άπειρο.....

Έτος 1ο
Αρ. Φύλλου 4
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2008

ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ - ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΡΟΔΟΠΗΣ

Α. Ν. Κολμογκόροφ: "Το μαθηματικό άπειρο"

Προλεγόμενα

Την έννοια του απείρου θα τη συναντήσουμε ως: «φύσει άπειρο», «δυνάμει άπειρο», «ποιοτικό άπειρο», «ποσοτικό άπειρο», «κακό άπειρο», «αληθινό άπειρο».Κατά τα άλλα στα επόμενα, σε όποιες παραστάσεις εμφανίζονται τα σύμβολα του ∞ χωρίς «πρόσημο», νοείται ότι και τα δύο φέρουν μπροστά τους το ίδιο «πρόσημο».

Γιάννης Κερασαρίδης

μέρος 2ο

«Στα Μαθηματικά έχουμε δύο μεθόδους επισύναψης (προσθήκης) «κατ' εκδοχήν» στοιχείων στο σύστημα των αριθμών.

α) Από τη σκοπιά της Προβολικής Γεωμετρίας, μια ευθεία έχει ένα «επ' άπειρον» σημείο. Στο σύνηθες (μετρικό) σύστημα συντεταγμένων, το σημείο αυτό παίρνει (φυσιολογικά) την τετμημένη ∞. Η ίδια προσθήκη στο αριθμητικό σύστημα ενός μόνου μη προσημασμένου απείρου χρησιμοποιείται επίσης στη Θεωρία των Συναρτήσεων μιας Μιγαδικής Μεταβλητής. Στη Στοιχειώδη Ανάλυση, κατά τη μελέτη των ρητών συναρτήσεων $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου P(x) και Q(x) είναι πολυώνυμα, είναι φυσικό να δεχτούμε ότι $f(x)=\infty$ σε εκείνα τα σημεία που είναι οι ρίζες του Q(x), με πολλαπλότητες μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του P(x).

Για το «κατ' εκδοχήν» σημείο ∞ τίθενται (αξιωματικά) οι ακόλουθοι κανόνες πράξεων: $\infty+\alpha=\infty$, αν α πεπερασμένο, $\infty+\infty=\infty$, είναι απροσδιόριστο, $\infty\cdot\alpha=\infty$, αν $\alpha\neq 0$ και $\infty\cdot 0$ είναι απροσδιόριστο.

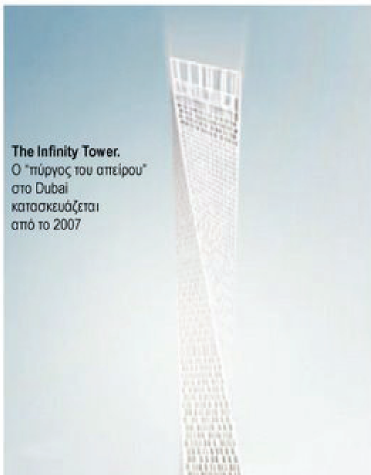
Δεν νοούνται ανισότητες που περιλαμβάνουν το ∞. Δεν έχει νόημα να ρωτήσουμε κατά πόσο το ∞ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από κάποιο πεπερασμένο α.

β) Κατά τη μελέτη πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, το σύστημα των πραγματικών αριθμών συμπληρώνεται με τα δύο «κατ' εκδοχήν» στοιχεία $+\infty$ και $-\infty$. Είναι δυνατό τότε να υποτεθεί ότι $-\infty<\alpha<+\infty$ για κάθε πεπερασμένο α, και να διατηρηθούν οι βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων σε ένα επεκτεταμένο αριθμητικό σύστημα. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξής κανόνες πράξεων για τα $+\infty$ και $-\infty$,

$(+\infty)+\alpha=+\infty$, αν $\alpha\neq -\infty$,
$(-\infty)+\alpha=-\infty$, αν $\alpha\neq +\infty$,
$(+\infty)\cdot\alpha=+\infty$, αν $\alpha>0$,
$(+\infty)+(-\infty)$ είναι απροσδιόριστο,
$(+\infty)\cdot\alpha=-\infty$, αν $\alpha<0$,
$(-\infty)\cdot\alpha=-\infty$, αν $\alpha>0$,
$(-\infty)\cdot\alpha=+\infty$, αν $\alpha<0$,
$(+\infty)\cdot 0$ είναι απροσδιόριστο

Σε κάθε μαθηματικό συλλογισμό είναι αναγκαίο να συνειδητοποιούμε κατά πόσο χρησιμοποιούμε το πραγματικό (όχι τα επεκτεταμένο) αριθμητικό σύστημα ή ένα επεκτεταμένο, καθώς και με ποια ακριβώς από τις δύο προηγούμενες έννοιες.

3) Το πρωταρχικό ενδιαφέρον, που είναι επίσης και η πρωταρχική δυσχέρεια της μαθηματικής μελέτης του απείρου εντοπίζεται πια στο πρόβλημα της υφής των απείρων συνόλων μαθηματικών αντικειμένων. Είναι ιδιαίτερα



The Infinity Tower.
Ο "πύργος του απείρου" στο Dubai κατασκευάζεται από το 2007

απαραίτητο να έχουμε υπ' όψη μας ότι η ολική σαφήνεια και πληρότητα της θεωρίας των απείρως μεγάλων και των απειροστών μεταβλητών, που έχει σήμερα επιτευχθεί, συνίσταται απλώς στην αναγωγή όλων των δυσχερειών της θεωρίας στο πρόβλημα της κατάστρωσης μιας βάσης για τη μελέτη των αριθμών, στην οποία συμπεριλαμβάνεται η έννοια του απείρου για συστήματα αριθμών.

Η διαπίστωση ότι το y είναι απειροστό έχει νόημα μόνο με την αποσαφήνιση του τρόπου της μεταβολής του y σε συνάρτηση με κάποια άλλη μεταβλητή x. Πχ., λέγεται ότι το y είναι απειροστό όταν $x\to a$, αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει ένα $\delta>0$ έτσι ώστε $|x-a|<\delta$ συνεπάγεται $|y|<\varepsilon$. Η υπόθεση ότι η συνάρτηση $y=f(x)$ ορίζεται για ένα άπειρο σύνολο τιμών του x (πχ., για όλους τους πραγματικούς x αρκετά πλησίον του a) υπεισέρχεται σ' αυτόν τον ίδιο τον ορισμό.

Στη Θεωρία των Συνόλων αποδίδεται στους όρους «φύσει» και «δυνάμει άπειρον» ένα ξεκάθαρο νόημα, που δεν έχει τίποτα το κοινό με το συμβολισμό κάθε άπειρης δύναμης με ένα πραγματικά άπειρο αριθμό. Το σημείο στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι άπειρα συστήματα αντικειμένων (όπως για παράδειγμα οι φυσικοί και οι πραγματικοί αριθμοί) ουδέποτε καθορίζονται από απλή απαρίθμηση, πράγμα που είναι δυνατό για πεπερασμένα συστήματα αντικειμένων. Θα ήταν φανερά άτοπο, να υποτεθεί ότι κάποιος «κατασκεύασε» ένα σύνολο φυσικών αριθμών με έμπρακτη απαρίθμηση «όλων», τον ένα μετά τον άλλο. Είναι γεγονός ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών μελετάται από τη διαδικασία της κατασκευής των στοιχείων του, με τη μετάβαση από το n στο n+1. Στην περίπτωση ενός συνεχούς πραγματικών αριθμών, η θεώρηση ενός στοιχείου του, δηλ. ενός πραγματικού αριθμού, ανάγεται στη μελέτη της διαδικασίας του σχηματισμού των διαδοχικών προσεγγιστικών τιμών του, και η θεώρηση ολόκληρου του συνόλου των πραγματικών αριθμών ανάγεται στη μελέτη των γενικών ιδιοτήτων τέτοιων διαδικασιών για τον σχηματισμό των στοιχείων του. Με αυτήν ακριβώς την έννοια το άπειρο μιας σειράς ή του συστήματος όλων των πραγματικών αριθμών (δηλ. ενός συνεχούς) μπορεί να χαρακτηριστεί μόνο σαν δυναμικό άπειρο. Μπορεί κανείς να αντιπαραθέσει τη σκοπιά του «δυνάμει απείρου» με τη θεώρηση των απείρων συνόλων σαν «πράγματι» καθορισμένων, που είναι ανεξάρτητη από τη διαδικασία για την κατασκευή τους. Ακόμα και σήμερα δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει ολοκληρωθεί η λύση του προβλήματος, μέχρι ποιο βαθμό και κάτω από ποιες συνθήκες κατά τη μελέτη των απείρων συνόλων είναι ορθή μια τέτοια αφαίρεση κατά τη διαδικασία της κατασκευής τους».

«μαγικές» μαθηματικές σχέσεις

Στο προηγούμενο φύλλο γράψαμε:

Σκεφτείτε ποιο και γιατί είναι το «μαγικό» του πολλαπλασιασμού:

11Χ11=;
111Χ111=;
1111Χ1111=;
....
111111111Χ111111111=;
κ.λπ. ....

