Εικοσιδωδεκάεδρον

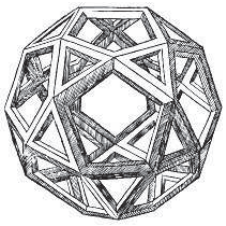
Μαθηματικό Δελτίο

Τεύχος 13ο
Οκτώβριος 2014

www.mathematica.gr

ISSN: 2241-7133

Το «**Εικοσιδωδεκάεδρον**» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr.
Η επιλογή και η φροντίδα του περιεχομένου γίνεται από τους Επιμελητές του mathematica.gr.
Μετατροπές σε LaTeX-Σχήματα-Σελιδοποίηση: *Συντακτική Επιτροπή*, **Εξώφυλλο**: *Γρηγόρης Κωστάκος*. Στοιχειοθετείται με το LaTeX.
Μπορεί να αναπαραχθεί και να διανεμηθεί ελεύθερα.
ISSN: 2241-7133



Εικοσιδωδεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιονεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

Πηγή:http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση: Πάνος Γιαννόπουλος

Ο δικτυακός τόπος mathematica.gr ανήκει και διευθύνεται σύμφωνα με τον κανονισμό του που υπάρχει στην αρχική του σελίδα (http://www.mathematica.gr) από ομάδα Διευθυνόντων Μελών.

Διευθύνοντα Μέλη του mathematica.gr

Συντονιστες
• Αιρετά Μέλη

1. Φωτεινή Καλδή (Φωτεινή) Γενική Συντονίστρια
2. Θάνος Μάγκος (matha) Γενικός Συντονιστής
3. Νίκος Μαυρογιάννης (nsmavrogiannis) Γενικός Συντονιστής
4. Χρήστος Κυριαζής (chris_gatos) Υπεύθυνος Προγραμματισμού
5. Μιχάλης Λάμπρου (Mihalis_Lambrou) Υπεύθυνος Επικοινωνίας και Ενημέρωσης
6. Μίλτος Παπαγρηγοράκης (m.papagrigorakis) Υπεύθυνος Οικονομικών
7. Δημήτρης Χριστοφίδης (Demetres) Υπεύθυνος Εκδόσεων

• Μόνιμα Μέλη

1. Γρηγόρης Κωστάκος (grigkost) Διαχειριστής
2. Αλέξανδρος Συγκελάκης (cretanman) Διαχειριστής

Συντακτικη Επιτροπη

1. Στράτης Αντωνέας (stranton)
2. Κωνσταντίνος Βήττας (vittasko)
3. Φωτεινή Καλδή (Φωτεινή)
4. Σπύρος Καπελλίδης (s.kap)
5. Αναστάσιος Κοτρώνης (Κοτρώνης Αναστάσιος)
6. Στάθης Κούτρας (ΣΤΑΘΗΣ ΚΟΥΤΡΑΣ)
7. Χρήστος Κυριαζής (chris_gatos)
8. Γρηγόρης Κωστάκος (grigkost)
9. Βαγγέλης Μουρούκος (emouroukos)
10. Μιχάλης Νάννος (Μιχάλης Νάννος)
11. Μίλτος Παπαγρηγοράκης (m.papagrigorakis)
12. Λευτέρης Πρωτοτοπαπάς (Πρωτοπαπάς Λευτέρης)
13. Αλέξανδρος Συγκελάκης (cretanman)
14. Αχιλλέας Συνεφακόπουλος (achilleas)
15. Χρήστος Τσιφάκης (xr.tsif)
16. Σωτήρης Χασάπης (polysot)

Επιμελητες

1. Στράτης Αντωνέας (stranton)
2. Ανδρέας Βαρβεράκης (ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΑΡΒΕΡΑΚΗΣ)
3. Σπύρος Βασιλόπουλος (spyros)
4. Κωνσταντίνος Βήττας (vittasko)
5. Δημήτρης Ιωάννου (ΔΗΜΗΤΡΗΣ)
6. Βασίλης Κακαβάς (KAKABASBASILEIOS)
7. Γιώργης Καλαθάκης (exdx)
8. Σπύρος Καπελλίδης (s.kap)
9. Σπύρος Καρδαμίτσης (Καρδαμίτσης Σπύρος)

