε την ίδια ανισότητα (την (1)). Γιατί όμως συμβαίνει αυτό; Η απάντηση βασίζεται στο γεγονός ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z-3+4i$ και $8i$ μπορούν να βρεθούν στην ίδια ευθεία με την αρχή Ο, για κάποια κατάλληλη θέση της εικόνας του z στον κύκλο με κέντρο Κ(3, - 4) και ακτίνα ρ = 2.

***Απάντηση**: max A(z)=10 και min A(z)=6*

Άσκηση 3η

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $(i\bar{z}+6)w=3z+2i$. Αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $r=1$

β) να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$

Λύση: α) Είναι $|z|=2\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{4}{z}$,

τότε $|w|=\left|\frac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right|=\frac{|3z+2i|}{\left|i\frac{4}{z}+6\right|}=\frac{|3z+2i|}{\left|\frac{6z+4i}{z}\right|}=\ldots=1$

β) Παρά το ότι με μια πρόχειρη γεωμετρική ερμηνεία φαίνεται ότι $1\le|z-w|\le3$, αυτό δεν είναι αλήθεια διότι:

$$|z-w|=\left|z-\frac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right|=\left|\frac{iz\bar{z}+6z-3z-2i}{i\bar{z}+6}\right|=\left|\frac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right|=|w|=1$$

που σημαίνει ότι $|z-w|_{min}=|z-w|_{max}=1$

Σχόλιο

Στην άσκηση αυτή τόσο η αλγεβρική προσέγγιση με την ανισότητα όσο και η γεωμετρική λύση οδηγούν σε τελείως εσφαλμένα συμπεράσματα, διότι οι μιγαδικοί z, w βρίσκονται σε αλληλεξάρτηση και έτσι δεν μπορούν να βρεθούν συγχρόνως στις κατάλληλες θέσεις ώστε να προκύψουν γεωμετρικά η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή για την απόστασή τους. Πιο συγκεκριμένα, οι εικόνες των μιγαδικών αυτών βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το Ο και έτσι ποτέ δεν μπορούν να απέχουν 3 ή 1, παρά όσο η διαφορά των ακτίνων τους , δηλαδή 1.

Γενικό σχόλιο: Με εφαρμογή της βασικής ιδιότητας του μέτρου $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ αποδεικνύεται ότι:

i) $|z+w|=|z|+|w|$, αν και μόνο αν οι εικόνες Ο, Μ, Ν των μιγαδικών 0, z, w αντίστοιχα είναι συνευθειακά σημεία και μάλιστα το Ο δεν είναι μεταξύ των Μ, Ν. Με άλλα λόγια, όταν τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ είναι ομόρροπα.

ii) $|z-w|=|z|+|w|$, αν και μόνο αν οι εικόνες Ο, Μ, Ν των μιγαδικών 0, z, w αντίστοιχα είναι συνευθειακά σημεία και μάλιστα όταν το Ο είναι μεταξύ των Μ, Ν. Με άλλα λόγια, όταν τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ είναι αντίρροπα.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις που

$|z-w|=||z|-|w||$ ή $|z+w|=||z|-|w||$

Με βάση λοιπόν αυτές τις παρατηρήσεις εξηγούνται τα διαφορετικά αποτελέσματα στα οποία οδηγούν οι διαφορετικές προσεγγίσεις σε ορισμένες από τις ασκήσεις που προηγήθηκαν.

ΘΑΛΗΣ + ΦΙΛΟΙ

Η μη κερδοσκοπική ομάδα **ΘΑΛΗΣ + ΦΙΛΟΙ** σε συνεργασία με εκπαιδευτικούς της Κομοτηνής διοργανώνουν **Λέσχη Ανάγνωσης Μαθηματικής Λογοτεχνίας** για δεύτερη χρονιά, προσφέροντας σε όσους ενδιαφέρονται να ανήκουν σε αυτήν έναν χώρο, ένα έναυσμα, έναν κοινό τρόπο έκφρασης και μια ομάδα συζήτησης.

Τα μέλη της λέσχης θα συναντιούνται μία φορά το μήνα στο καφέ-μπαρ **«Ραδιόφωνο»** και θα συζητούν ένα βιβλίο, το οποίο θα έχουν διαβάσει από πριν. Το προεπιλεγμένο βιβλίο θα παρουσιάζεται από ένα μέλος της ομάδας (διαφορετικό κάθε φορά) και θα αποτελεί τη βάση της συζήτησης.