Δίνουμε την απάντηση

11Χ11= 121
111Χ111=12321
1111Χ1111=1234321

111111111Χ111111111=12345678987654321

Διότι:

11 (**2** άσσους)	111 (**3** άσσους)	1111 (**4** άσσους)
x11	x111	x1111
11	111	1111
+11	+111	+ 1111
121	111	1111
	12321	1111
		1234321

Ή

$1111 \chi 1111 = (1x10^3 +1x10^2+1x10+1)^2$

$=10^6+2x10^5+3x10^4+4x10^3+3x10^2+2x10+1$

Βασίλης Ε.Στεφανίδης

άπειρ0.....

ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ ΕΚΔΟΣΗ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΡΟΔΟΠΗΣ

Ιδιοκτήτης:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΡΟΔΟΠΗΣ

Διεύθυνση:
Τηλ.: 25310 27248-6938442037(πρόεδρος)
25310 20479-6977374855 (ταμίας)

email: emerodopis@gmail.com
http://apeironews.blogspot.com

5 Γιατί μπορεί όλοι να τον συμβολίζουν με το «παγκόσμιο» **5** και οι Έλληνες να το διαβάζουν ***πέντε,*** αλλά... οι Γάλλοι τον λένε ***cinq,*** οι Ιταλοί ***cinque,*** οι Ισπανοί ***cinco,*** οι Πορτογάλοι cinco, οι Άγγλοι ***five,*** οι Γερμανοί ***funf,*** οι Δανοί ***fem,*** οι Ρώσοι ***пять*** (πγιατ), οι Τσέχοι ***pět*** (πγιετ) και οι Τούρκοι ***beç***

Πέντε είναι οι **αισθήσεις** και

- Οι **γραμμές** στο **μουσικό πεντάγραμμο**
- Ο **αντίχειρας,** ο **δείκτης,** ο **μέσος,** ο **παράμεσος** και ο **μικρός,** σε κάθε **ανθρώπινο χέρι**
- Ο **αριθμός** των **παικτών** σε κάθε **ομάδα μπάσκετ**
- Τα **πέταλα** στο άνθος της νερατζιάς
- Τα **πέντε πλατωνικά στερεά.** Το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο, το εικοσάεδρο
- Οι **πέντε «ουσίες».** Τα επίγεια συγκροτούνται από τέσσερα στοιχεία - Γη, Ύδωρ, Αήρ, Πυρ- ενώ τα ουράνια από ένα και μοναδικό πέμπτο στοιχείο που διατηρείται αναλλοίωτο. Είναι η λεγόμενη **πεμπτουσία.**
- Τα πέντε «χωρίς όνομα» **δάκτυλα του ποδιού του ανθρώπου**
- Γένεσις, Έξοδος, Λευιτικόν, Αριθμοί, Δευτερονόμιο. Η **πεντάτευχος** του **Μωυσή.**
- Τα **φύλλα** κάθε παίκτη στην **πόκα.**
- Οι **πέντε αδελφοί Ανδριανόπουλοι,** επιθετική πεντάδα του Ολυμπιακού κάποτε.
- ***«Πέντε, πέντε, δέκα, ανεβαίνω τα σκαλιά».*** Παλιό τραγούδι του Μίκη.
- ***«Πέντε εύκολα κομμάτια».*** Παλιά κινηματογραφική ταινία με τον Τζακ Νίκολσον.

6 Μπορεί όλοι να τον συμβολίζουν με το «παγκόσμιο» **6** και οι Έλληνες να το διαβάζουν ***έξι,*** αλλά.. οι Γάλλοι τον λένε ***six,*** οι Ιταλοί ***sei,*** οι Ισπανοί ***seises,*** οι Πορτογάλοι ***seis,*** οι Άγγλοι ***six,*** οι Γερμανοί ***sechs,*** οι Δανοί ***seks,*** οι Ρώσοι ***шесть*** (σεστ), οι Τσέχοι ***šest,*** οι Τούρκοι ***alti.***

Έξι:

- Οι **χορδές της κιθάρας,** mi, la, re , sol, si, mi.
- Ο **τέλειος αριθμός.** Είναι ίσος με το άθροισμα του 1 του 2 και του 3, που είναι και οι μοναδικοί διαιρέτες του
- Τα **quark.** Up, down, strange, charm, bottom, και top
- Τα **λεπτόνια.** Ηλεκτρόνιο, μιόνιο, ταυ και τα τρία αντίστοιχα νετρίνα
- **Μέρες** για να ολοκληρώσει, ο Θεός, τη **Δημιουργία.** Ο Άγιος Αυγουστίνος υποστήριζε ότι ο Θεός το επέλεξε λόγω της τελειότητας του αριθμού έξι.
- Χρονών θα πάει το παιδί στο **σχολείο**
- Χρόνια στο **Δημοτικό**
- Χρόνια στη **Δευτεροβάθμια**
- **Εξάγωνα** στους κρυστάλλους της χιονοστιβάδας
- **Εξάρες,** η καλύτερη ζαριά. ***Για μας τα ντόρτια κι οι διπλές και γι άλλους οι εξάρες,*** έλεγε το παλιό τραγούδι
- **Έξι άτομα άνθρακα** στο μόριο του βενζολίου
- Ο «σατανικός» **666**
- **Εξαπτέρυγα**
- **Εξάψαλμος**
- Ο, σύμφωνα με τον θρύλο, **εξαδάκτυλος**
- ***Έξι πρόσωπα ζητούν συγγραφέα.*** Θεατρικό έργο του Πιραντέλο.
- **Έξι πρωτόνια** στο άτομο του άνθρακα. Και ο **άνθρακας,** τα έκτο στη σειρά στοιχείο του Σύμπαντος, δεν είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο. Είναι το χαϊδεμένο παιδί της Δημιουργίας . Χωρίς αυτόν δεν θα μπορούσε να προχωρήσει η πυρηνοσύνθεση. Χωρίς αυτόν δεν θα υπήρχε ζωή. «Άνθρακας, ο θησαυρός».
- Οι **έξι σφαίρες** στο **εξάσφαιρο**
- Οι **έξι γυναίκες σύζυγοι** του **Ερρίκου του όγδοου**
- Ο **πόλεμος των έξι ημερών,** το 1967.
- Τα **έξι πρωταθλήματα της ομάδας Ολυμπιακός,** το ένα μετά το άλλο από το έτος 1997 έως το 2002.

Με την ευγενική παραχώρηση του Ανδρέα Κασσέτα από την ιστοσελίδα του http://users.att.sch.gr/kassetas/

Υπερ ευφυείς

(Ό,τι ακολουθεί είναι βασισμένο στην ιδέα πως ο όρος - τίτλος χρησιμοποιείται ως το ελληνικό ανάλογο του «Gifted»)

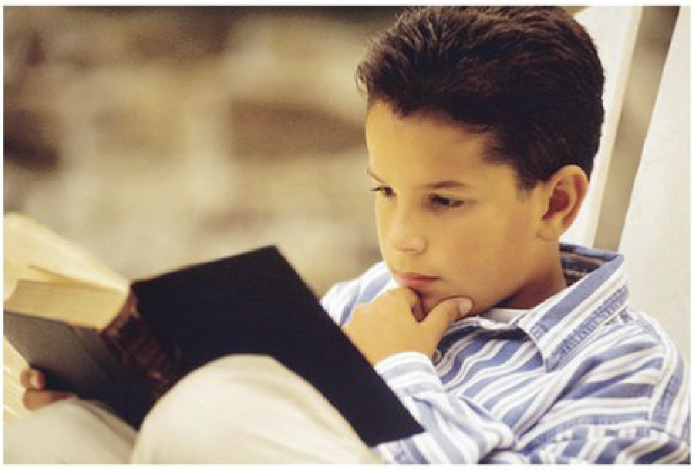
Τα προικισμένα παιδιά αποτελούν για την παιδαγωγική και την ψυχολογία ένα είδος «Ταμπού». Τα θαυμάζουμε αλλά δεν τα προσεγγίζουμε - τουλάχιστον επισήμως. Ίσως γιατί ζούμε στην εποχή που αποθεώνει τη μετριότητα. Όπως και να 'χει ενώ ακαδημαϊκά δεχόμαστε πως η έννοια της «ειδικής αγωγής» περιλαμβάνει ή πρέπει να περιλαμβάνει και τα προικισμένα παιδιά σπάνια αυτό γίνεται πράξη. Ειδικά στην Ελλάδα το ενδιαφέρον για αυτά τα παιδιά ερμηνεύεται αμέσως σχεδόν σαν ένδειξη άκρατου ελιτισμού... στην καλύτερη περίπτωση.