10. Νίκος Κατσίπης (nkatsipis)
11. Αναστάσιος Κοτρώνης (Κοτρώνης Αναστάσιος)
12. Στάθης Κούτρας (ΣΤΑΘΗΣ ΚΟΥΤΡΑΣ)
13. Παύλος Μαραγκουδάκης (Παύλος Μαραγκουδάκης)
14. Βαγγέλης Μουρούκος (emouroukos)
15. Γιώργος Μπαλόγλου (gbaloglou)
16. Ροδόλφος Μπόρης (R BORIS)
17. Μιχάλης Νάννος (Μιχάλης Νάννος)
18. Λευτέρης Πρωτοπαπάς (Πρωτοπαπάς Λευτέρης)
19. Γιώργος Ρίζος (Γιώργος Ρίζος)
20. Δημήτρης Σκουτέρης (dement)
21. Μπάμπης Στεργίου (Μπάμπης Στεργίου)
22. Σωτήρης Στόγιας (swsto)
23. Αχιλλέας Συνεφακόπουλος (achilleas)
24. Κωνσταντίνος Τηλέγραφος (Τηλέγραφος Κώστας)
25. Σεραφείμ Τσιπέλης (Σεραφείμ)
26. Χρήστος Τσιφάκης (xr.tsif)
27. Σωτήρης Χασάπης (polysot)

Μελη

1. Χρήστος Καρδάσης (ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΡΔΑΣΗΣ)
2. Θανάσης Μπεληγιάννης (mathfinder)
3. Θωμάς Ραϊκόφτσαλης (Θωμάς Ραϊκόφτσαλης)
4. Κωνσταντίνος Ρεκούμης (rek2)
5. Γιώργος Ροδόπουλος (hsiodos)
6. Βασίλης Στεφανίδης (bilstef)

Οι Ασκήσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Σωτήρης Χασάπης) Ο Γιάννης έχει κάμποσα βάζα με σοκολατάκια από τα οποία κανένα δεν είναι άδειο. Οι κανόνες ενός παιχνιδιού με τον πατέρα του, του επιτρέπουν είτε να διπλασιάσει το περιεχόμενο ενός βάζου, είτε να φάει ένα σοκολατάκι από κάθε βάζο.*

(α) Μπορεί πάντα ο Γιάννης να αδειάσει όλα τα βάζα με αυτούς τους κανόνες;

(β) Αν αντί να διπλασιάζει το περιεχόμενο ενός βάζου το τριπλασιάζει, τότε μπορεί πάντα να αδειάσει όλα τα βάζα;

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο KARKAR) Βρείτε τους θετικούς ακεραίους a, b, ώστε να ισχύει*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{9}.$$

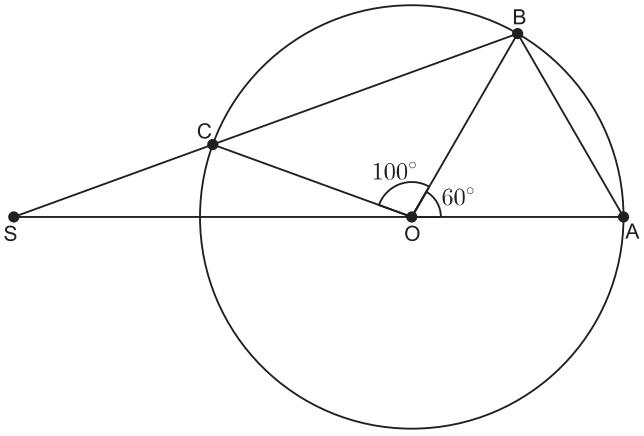
Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες ενός συμβατικού ρολογιού στις 11 παρά 20 το βράδυ;*

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο PetranOmayromixalis) Όλα μου τα στιλό εκτός από 3 είναι μπλε, όλα μου τα στιλό εκτός από 4 είναι κόκκινα, όλα μου τα στιλό εκτός από 5 είναι μαύρα. Πόσα στιλό έχω;*

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

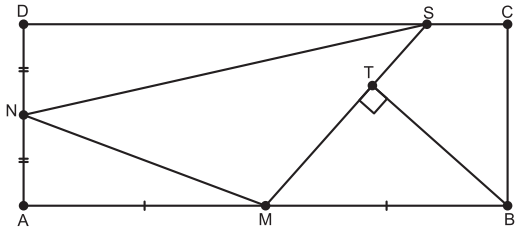
ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο KARKAR) Δείξτε ότι τα τμήματα AB, CS στο πιο κάτω σχήμα είναι ίσα μεταξύ τους.*



ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο KARKAR) Το ορθογώνιο $ABCD$ του σχήματος έχει διαστάσεις 8×3 και τα M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB, AD.*

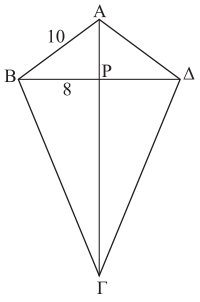
(α) Βρείτε σημείο S της πλευράς DC , ώστε το εμβαδόν του SMN να ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του $ABCD$.