Οι συναντήσεις που έχουν οριστεί για την περίοδο 2008 - 2009 θα γίνονται ημέρα **Πέμπτη,** (εκτός της πρώτης συνάντησης που θα γίνει Παρασκευή), θα έχουν ώρα έναρξης στις **7:30 μ.μ.** και είναι οι εξής:

Ημερομηνία	Βιβλίο	Συγγραφέας	Εισηγητής
17 Οκτωβρίου 2008	**Ποιος σκότωσε το σκύλο τα μεσάνυχτα**	Mark Haddon	Γιώργος Σουλιώτης
13 Νοεμβρίου 2008	**Το χαμόγελο του Τούρινγκ**	Χρ. Παπαδημητρίου	Άλκης Συμεωνίδης
11 Δεκεμβρίου 2008	**Από την παράνοια στους αλγόριθμους (Μέρος Γ)**	Απόστολος Δοξιάδης	Ανδρέας Λύκος
15 Ιανουαρίου 2009	**Logicomix**	Απόστολος Δοξιάδης Χρ. Παπαδημητρίου	Μιχάλης Κωτσόπουλος
12 Φεβρουαρίου 2009	**Σχετικά με τον Ροδερέρ**	Guillermo Martinez	Τάσος Στοϊκίδης
12 Μαρτίου 2009	**Η επιπεδοχώρα**	Edwin A. Abbott	Γιώργος Παπάς
9 Απριλίου 2009	*Ο τίτλος του βιβλίου που θα συζητηθεί θα ανακοινωθεί σύντομα*		

Η ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΕΙΝΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΗ

Πληροφορίες:
likan@sch.gr ή στο 6942847094

Βιβλία για Όλους

«Καθώς πηγαίναμε στο σχολείο το άλλο πρωί με το σχολικό, προσπεράσαμε 4 κόκκινα αυτοκίνητα στη σειρά, πράγμα που σήμαινε πως ήταν μια **Καλή Μέρα**, και γι' αυτό αποφάσισα να μην είμαι λυπημένος...

Ο κύριος Τζίβονς, ο ψυχολόγος του σχολείου, με ρώτησε μια φορά γιατί 4 κόκκινα αυτοκίνητα στη σειρά έκαναν μια μέρα μου **Καλή Μέρα**, 3 κόκκινα αυτοκίνητα στη σειρά την έκαναν **Σχεδόν Καλή Μέρα**, 5 κόκκινα αυτοκίνητα στη σειρά την έκαναν **Σούπερ Καλή Μέρα**, ενώ 4 κίτρινα αυτοκίνητα στη σειρά την έκαναν **Μαύρη Μέρα**, μια μέρα δηλαδή που δε μιλάω σε κανέναν, χασομεράω με τα διαβάσματά μου, δεν τρώω το φαγητό μου και δεν ρισκάρω. Είπε ότι προφανώς ήμουν ένα πολύ λογικό άτομο, επομένως απορούσε που έκανα τέτοιες σκέψεις, γιατί δεν ήταν πολύ λογικές.

Εγώ είπα πως μου άρεσαν τα πράγματα να είναι σε μια καθωσπρέπει τάξη. Κι ένας τρόπος να είναι τα πράγματα σε μια καθωσπρέπει τάξη, ήταν να είναι λογικά, ειδικά αν αυτά τα πράγματα ήταν αριθμοί ή επιχειρήματα. Υπήρχαν όμως κι άλλοι τρόποι να βάλεις τα πράγματα σε μια σωστή σειρά. Αυτός ήταν κι ο λόγος που είχα **Καλές Μέρες** και **Μαύρες Μέρες**. Είπα επίσης ότι μερικοί άνθρωποι που δουλεύουν σε γραφεία, βγαίνουν από τα σπίτια τους το πρωί κι αν δουν τον ήλιο να λάμπει, νιώθουν χαρούμενοι, ενώ αν δουν πως βρέχει, νιώθουν λυπημένοι. Ωστόσο η μόνη διαφορά είναι ο καιρός και, εφόσον δουλεύουν σε γραφεία, ο καιρός δεν έχει καμιά σχέση με το αν θα έχουν μια καλή ή μια κακή μέρα.»