Στις Η.Π.Α. υπάρχει το εκπαιδευτικό πλαίσιο που είναι απαραίτητο για την «ακαδημαϊκή» εξέλιξη αυτών των παιδιών. Έτσι, σε πολλές πολιτείες οι νόμοι προβλέπουν πως για να θεωρηθεί κάποιος απόφοιτος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης αρκεί να μπορεί να ανταπεξέλθει σε κάποιες εξετάσεις. Δεν υπάρχει χρονολογικό όριο γι' αυτές κι έτσι ένα υπερεφυές παιδί μπορεί να αποφοιτήσει π.χ. από το δημοτικό στα 7 έτη αρκεί να περάσει τις εν λόγω αξιολογήσεις. Το σύστημα αυτό εδώ και κάποια χρόνια έχει δεχθεί έντονη κριτική και ως εκ τούτου έχει περιοριστεί. Οι κριτική εστίασε κυρίως:

1. Στην λεγόμενη **WASP «πριμοδότηση».** Τα παιδιά δηλαδή με χαρακτηριστικά Λευκού, Άγγλο-Σάξωνα, Προτεστάντη έχουν περισσότερες πιθανότητες ν' ανταπεξέλθουν σε αυτές τις εξετάσεις αφού και οι γονείς τους είναι κατά κανόνα οικονομικά ισχυρότεροι αλλά και γενικά συγκεντρώνουν τις προτιμήσεις του «Κατεστημένου» (άρα περισσότερες πιθανότητες για υποστήριξη από οργανώσεις όπως η MENSA κ.τ.λ.) και
2. Η εξωσχολική διδασκαλία που απαιτεί ένα τέτοιο σύστημα έχει και **ψυχοκοινωνικές επιδράσεις στο παιδί** (απομόνωση, παράκαμψη εξελικτικών σταδίων αναγκαίων για την ισορροπία ενός παιδιού).

Δυστυχώς και τα δύο μέρη της κριτικής μοιάζει να ευσταθούν - μερικώς τουλάχιστον.

Η μη ύπαρξη δεσμευτικού αναλυτικού προγράμματος στη Μ. Βρετανία μέχρι και στη δεκαετία του 70 έμοιαζε να διευκολύνει μια αντιμετώπιση ανάλογη με αυτή των ΗΠΑ. Στην πραγματικότητα όμως το Βρετανικό εκπαιδευτικό σύστημα έμοιαζε μάλλον να αρνείται την πιθανότητα να μην είναι «gifted» όλα τα WASP παιδιά. Τέτοιου είδους νοοτροπίες έκαναν το ενδιαφέρον για τα προι-



Όσο κι αν δεν θέλουμε να το παραδεχθούμε, ίσως, η **ενασχόληση** με τους **υπερεφευείς** είναι σαν τη **συλλογή μαύρων μαργαριταριών.** Ο **ελιτισμός** είναι αναπόφευκτος. Και η **καχυποψία** του κόσμου το ίδιο.

κισμένα παιδιά συχνά να ταυτίζεται σχεδόν με τον κοινωνικό -τουλάχιστον - ρατσισμό.

Σε πολλές αγγλοσαξωνικές χώρες επιτράπηκε «σιωπηρά» η ύπαρξη ιδιωτικών - ή με ιδιωτικά κριτήρια - σχολείων για «υπερεφυείς». Αυτό από τη μια μετρίασε το πρόβλημα της μη εκμετάλλευσης από αυτές τις κοινωνίες του εξαιρετικού εθνικού «νοητικού» πλούτου που όλοι αναγνωρίζουμε πως αποτελούν αυτά τα παιδιά. Ακόμη η σχολική οργάνωση βοήθησε και στην σωστότερη ψυχοκοινωνική ανάπτυξη αυτών των παιδιών. Από την άλλη όμως η ιδιωτική μορφή αυτών των εκπαιδευτηρίων ενέτεινε τις κριτικές προς την κατεύθυνση του ελιτισμού και της αυτοαναπαραγωγής του κατεστημένου. Προσπάθειες φορέων - όπως η προαναφερθείσα MENSA - να ανακαλύψουν και να προωθήσουν - με υποτροφίες κ.τ.λ. - «νοητικά ταλέντα» (κάτι που εμμέσως πλην σαφώς κάνουν και οι υποτροφίες π.χ. του ΙΚΥ σε μεγάλη όμως ηλικία - και άρα πολύ αργά ίσως για κάποια από αυτά τα ταλέντα) θεωρούνται από την κοινή γνώμη πράξεις εξιλασμού, κυρίως.

Εξελικτικά τώρα πρώτος ο Piaget μίλησε για το «ποσοστό» του πληθυσμού που θα κατακτήσει ολοκληρωτικά την «αφηρημένη σκέψη». Οι μεταπιαζετιανοί (Pascual Leone) και νεομεταπιαζετιανοί (Δημητρίου, Fisher) μιλούν για προδιαλεκτική, διαλεκτική και υπερβατική σκέψη που κατακτάται κατά την 3^{η}, 4^{η} και 5^{η} δεκαετία της ζωής από ένα όλο και μικρότερο ποσοστό του πληθυσμού έτσι ώστε αυτοί που κατακτούν το υπερβατικό στάδιο να είναι ένα απειροελάχιστο ποσοστό του συνόλου. Οι μηχανισμοί κατάκτησης και η όλη εξέλιξη αυτού του τύπου είναι περισσότερο υπόθεση παρά οτιδήποτε άλλο και αποτελούν το ψυχολογικό ανάλογο της υπερβατικής φυσικής (ταχυόνια, αντιύλη κ.τ.λ.).

Όσο κι αν δεν θέλουμε να το παραδεχθούμε, ίσως, η ενασχόληση με τους υπερεφευείς είναι σαν τη συλλογή μαύρων μαργαριτάριών. Ο ελιτισμός είναι αναπόφευκτος. Και η καχυποψία του κόσμου το ίδιο.

Η σύγχρονη παιδαγωγική - περισσότερο από μια αίσθηση ισότητας και λιγότερο από αντίληψη της αδήρητης ανάγκης - αναγνωρίζει πως και αυτά τα παιδιά θα πρέπει να υποστηριχθούν και να βοηθηθούν με εξατομικευμένη διδασκαλία. Τα παιδιά που υπολείπονται πρέπει να υποστηριχθούν γιατί κουράζονται, αυτά γιατί βαριούνται, το αποτέλεσμα συχνά είναι το ίδιο.

Συνηθίζουμε να λέμε πως «τα έξυπνα παιδιά δεν χάνονται» αυτό όμως δεν βασίζεται σε δεδομένα αλλά σε απόψεις και τυχαία παραδείγματα. Κι αν ένα έξυπνο παιδί «δεν χαθεί» που δεν έλαβε υποστήριξη φανταστείτε που θα έφτανε αν την είχε. Τα έξυπνα παιδιά είναι μπελάς. Δείχνουν στους δασκάλους την ανεπάρκεια τους και στους ενήλικες τη μετριότητα τους. Η άμυνα μας είναι να τα κατατάξουμε αβασάνιστα στους «εξυπνάκηδες» και να τα πιέσουμε ν' ακολουθήσουν το σύνολο, γιατί αυτό γίνεται πάντα μέσα σε μια τάξη. Ο μέσος όρος κερδίζει και η χρυσή μετριότητα θριαμβεύει.

Οι ανάγκες της τεχνολογίας κάνουν υποχρεωτική την στροφή της προσοχής σε υπερεφυή παιδιά. Η εξελίξεις των ψυχοπαιδαγωγικών επιστημών κάνουν εφικτή την επιλογή και εξέλιξη τους. Πρέπει όμως να εξελιχθούν και οι κοινωνίες ανάλογα για να μπορούν να δεχθούν κάτι τέτοιο χωρίς υστεροβουλίες ή κόμπλεξ. Όπως υπάρχει σιδηροπυρίτης που ο αδαείς μπορεί να πάρει για χρυσό έτσι και μη ευφυείς μπορούν να περιβληθούν το μανδύα του σοφού αν είναι WASP ή άλλο ανάλογο. Τα χάρτινα αθύρματα όμως δεν αντέχουν στο χρόνο...

Λ.Α.Βλαχόπουλος, MSc, PsyD
Σχολικός & Συμβουλευτικός Ψυχολόγος
Ψυχοθεραπευτής (Group & Drama)

Σημείωση Σύνταξης:

Μπορείτε να βρείτε πληροφορίες στα:

http://www.pi-schools.gr/special_education/harismatika/harismatika-part-00.pdf

http://www.tovima.gr/default.asp?pid=2&artid=159029&ct=33

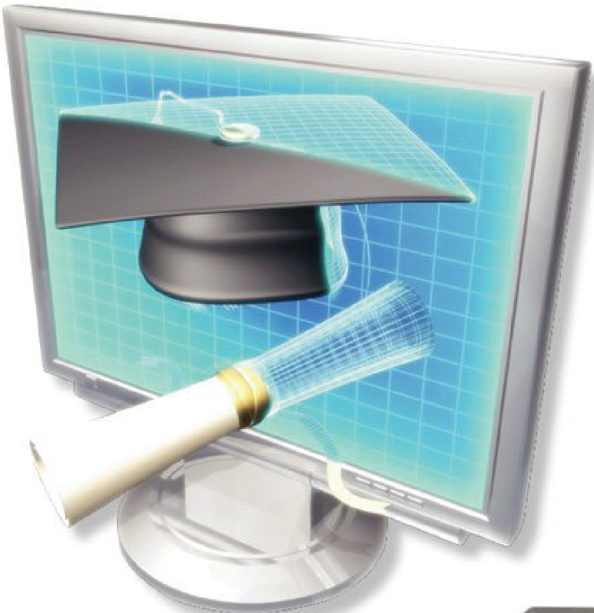
http://www.tovima.gr/default.asp?pid=2&artid=157577&ct=33

http://www.gifted.org/

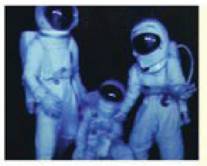
http://www.ri.net/gifted_talented/character.html

http://www.echa.info/modules/news/

http://www.aagc.org/



Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση



Μαθητές Γυμνασίου στο Μπρίστολ της Μ. Βρετανίας στο ρόλο επιστημόνων που προσπαθούν με τηλεδιασκέψεις και διαδραστικά υλικά να σώσουν τους αστροναύτες μιας διαστημικής αποστολής που παρουσίασε πρόβλημα. Οι μαθητές, αν θέλουν να σώσουν τους αστροναύτες, πρέπει να επιστρατεύσουν γνώσεις μαθηματικών, φυσικής, αστρονομίας αλλά και να χρησιμοποιήσουν σωστά τη γλώσσα και να συνεργαστούν μεταξύ τους

Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από τις αλλαγές που έχουν επιφέρει στη ζωή μας οι τεχνολογίες πληροφορικής και επικοινωνιών. Ζούμε σε μια δικτυωμένη (γι' αυτό και παγκοσμιοποιημένη) κοινωνία, όπου το Διαδίκτυο, ο προσωπικός υπολογιστής, τα κινητά τηλέφωνα και τα ψηφιακά πολυμέσα αλλάζουν τον τρόπο με τον οποίο επικοινωνούμε, εργαζόμαστε, ενημερωνόμαστε και ψυχαγωγούμαστε. Οι νέες γενιές επιδεικνύουν μια αξιοθαύμαστη άνεση στη χρήση της τεχνολογίας (όχι βέβαια πάντα για ωφέλιμες δραστηριότητες), η οποία αποτελεί και αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητάς τους. Τα δεδομένα αυτά δεν μπορούν να αφήσουν ασυγκίνητη την εκπαίδευση. Το ενδιαφέρον για την ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική πράξη πυροδοτείται αφενός από την παρουσία τους σε όλες τις πτυχές των σύγχρονων κοινωνιών και αφετέρου από τις δυνατότητές τους ως εκπαιδευτικών εργαλείων. Τι σημαίνει όμως νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση και ποιες είναι -θεωρητικά- οι ωφέλειες που μπορούν να προκύψουν από αυτό το συνταίριασμα;

Η παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας θέλει τον εκπαιδευτικό να βοηθάει το μαθητή να εσωτερικεύσει τη γνώση που προσφέρουν τα σχολικά βιβλία, μια γνώση που παρουσιάζεται ως πιστή περιγραφή μιας αμετάβλητης πραγματικότητας. Έμφαση δίνεται στο πώς ο μαθητής θα συλλάβει το τμήμα της πραγματικότητας που του παραδίδεται έτοιμο (εξού και η «παράδοση του μαθήματος») -και υποτίθεται ότι υπάρχει έξω απ' αυτόν- και στο πώς ο εκπαιδευτικός θα εξαφανίσει τις αμφισημίες ή τα σκοτεινά σημεία, μεταφέροντας την ίδια γνώση σε όλους τους μαθητές. Αυτό το είδος διδασκαλίας είναι σε όλους μας πολύ οικείο και, αναμφισβήτητα, απαραίτητο σε κάποιες περιπτώσεις (ο τρόπος που εξετάζονται οι μαθητές στις Πανελλαδικές εξετάσεις, εξάλλου, ενθαρρύνει αυτού του είδους τη διδασκαλία). **Η τεχνολογία, σε μια τέτοια διδακτική προσέγγιση, μπορεί απλώς να συμβάλει σε μια πιο ελκυστική και πλούσια παρουσίαση των πληροφοριών που συνθέτουν την προσφερόμενη γνώση. Ένας προβολέας, ένας προσωπικός υπολογιστής και ένα λογισμικό παρουσιάσεων μπορούν να κάνουν το μάθημα της ημέρας πιο κατανοητό και πιο ενδιαφέρον, ιδίως αν η παρουσίαση περιέχει ήχο, εικόνες, βίντεο, γραφικά ή/και σχεδιαγράμματα. Η λογική της μετάδοσης πληροφοριών σε ακροατήριο, βέβαια, παραμένει η ίδια.**

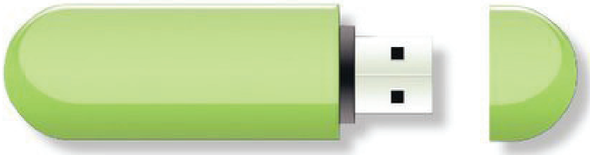
Η πραγματική συνεισφορά της τεχνολογίας στην εκπαίδευση αρχίζει από τη στιγμή που ο μαθητής γίνεται από παθητικός ακροατής (έστω μιας ελκυστικής παρουσίασης) χρήστης με επιλογές. Σύμφωνα με την κονστρουκτιβιστική θεωρία μάθησης (constructivism), η γνώση δεν είναι κάτι που υπάρχει έξω απ' αυτόν που μαθαίνει. **Η μάθηση θεωρείται μια δυναμική διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής χτίζει γνώση για τον κόσμο. Επομένως, η γνώση δεν μπορεί να μεταφερθεί αλλά μόνο να προσφερθεί προς αξιοποίηση και έτσι στο κέντρο μπαίνει η μάθηση και όχι η διδασκαλία.** Για να χτίσει κανείς γνώση χρειάζεται πλούσιες εμπειρίες, δραστηριότητες που τον φέρνουν σε επαφή με τα πράγματα άμεσα και διαδραστικά. Το διαδίκτυο και οι ψηφιακές εφαρμογές με εκπαιδευτικό περιεχόμενο (από CD ROM μέχρι προσομοιώσεις και ηλεκτρονικά παιχνίδια), έχοντας τη λογική του υπερκειμένου ή ακόμα και της εμβύθισης, δίνουν στο χρήστη τη δυνατότητα επιλογών, πλοήγησης και εξατομίκευσης, αλλά και παρουσιάζουν τις πληροφορίες με ποικιλία που προσεγγίζει το εύρος της ανθρώπινης αισθητηριακής εμπειρίας. Μέσα σ' αυτούς τους «κόσμους» που βρίσκονται στον υπολογιστή ο μαθητής αποκτά κίνητρο και μπορεί να βρει τη χαρά της ανακάλυψης και της αυτενέργειας, την ικανοποίηση της προσαρμογής του υλικού στις δικές του ανάγκες, την ευκαιρία να κυνηγήσει ο ίδιος την πληροφορία, τη δυνατότητα να διερευνήσει και να πειραματιστεί ελέγχοντας τις υποθέσεις του, την αυτοπεποίθηση για την ανάληψη προσωπικής ευθύνης για το μονοπάτι που θα ακολουθήσει η εκπαιδευτική του εμπειρία.

Ο εκπαιδευτικός από παντογνώστης-μεταφορέας ενός πακέτου πληροφοριών γίνεται σχεδιαστής εκπαιδευτικών σεναρίων βασισμένων στα διαθέσιμα τεχνολογικά εργαλεία (ή και συγγραφέας πολυμεσικών εφαρμογών προσαρμοσμένα στις απαιτήσεις της τάξης του), συντονιστής, βοηθός, διευκολυντικός παράγοντας στη διαδικασία παροχής πλούσιων μορφωτικών εμπειριών αλλά και κριτής της παιδαγωγικής αξίας των δραστηριοτήτων και των τεχνολογικών εργαλείων. Σε κάθε περίπτωση, ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που θα καθοδηγήσει τους μαθητές στα μονοπάτια της κριτικής σκέψης, της αξιολόγησης της πληροφορίας καθώς και στην αγάπη για τη γνώση.

Πέρα από την ατομική δραστηριότητα με Διαδίκτυο και λογισμικά, οι νέες τεχνολογίες προσφέρουν τη δυνατότητα για συνεργασία, ενώ ταυτόχρονα εισάγουν το μαθητή στη λογική των υποστηρικτικών εργαλείων (on line λεξικά/εγκυκλοπαίδειες, βάσεις δεδομένων κ.τ.λ.). Η μεν συνεργασία ενισχύεται από την ευκολία ψηφιακής επικοινωνίας και κοινής χρήσης πληροφοριών ενώ η λογική των υποστηρικτικών εργαλείων είναι το πρόσταγμα της κοινωνίας των δικτύων, τα οποία καθιστούν πανεύκολη την εύρεση της πληροφορίας. Με τη συνεργασία και τα εργαλεία η νοημοσύνη «απλώνεται» στο χώρο και τους υπόλοιπους ανθρώπους και η αξιοσύνη του ατόμου συνίσταται όχι πλέον μόνο στη μοναχική εργασία αλλά και στην δημιουργική αξιοποίηση των διαθέσιμων πηγών (ανθρώπων και εργαλείων). Ενώ οι παραδοσιακές σχολικές δραστηριότητες είναι βαρετές γιατί στερούνται νοήματος, με βάση τις νέες τεχνολογίες μπορούν να δημιουργηθούν εκπαιδευτικές δραστηριότητες που βοηθούν το μαθητή να συσχετίσει τις πληροφορίες με το αυθεντικό τους πλαίσιο, δραστηριότητες που έχουν σχέση με την πραγματικότητα και ζητούν τη λύση ενός προβλήματος με συνεργασία, αναζήτηση, καταγραφή, αξιολόγηση και αξιοποίηση πληροφοριών.