Είναι κάποιες από τις σκέψεις του Κρίστοφερ Τζον Φράνσις Μπουν, ο οποίος ξέρει όλες τις χώρες του κόσμου με τις πρωτεύουσές τους, όπως και όλους τους πρώτους αριθμούς μέχρι το 7.507. Ο Κρίστοφερ, που δεν του αρέσει καθόλου να βρίσκεται συνωστισμένος με κόσμο, ειδικά με αγνώστους, και δε θέλει κανείς να τον αγγίζει, έχει διαμορφώσει ένα δικό του σύνολο αιτίων – αποτελεσμάτων, για να χαρακτηρίζει μια μέρα ως καλή ή πολύ καλή και να τη βιώνει αναγκαστικά πια ως τέτοια. Γι' αυτό δε θα λυπηθεί καθόλου ολόκληρη τη μέρα, ό,τι κι αν συμβεί, αν τύχει να δει 5 κόκκινα αυτοκίνητα στη σειρά το πρωί, κάτι που προμηνύει πως η μέρα θα είναι μια **Σούπερ Καλή Μέρα**.

Όταν κάποτε βρίσκεται στο Λονδίνο στο σπίτι της μητέρας του, σκύβοντας έξω από το παράθυρο ένα πρωί, προσπαθεί να μετρήσει τα κόκκινα αυτοκίνητα στη σειρά, για να ξέρει τι τον περιμένει στη διάρκεια της μέρας και πόσο καλή αυτή προμηνύεται. Όμως διαπιστώνει πως το κόλπο αυτό δεν ισχύει πια, γιατί αν περιμένει αρκετή ώρα, τότε θα περάσουν τρία ή τέσσερα ή πέντε κόκκινα αυτοκίνητα στη σειρά και δε θα είναι καθόλου τυχαίο, όπως όταν πηγαίνει με το σχολικό το πρωί στο σχολείο. Έτσι εγκαταλείπει την προσπάθεια να μαντέψει πώς θα είναι η μέρα του, αφού η λογική του του λέει πως αυτό δεν είναι δυνατόν να πετύχει κάτω απ' αυτές τις νέες συνθήκες.

Ο Κρίστοφερ εμπιστεύεται τη λογική του, όπως και την εξυπνάδα του και την ικανότητά του στα Μαθηματικά, αλλά αναγνωρίζει στον εαυτό του και μια σειρά από προβληματικές συμπεριφορές, τις οποίες απαριθμεί και καταγράφει.

Φαίνεται πως έχει το «γνώθι σαυτόν» ως εγγενές γνώρισμα.

Γνωρίζει ξεκάθαρα τι του αρέσει, τι όχι και γιατί. Ξέρει, παραδείγματος χάριν, πως δεν του αρέσουν καθόλου οι διακοπές.

«...οι άνθρωποι πηγαίνουν διακοπές για να δουν καινούρια πράγματα και για να χαλαρώσουν, όμως εμένα οι διακοπές δε με κάνουν να χαλαρώνω. Εξάλλου μπορείς να δεις καινούρια πράγματα κοιτάζοντας τη Γη από το μικροσκόπιο ή σχεδιάζοντας το σχήμα του στερεού που δημιουργείται όταν 3 ισοπαχείς κυλινδρικές ράβδοι διασταυρώνονται υπό ορθές γωνίες.»

Ο Κρίστοφερ, ο νεαρός ήρωας στο βιβλίο του Μαρκ Χάντον, **«ΠΟΙΟΣ ΣΚΟΤΩΣΕ ΤΟ ΣΚΥΛΟ ΤΑ ΜΕΣΑΝΥΧΤΑ»,** από τις εκδόσεις ΨΥΧΟΓΙΟΣ, βλέπει κάτω από το δικό του πρίσμα, κάτω από τη δική του γωνία, που φαντάζει "ορθή", με γνώμονα την ιδιότυπη λογική του, τον παράξενο και πολύπλοκο κόσμο που τον περιβάλλει και μας κάνει να προβληματιστούμε για τη σύνθετη δομή του κόσμου μας, αλλά και για τον ίδιο μας τον εαυτό, γεμίζοντας μας ωστόσο με αισιοδοξία.

http://mathandliterature.blogspot.com/