Μια τέτοια προσέγγιση εγείρει ζητήματα αξιολόγησης, καθώς έχουμε μάθει να αξιολογούμε αποκλειστικά την προσωπική επίδοση των μαθητών και όχι την ικανότητά τους να χειρίζονται εργαλεία και συνεργατικές μεθόδους για να φτάνουν στη λύση του προβλήματος που τους τέθηκε. Όλα αυτά, φυσικά, αφορούν δραστηριότητες που απαιτούν **ευελιξία σκέψης και σύνθεση των πληροφοριών και που η λύση τους δεν**

περιορίζεται σε τεχνικές αντιγραφής από συμμαθητές ή ενίσχυσης του μνημονικού και της υπολογιστικής ικανότητας με ψηφιακούς βοηθούς.
Επιπλέον, νέες προοπτικές στον εκπαιδευτικό κόσμο ανοίγει η **ευρυζωνικότητα.** Οι γρήγορες συνδέσεις εγγυώνται άμεση πρόσβαση από τη σχολική αίθουσα σε κάθε είδους πληροφορία από τον παγκόσμιο ιστό, συμπεριλαμβανομένων



Ενώ, λοιπόν, η παντοκρατορία της γλώσσας στην επικοινωνία, στην καταγραφή, δημιουργία και μετάδοση της γνώσης θεωρούνταν αδιαμφισβήτητη, οι νέες τεχνολογίες, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα ήχο, εικόνα, βίντεο, σύμβολα, γραφικά και γλώσσα, έρχονται να αλλάξουν τη σημασία του όρου κείμενο. Τα κείμενα γίνονται πολυτροπικά και οι λέξεις αποτελούν μόνο ένα τμήμα αυτών των κειμένων.

και οπτικοακουστικών εμπειριών, όπως τηλεδιασκέψεων και υψηλής ανάλυσης ζωντανών μεταδόσεων. On line περιβάλλοντα εκπαιδευτικής συνεργασίας αίρουν τις συμβάσεις του χώρου και του χρόνου για την εκπαιδευτική πράξη μεταφέροντας τη σχολική τάξη στους υπολογιστές των μαθητών. Κατάλληλα σχεδιασμένοι διαδικτυακοί χώροι (από το υπουργείο, το σχολείο ή τον ίδιο τον εκπαιδευτικό) παρέχουν στο μαθητή πρόσβαση στο εκπαιδευτικό υλικό, σε ανακοινώσεις, στις επιδόσεις ανά μάθημα αλλά και δυνατότητα επικοινωνίας με τους συμμαθητές και τον εκπαιδευτικό. Εργασίες κατατίθενται και αξιολογούνται ηλεκτρονικά. Εκπαιδευτικό και διοικητικό προσωπικό, γονείς και μαθητές αποτελούν μέλη της ίδιας διαδικτυακής κοινότητας και βρίσκονται σε συνεχή επικοινωνία. Οι γονείς ενημερώνονται για την πρόοδο των παιδιών τους με τον προσωπικό τους κωδικό και οι μαθητές παροτρύνονται να συνεργαστούν εκτός ωραρίου διδασκαλίας μέσω του διαδικτυακού εκπαιδευτικού περιβάλλοντος. Παράλληλα, ο χώρος αυτός ή άλλες ιστοσελίδες γίνονται τόπος δημοσίευσης συλλογικών ή ατομικών προσπαθειών, έκφρασης απόψεων, διαλόγου και κριτικής. Τέλος, τα on line εκπαιδευτικά πακέτα κάνουν τη γνώση ευπροσάρμοστη σε προσωπικούς ρυθμούς και προσβάσιμη στον καθένα, συμπεριλαμβανομένων και κοινωνικών ομάδων που δεν έχουν τη δυνατότητα φυσικής παρουσίας σε πραγματικές τάξεις, όπως εργαζόμενοι που δεν έχουν χρόνο, άτομα με αναπηρίες κ.ά.
Καθώς, όμως, ο κόσμος της εκπαίδευσης ζυγίζει όλες τις προαναφερθείσες ιδέες, οι νέες τεχνολογίες δημιουργούν μια επικοινωνιακή πραγματικότητα η οποία μάλλον είναι δύσκολο να αγνοηθεί. Ενώ, λοιπόν, η παντοκρατορία της γλώσσας στην επικοινωνία, στην καταγραφή, δημιουργία και μετάδοση της γνώσης θεωρούνταν αδιαμφισβήτητη, οι νέες τεχνολογίες, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα ήχο, εικόνα, βίντεο, σύμβολα, γραφικά και γλώσσα, έρχονται να αλλάξουν τη σημασία του όρου κείμενο. Τα κείμενα γίνονται πολυτροπικά και οι λέξεις αποτελούν μόνο ένα τμήμα αυτών των κειμένων. Μια ιστοσελίδα, ένα CD ROM, ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι ή και ένα διαδικτυακό μυθιστόρημα με υπερδεσμούς είναι όλα πολυτροπικά κείμενα. Πέρα από το ότι η πληροφορία μεταδίδεται με άλλους τρόπους εκτός των λέξεων, η σύνδεση μεταξύ των μερών ενός κειμένου ξεφεύγει από τη γραμμική πορεία του απλού γλωσσικού κειμένου και δημιουργεί νόημα μέσα από τη λογική των υπερδεσμών και της παρέμβασης. Αυτές οι αλλαγές καθώς και ο υβριδισμός του λόγου στο Διαδίκτυο, την τηλεόραση και τους χώρους εργασίας επιτάσσουν έναν επαναπροσδιορισμό της έννοιας του αλφαβητισμού ή καλύτερα την εισαγωγή της έννοιας του πολυ-αλφαβητισμού (multiliteracies). Η τελειοποίηση του γλωσσικού οργάνου παραμένει προτεραιότητα αλλά εμπλουτίζεται με την άσκηση στην κατανόηση και τη δημιουργία πολυτροπικών κειμένων και στην ερμηνεία του λόγου που χρησιμοποιούν τα νέα μέσα. Η διαδικασία αυτή δεν αφορά την εκμάθηση τεχνικών προγραμματισμού, σχεδιασμού ή χρήσης λογισμικών αλλά την ενασχόληση με τις τεχνικές μετάδοσης νοήματος που χρησιμοποιούν οι νέες τεχνολογίες (ένα είδος ψηφιακής σημειολογίας).
Η τεχνολογία, φυσικά, δεν είναι πανάκεια και το καλύτερο εργαλείο παιδείας θα είναι για πάντα ο καλός δάσκαλος. Ένας μαυροπίνακας, χαρτί, μολύβι και ένας καταρτισμένος εκπαιδευτικός μπορούν ακόμη να πετύχουν πολλά, ενώ η ασυδοσία στο διαδικτυακό σερφάρισμα και τα κακής ποιότητας λογισμικά μόνο παιδαγωγική αξία δεν έχουν. Τα παιδιά δεν χρειάζονται μόνο ποντίκια και πληκτρολόγια αλλά και ελεύθερο χρόνο, παιχνίδι, βιβλία, ανθρώπινη επικοινωνία ενώ σε κάθε περίπτωση η κριτική σκέψη είναι το απόλυτο εκπαιδευτικό ζητούμενο. Ο υπερβολικός ενθουσιασμός για την τεχνολογία και η τεχνοφοβία όμως είναι εξίσου επικίνδυνες προσεγγίσεις. **Ο κόσμος αλλάζει, η τεχνολογία έχει δυνατότητες και αυτές οι δυνατότητες πρέπει να φωτιστούν με έρευνα, ώστε τυχόν καινοτομίες στα σχολεία να έχουν επιστημονικό υπόβαθρο. Η συνεχής επιμόρφωση των καθηγητών είναι απαραίτητη και συγκεκριμένη πολιτική για την εκπαιδευτική τεχνολογία πρέπει να αποτυπωθεί στα αναλυτικά προγράμματα. Σε κάθε περίπτωση, απαραίτητα για οποιαδήποτε τεχνολογική καινοτομία στην εκπαίδευση είναι οι υποδομές στα σχολεία, η εξάπλωση της ευρυζωνικότητας, η καταπολέμηση του ψηφιακού χάσματος και η αύξηση της διαδικτυακής ασφάλειας. Τέλος, η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση αναγκαστικά ανοίγει και το θέμα της επανεξέτασης του τρόπου αξιολόγησης των μαθητών.**

Μπάμπης Καραγεωργίου

Η τεχνολογία, φυσικά, δεν είναι πανάκεια και το καλύτερο εργαλείο παιδείας θα είναι για πάντα ο καλός δάσκαλος. Ένας μαυροπίνακας, χαρτί, μολύβι και ένας καταρτισμένος εκπαιδευτικός μπορούν ακόμη να πετύχουν πολλά, ενώ η ασυδοσία στο διαδικτυακό σερφάρισμα και τα κακής ποιότητας λογισμικά μόνο παιδαγωγική αξία δεν έχουν.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

Στις 11 Φεβρουαρίου (Τετάρτη), στα ΛΑΪΚΑ ΠΡΟΑΣΤΙΑ θα γίνει Κοπή πίτας και θα ΤΙΜΗΘΟΥΝ οι νέοι συνταξιούχοι Μαθηματικοί του Παραρτήματος

Η εφημερίδα μας δημοσιεύεται και ηλεκτρονικά, στη διεύθυνση: http://apeironews.blogspot.com

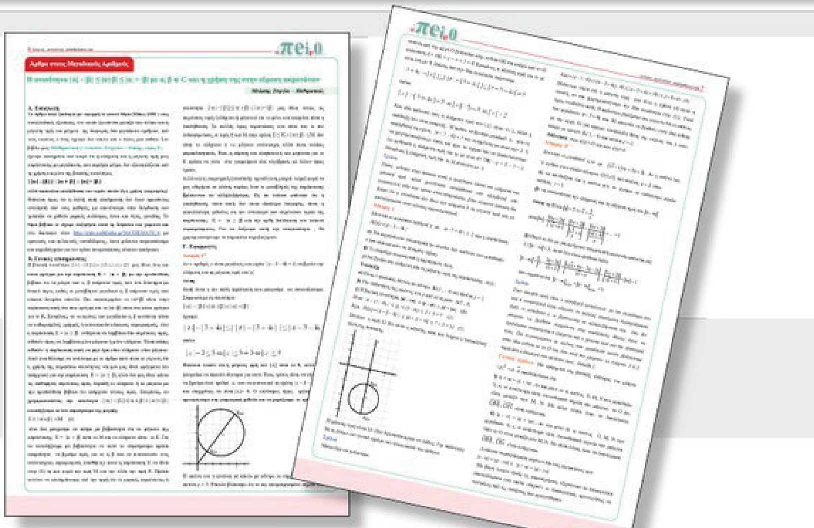
Αν είστε μαθηματικός ή μη και αγαπάτε τα μαθηματικά, έχετε τη δυνατότητα να δημοσιεύσετε το άρθρο σας στην εφημερίδα της Ε.Μ.Ε. Ροδόπης, αρκεί να το στείλετε στην ηλεκτρονική μας διεύθυνση emerodopis@gmail.com

Στις 17 Ιανουαρίου διεξήχθη ο δεύτερος διαγωνισμός της ΕΜΕ στο 2ο Λύκειο Κομοτηνής με την συμμετοχή 33 μαθητών . Η επόμενη φάση του διαγωνισμού "Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ" θα γίνει το Σάββατο 21 Φεβρουαρίου 2009. Ο διαγωνισμός θα διεξαχθεί για όλους στην Αθήνα, στο κτίριο του Νέου Χημείου, οδός Ναυαρίνου 13Α

ΕΠΙΣΤΟΛΗ ΠΡΟΣ ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΗΣ Ε.Μ.Ε. ΝΟΜΟΥ ΡΟΔΟΠΗΣ

■ του Αντώνη Κυριακόπουλου

■ με αφορμή άρθρο* του κ. Μπάμπη Στεργίου για τους Μιγαδικούς Αριθμούς



***Το άρθρο του κ. Μπάμπη Στεργίου «Η ανισότητα $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ με $\alpha, \beta \in C$ και η χρήση της στην εύρεση ακροτάτων» δημοσιεύτηκε στο άπειρο τεύχος 3, σελ. 6-7**

Αντώνης Κυριακόπουλος, Τηλ.: 2106518543-6977585013, e-mail: a_kiriak@otenet.gr

Κύριοι συνάδελφοι.

Πήρα το τρίτο φύλο της εφημερίδας σας άπειρο

Καταρχήν σας ευχαριστώ που δημοσιεύσατε την απάντησή μου στο άρθρο του κ. Πετράκη. Και πάλι όμως θα μου επιτρέψετε να κάνω μερικές παρατηρήσεις.

Στο άρθρο του κ. Στεργίου υπάρχουν ορισμένα λάθη, τα οποία πρέπει να επισημάνω για να μην αποπροσανατολιστούν οι μαθητές και περαστούν λάθος μηνύματα. Θα σας αναφέρω ένα μόνο πάνω στο οποίο στηρίζεται όλη η φιλοσοφία του άρθρου αυτού.

Γράφει λοιπόν στη σελίδα 6:

«επειδή: $||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ (1) το $|\alpha|+|\beta|$ είναι ένα άνω φράγμα και το $||\alpha|-|\beta||$ είναι ένα κάτω φράγμα για το $K=|\alpha \pm \beta|$, με την προϋπόθεση βέβαια ότι τα μέτρα των α και β παίρνουν τιμές από ένα διάστημα με θετικά άκρα, καθώς οι μεταβλητοί μιγαδικοί α και β παίρνουν τιμές από κάποια δοσμένα σύνολα».

Αν ήταν έτσι, τότε όλες οι συναντήσεις (μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών) θα ήταν άνω και κάτω φραγμένες. Για παράδειγμα, επειδή: $|z+2| \leq |z|+2$ η συνάρτηση $f(z)=|z+2|$, $z \in C$ θα ήταν άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα το $|z|+2$. Αλλά, όπως μπορούμε να δείξουμε εύκολα, ***η συνάρτηση αυτή δεν είναι άνω φραγμένη.***

Αυτά είναι σημαντικά λάθη και περνούν λανθασμένα μηνύματα στους μαθητές, γιατί **τα φράγματα δεν περιέχουν μεταβλητές. Δεν είναι συναρτήσεις, αλλά πραγματικοί αριθμοί.** Εδώ, όπως μας λέει ο συντάκτης, τα α και β είναι μεταβλητές που παίρνουν τιμές από κάποια δοσμένα σύνολα (υποσύνολα του C) και επομένως το $|\alpha|+|\beta|$ όπως και το $||\alpha|-|\beta||$ δεν μπορούν να είναι φράγματα.

Υστερόγραφο

Επικοινώνησα με το συντάκτη του άρθρου αυτού για τους Μιγαδικούς Αριθμούς, τον κ. Μπάμπη Στεργίου, και μου έστειλε την παρακάτω απάντηση, με τη σημείωση να σας την αποστείλω, αν δεν έχω αντίρρηση:

«Κύριε Κυριακόπουλε.

Ευχαριστώ για τη διόρθωση αυτή, η οποία είναι απολύτως σωστή, κατανοητή και επιβεβλημένο να αποσαφηνισθεί.

Δυστυχώς, έχοντας στο νου μου ότι το σύνολο τιμών της παράστασης $K = |\alpha \pm \beta|$ είναι φραγμένο άνω από κάποιο θετικό αριθμό Μ και κάτω από το 0 (αυτό προκύπτει πολύ εύκολα), με τους περιορισμούς φυσικά που ανέφερα για τα μέτρα των α, β, έγραψα ως φράγμα για την παράσταση Κ το $|\alpha| + |\beta|$, το οποίο γενικά δεν είναι σωστό, και όχι το Μ, όπως θα έπρεπε. Επειδή μας ενδιαφέρει η γενικότητα και όχι οι ειδικές περιπτώσεις (π.χ. αν οι α, β έχουν σταθερά μέτρα, τότε το $M= |\alpha|+|\beta|$ είναι φράγμα, διότι - όπως και σεις σημειώνετε - δεν εξαρτάται από τα α, β), η έκφρασή μου πράγματι ήταν άστοχη. Εκείνο που ήθελα να τονίσω είναι αυτό που γράφω παρακάτω και είναι τα εξής:

Αν χρησιμοποιώντας την ανισότητα $||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα της μορφής $E \leq |\alpha \pm \beta| \leq M$ (1), τότε δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι το μέγιστο της παράστασης $K = |\alpha \pm \beta|$ είναι το Μ και το ελάχιστο είναι το Ε. Εδώ βέβαια θα έπρεπε να τονίσω ότι τα Ε, Μ είναι σταθεροί αριθμοί, ανεξάρτητοι των α και β.

Για το λόγο αυτό θα αποστείλω στο περιοδικό την επαναδιατύπωση «εις το ορθόν» των επίμαχων σημείων, έχοντας κατά νου τη διόρθωση που μου επισημάνατε.

Κύριε Κυριακόπουλε, γνωρίζοντας ότι με κάθε σας παρατήρηση, υπόδειξη ή κριτική υπηρετείτε με ευλάβεια την μαθηματική αλήθεια και συμβάλετε έτσι στην ορθή διδασκαλία των μαθηματικών, πάντα με ειλικρίνεια και ευθύτητα, σας ευχαριστώ για τις επισημάνσεις σας.

Με τιμή - Μπάμπης Στεργίου»

Όπως βλέπετε, σας στέλνω και την επιστολή - απάντηση του συντάκτη, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι συμφωνώ με όλα όσα γράφει, και παρακαλώ να φιλοξενήσετε την παρέμβασή μου αυτή στις στήλες της εφημερίδας σας.

Με τιμή
Αντώνης Κυριακόπουλος
Αθήνα, 10-11-2008

Σημείωση από τη συντακτική επιτροπή

1. Σχετικά με το άρθρο του Μπάμπη Στεργίου έχουμε να τονίσουμε τα εξής: Όπως και ο συντάκτης αναφέρει, ο προβληματισμός αναπτύχθηκε στο http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA. Εκεί σημειώθηκαν από τους ομιλητές ορισμένες... παθογενείς περιπτώσεις που έχουν ταλαιπωρήσει κατά το παρελθόν μαθητές αλλά και συναδέλφους.

   Πιστεύουμε ότι με το άρθρο αυτό (το οποίο αποτελεί μέρος ενός μεγαλύτερου κειμένου) διαφωτίστηκαν σημαντικά οι περιπτώσεις αυτές. Ως εκ τούτου η δημοσίευση του κειμένου από το άπειρο είναι νομίζουμε θετική για τους αναγνώστες μας. Για τη διόρθωση που επισήμανε ο κύριος Κυριακόπουλος αρκούμαστε στο διάλογο που είχε με το συντάκτη. Θωρούμε ωστόσο υπερβολική τη θέση ότι από τη συγκεκριμένη διατύπωση μπορεί να αποπροσανατολιστεί ο μαθητής ή κάποιος άλλος, αφού αυτή η διατύπωση καμία εμπλοκή δεν έχει με το όλο ζήτημα που μελετάται στο άρθρο αυτό.

   Ευχαριστούμε λοιπόν και τον επιστολογράφο και το συντάκτη του άρθρου, αφού με την αμοιβαία και φιλική επικοινωνία διευκολύνουν και τη θέση της συντακτικής επιτροπής.

2. Το άρθρο του **κ. Πετράκη** με τίτλο **«Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων, αν υπάρχουν, βρίσκονται ΜΟΝΟ πάνω στην ευθεία y=x»** και τις απαντήσεις που δόθηκαν από τους **κ.κ Κυριακόπουλο** και **Φωτιάδη** τα φιλοξενήσαμε, ώστε να δοθεί ευκαιρία να συζητηθεί το θέμα χωρίς διαπληκτισμούς και επίθετα. Ό,τι γράφτηκε είναι απόψεις των συγγραφέων και αν έγινε κάποια υπέρβαση εμείς, από την μεριά μας, ζητούμε ΣΥΓΝΩΜΗ.
   Σ' αυτό το πνεύμα, την απάντηση που πήραμε από τον **κ. Πετράκη** και άρθρο από τον **Δρ. Παναγιώτη Θεοδωρόπουλο,** Σχολικό Σύμβουλο ΠΕ03, θα τις δημοσιεύσουμε μόνο στο http://apeironews.blogspot.com/ με την ευχή, αν χρειαστεί, η περαιτέρω συζήτηση να γίνει σε άλλα επιστημονικά fora.

Τέλειοι αριθμοί και αριθμοί του Mersenne

Τέλειος, ονομάζεται ο αριθμός του οποίου το άθροισμα των (γνήσιων) διαιρετών του, ισούται με τον ίδιο τον αριθμό. Για παράδειγμα οι αριθμοί 6 και 28 είναι τέλειοι, αφού 6=1+2+3 και 28=1+2+4+7+14.

Ο **Ευκλείδης** στα στοιχεία του, έδειξε ότι ο αριθμός $2^{n-1}(2^n-1)$ είναι άρτιος τέλειος, όταν ο 2^n-1 είναι πρώτος. Αυτός είναι και ο λόγος που μας ενδιαφέρουν πρώτοι της μορφής 2^n-1.

Οι πρώτοι αυτής της μορφής ονομάζονται **πρώτοι του Mersenne**, λόγω του μοναχού Mersenne, του 17ου αιώνα, που μελέτησε τους συγκεκριμένους αριθμούς. Ο **Euler** απέδειξε ότι ο τύπος $2^{n-1}(2^n-1)$ δίνει **όλους** τους **άρτιους** τέλειους αριθμούς. Συνεπώς υπάρχει μία 1 - 1 αντιστοιχία μεταξύ των άρτιων τέλειων αριθμών και των πρώτων του Mersenne.

Μάλιστα, εάν ο 2^n-1 είναι πρώτος, τότε και ο n είναι πρώτος [6], γι' αυτό τους πρώτους του Mersenne, τους συμβολίζουμε συνήθως με $M_p=2^p-1$, όπου p πρώτος.

Ο τελευταίος αριθμός του Mersenne που ανακαλύφθηκε χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή ήταν ο $M_{127}=2^{127}-1$, 39 ψηφίων, από το Γάλλο **E. Lucas** το 1876.

Το **GIMPS** (**G**reat **I**nternet **M**ersenne **P**rime **S**earch) ξεκίνησε τη λειτουργία του τον Ιανουάριο του 1996 και ασχολείται με την εύρεση πρώτων του Mersenne (άρα και άρτιων τέλειων αριθμών). Το συγκεκριμένο project μοιράζει τη «δουλειά» της αναζήτησης νέων πρώτων του Mersenne σε πολλούς χρήστες που είναι συνδεδεμένοι σε ένα κεντρικό εξυπηρετητή (server) και έτσι συνολικά έχουμε τεράστια ισχύ επεξεργασίας. Μπορεί ο οποιοσδήποτε να συμμετάσχει στο συγκεκριμένο project, αφού η διαδικασία είναι πολύ απλή. Απλά, κατεβάζει το πρόγραμμα που υπάρχει στην ιστοσελίδα [4] (από την μπάρα αριστερά που λέει "Download") και απλά συνδέεται στον server. Την ώρα που είναι συνδεδεμένος εκεί, το πρόγραμμα χρησιμοποιεί το 50% του επεξεργαστή του χρήστη (μπορείτε να ανεβάσετε ή να κατεβάσετε το ποσοστό αυτό) οπότε μπορεί να παρατηρήσετε το μηχάνημά σας να αργεί λιγάκι. Όταν δεν είστε μπροστά στον υπολογιστή και απλά τον έχετε ανοικτό μπορείτε να ανεβάσετε το ποσοστό και να το κατεβάσετε (ή να το κλείσετε) εάν εργάζεστε).

Υπάρχει πλήθος θεωρημάτων που ασχολείται με τους άρτιους τέλειους και τους πρώτους του Mersenne και αυτές είναι και στην ουσία οι εντολές που εκτελεί το συγκεκριμένο πρόγραμμα. Για παράδειγμα, το ψάξιμο για πρώτους του Mersenne περιορίζεται σε πρώτους εκθέτες και μόνο λόγω της πρότασης που αναφέραμε παραπάνω. Μπορείτε να δείτε κι άλλες προτάσεις που λαμβάνονται υπόψη στην αναζήτηση πρώτων του Mersenne στην ιστοσελίδα [5]. Συνήθως, το **GIMPS** (ανάλογα με τις επιλογές που θα του δώσουμε), επιλέγει ένα πρώτο αριθμό p (συνήθως μεγαλύτερο από τα 10.000.000 ψηφία) και προσπαθεί να πιστοποιήσει εάν ο M_p είναι πρώτος, δουλεύοντας με το test των **Lucas - Lehmer,** που είναι και το γρηγορότερο στους υπολογισμούς.

ψηφία και γι' αυτό το λόγο κέρδισε έπαθλο 100.000 δολλαρίων που είχε προκηρυχθεί από την Electronic Frontier Foundation.

Έτσι, έχουμε και τον **46ο άρτιο τέλειο αριθμό,** ο οποίος είναι ο:

$P_{43.112.609}=2^{43.112.608}(2^{43.112.609}-1)$, μόλις **25.956.377 ψηφίων.**

Κατά τη γνώμη του γράφοντος, θα πρέπει να διορθωθεί στο ορθό, το βιβλίο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου, το οποίο στη σελίδα 146 (Έκδοση 2006) αναφέρει: «Μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί 36 τέλειοι αριθμοί» (Ο 36ος ανακαλύφθηκε το 1997 από το GIMPS, περίοδος συγγραφής του βιβλίου)

Είναι **ανοικτό πρόβλημα η ύπαρξη περιττών τέλειων αριθμών,** παρόλο που υπάρχει πλήθος θεωρημάτων που αναφέρουν ιδιότητες που θα πρέπει να έχει κάποιος τέλειος περιττός αριθμός, εάν φυσικά υπάρχει. Για παράδειγμα, έχει αποδειχθεί ότι αν υπάρχει περιττός τέλειος, τότε θα έχει τουλάχιστον 300 ψηφία (Brent et al. - 1991). Επίσης, θα πρέπει να έχει τουλάχιστον 9 διακεκριμένους πρώτους παράγοντες στην ανάλυσή του σε πρώτους (Nielsen - 2006) και τουλάχιστον 75 συνολικά, όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένους (Hare - 2005).

Μία πολύ ενδιαφέρουσα εικασία που λύνει το πρόβλημα των περιττών τέλειων αριθμών (σε περίπτωση που δεν υπάρχουν) είναι η εικασία του **Ore**:

Έστω η συνάρτηση $H:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+$ με $H_{(n)}=\dfrac{\sigma_0(n)}{\sum_{d|n} 1/d}$

όπου $\sigma_0(n)$ είναι το άθροισμα των διαιρετών του αριθμού n. Η συνάρτηση $H_{(n)}$ είναι γνωστή ως **αρμονικός μέσος των διαιρετών του n.** Οι πρώτες τιμές της συνάρτησης $H_{(n)}$ είναι 1, 4/3, 3/2, 12/7, 5/3, 2, 7/4, 32/15, 27/13, 20/9,... Παρατηρήστε ότι όταν ο αριθμός n είναι τέλειος, τότε ο $H_{(n)}$ είναι ακέραιος (αυτή η πρόταση ισχύει πάντα και έχει αποδειχθεί). Ο Ore διατύπωσε την εικασία ότι αν ο αριθμός n είναι περιττός, τότε ο $H_{(n)}$ δεν είναι ακέραιος, σύμφωνα με την οποία (εάν αποδειχθεί) **δεν υπάρχουν περιττοί τέλειοι αριθμοί.**

Τελειώνοντας, παραθέτω μερικές ενδιαφέρουσες ιστοσελίδες για τους τέλειους αριθμούς και τους αριθμούς του Mersenne:

[1] ***Τέλειοι Αριθμοί:*** http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html

[2] ***Περιττοί τέλειοι:*** http://mathworld.wolfram.com/OddPerfectNumber.html

[3] ***Γνωστοί (έως σήμερα) πρώτοι του Mersenne μαζί με εκείνους που τους ανακάλυψαν:*** http://primes.utm.edu/mersenne/index.html#known

[4] ***GIMPS:*** http://www.mersenne.org

$$P_{43.112.609}=2^{43.112.608}(2^{43.112.609}-1)$$

Test των Lucas - Lehmer: Θεωρούμε την ακολουθία $\alpha_0=4$ και την αναδρομική σχέση $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1}^2-2 \pmod{M_p}$. Αποδεικνύεται ότι ο M_p είναι πρώτος, αν και μόνο αν $\alpha_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}$. Σε κάθε περίπτωση, το $\alpha_{p-2} \pmod{M_p}$ ονομάζεται υπόλοιπο Lucas – Lehmer για τον αριθμό p.

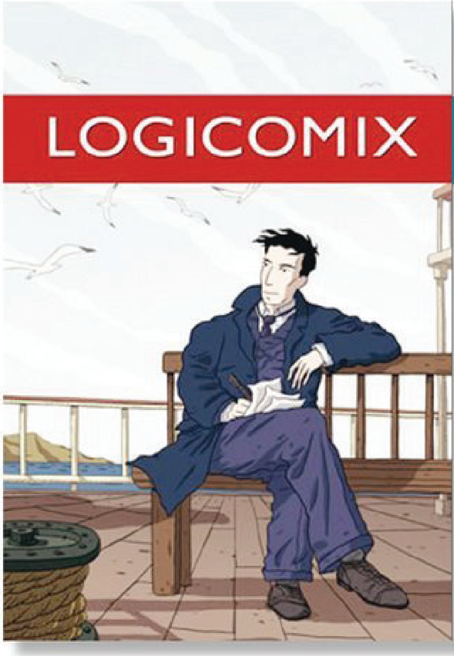
Για παράδειγμα η ακολουθία που παίρνουμε για p=7 είναι η 4, 14, 67, 42, 111, 0, άρα ο M_7 είναι πρώτος.

Πρόσφατα **(15 Σεπτεμβρίου 2008)**, ανακαλύφθηκε ο **46ος αριθμός του Mersenne** από ένα υπολογιστή του UCLA στον οποίο είχε εγκαταστήσει το GIMPS ο **Edson Smith,** ο οποίος είναι ο $M_{43.112.609}=2^{43.112.609}-1$, ένας γίγαντας **12.978.189 ψηφίων.** Μάλιστα είναι ο πρώτος αριθμός του Mersenne που ξεπέρασε τα 10.000.000

[5] ***Μερικά θεωρήματα για πρώτους του Mersenne και τέλειους αριθμούς:*** http://primes.utm.edu/mersenne/index.html#theorems

[6] ***Εάν ο 2^n - 1 είναι πρώτος τότε και ο n είναι πρώτος (Απόδειξη):*** http://primes.utm.edu/notes/proofs/Theorem2.html

Αλέξανδρος Συγκελάκης
Μαθηματικός - MSc
asygelakis@gmail.com
http://www.math.uoc.gr/~ags



Βιβλία για Όλους

Το νέο βιβλίο του Απόστολου Δοξιάδη και του Χρίστου Χ. Παπαδημητρίου με σχέδια του Αλέκου Παπαδάτου και χρώμα της Annie Di Donna κυκλοφόρησε πρόσφατα από τις εκδόσεις Ίκαρος

Τι είναι;
Το **"Logicomix"** είναι ένα μυθιστόρημα σε μορφή κόμικ. Καινοτομεί με την ιδέα και αναδεικνύει τις αλλαγές που έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια στο χώρο του κόμικ, δεν περιέχει υπερήρωες, ασχολείται με σοβαρή θεματολογία και διαθέτει μακριά φόρμα. Πρόκειται δηλαδή για ένα graphic novel (παρόλο που οι "κομικάδες" δεν δέχονται τον όρο). Του χρόνου τέτοια εποχή θα έχει κυκλοφορήσει στην Αγγλία και στην Αμερική από τις εκδόσεις Bloomsbury.

Ποια είναι η πλοκή;
Υπάρχουν δύο παράλληλες ιστορίες που διαδραματίζονται. Η μία ξεκινάει με πρωταγωνιστή το φιλόσοφο και μαθηματικό Μπέρτραντ Ράσελ. Με βάση τη δική του ζωή ξεκινάει μια πνευματική περιπέτεια. Εφαλτήριο η διάλεξη που έδωσε με θέμα το ρόλο της λογικής τον Σεπτέμβριο του 1939. Πρόκειται για την ιστορία της αναζήτησης των Θεμελίων μέσα από τις συναισθηματικές καταιγίδες, τα ιστορικά γεγονότα και τις ιδεολογικές διαμάχες που την έθρεψαν. Δίπλα του ζωντανεύουν διανοητές όπως οι Βιτγκενστάιν, Κάντορ, Τούρινγκ, Πουανκαρέ, Φρέγκε και Γκέντελ, και όλοι μαζί οδηγούνται στην πιο δραματική στιγμή της ιστορίας του 20ού αιώνα. Η δεύτερη ιστορία λαμβάνει μέρος στη σύγχρονη Αθήνα, οι δημιουργοί του βιβλίου είναι και αυτοί πρωταγωνιστές και προσπαθούν να καταλάβουν και ν' αφηγηθούν την περιπέτεια της αναζήτησης των Θεμελίων των Μαθηματικών.

Τι είπαν;
Χρειάστηκαν 5 χρόνια δουλειάς για να ολοκληρωθεί το "Logicomix", ο Απόστολος Δοξιάδης έγραψε το σενάριο και το σκηνοθέτησε, ενώ ο Αλέκος Παπαδάτος σκιτσάρισε τους χαρακτήρες, ασχολήθηκε δηλαδή με την ηθοποιία και με τη μικροδομή. Ο πρώτος λέει σε σχέση με το στόρι ότι «δεν έγινε συμβιβασμός, ούτε παραποιήθηκε κάτι σε σχέση με τα μαθηματικά». Αντιπαθεί τον όρο εκλαϊκευμένη γνώση γιατί αφαιρεί μαγεία και η μαγεία βρίσκεται πολλές φορές στο πρόβλημα, στο μυστήριο της δυσκολίας.
Ο Αλέκος Παπαδάτος βρέθηκε αντιμέτωπος με τη μοναξιά που έχει η δουλειά του σκιτσογράφου, υπομονετικά και για ατελείωτες ώρες έκανε ασκήσεις νεύρων με τις πρώτες «πατάτες», δηλαδή με τα πρώτα σκίτσα που γίνονται με μολύβι στο χέρι. Του ήταν αδύνατον να σκιτσογραφήσει μερικές σκηνές, επειδή ταυτίστηκε με την ιστορία
Η εσωτερική διαμάχη μεταξύ του Απ. Δοξιάδη και του Χρ. Παπαδημητρίου είναι ενδεικτική για το νόημα της Αναζήτησης των θεμελίων των μαθηματικών.
Σύμφωνα με τον Παπαδημητρίου η ιστορία οδηγεί στη γέννηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, άρα το κόμικ πρέπει να εξηγεί τις ιδέες. Ο Δοξιάδης πιστεύει ότι αυτό που προέχει για το νόημα της ιστορίας είναι τα ανθρώπινα πάθη, οι ιδέες έπονται.

http://apeironews.blogspot.com

Η εφημερίδα μας δημοσιεύεται και ηλεκτρονικά!