(β) Στη συνέχεια δείξτε ότι η απόσταση BT της κορυφής B από την ευθεία MS , είναι μικρότερη από 3.



Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Χρήστος Δεμιρτζόγλου) Στο παρακάτω τετράπλευρο ισχύει* $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Delta}$, $\mathrm{B\Gamma}=\Gamma\Delta$ *και* $\Gamma\Delta=\Gamma\mathrm{P}+2$. *Να βρεθεί το εμβαδό του* $(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$



ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο vzf) Σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές a, b, υποτείνουσα c, και $m>2$, να αποδείξετε ότι $a^m+b^m<c^m$.*

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο qwerty) Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:*

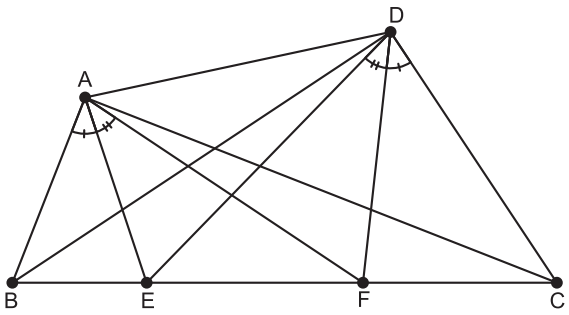
$$A=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης) Να λυθεί η εξίσωση*

$$(3x-1)(4x-1)(6x-1)(12x-1)=5.$$

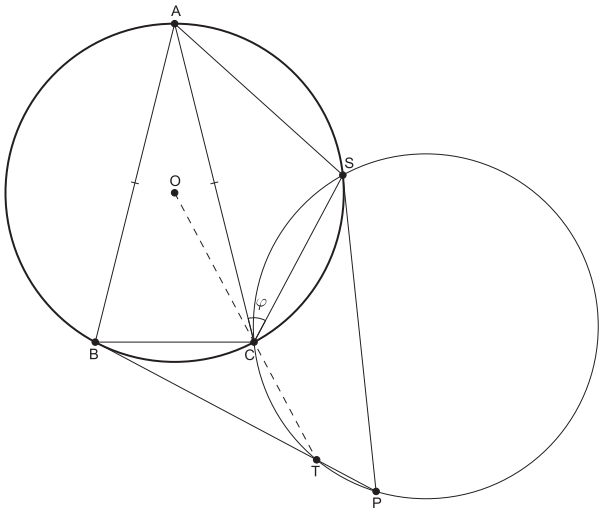
Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο Γιώργος Βισβίκης)*



Στην πλευρά BC ενός τετραπλεύρου $ABCD$ υπάρχουν δύο σημεία E, F, τέτοια ώστε: $B\hat{A}E = C\hat{D}F$ και $E\hat{A}F = E\hat{D}F$. Αποδείξτε ότι $F\hat{A}C = E\hat{D}B$.

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης)*



Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ABC(AB = AC)$. Γράφουμε τον περιγεγραμμένο του κύκλο (O) κέντρου O. Θεωρούμε σημείο S του κύκλου με τα O, S εκατέρωθεν της AC. Οι εφαπτόμενες του κύκλου (O) στα B, S τέμνονται στο σημείο P. Γράφουμε και τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία C, S, P, ο οποίος τέμνει την ευθεία BP στο T (με P διαφορετικό από το T).

(α) Πως πρέπει να επιλέξουμε το S ώστε τα σημεία O, C, T να ανήκουν στην ίδια ευθεία;

(β) Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του πρώτου ερωτήματος και επί πλέον η γωνία $\varphi = A\widehat{C}S = 42^0$, να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ABC και του τετράπλευρου $CTPS$.

Μαθηματικά Β΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{cases} 2x^2 + xy &= 1 \\ \frac{9x^2}{2(1-x)^4} &= 1 + \frac{3xy}{2(1-x)^2} \end{cases}$$

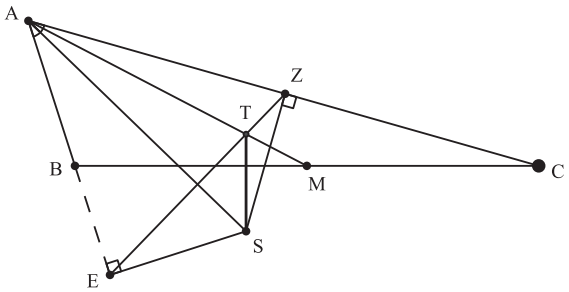
ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο Αποστόλης Τιντινίδης)*

α) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ το σύστημα: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^4 + y^4 = 82 \end{cases}$

β) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $\sqrt[4]{41 - x} + \sqrt[4]{41 + x} = 4$

Μαθηματικά Β΄ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης)*



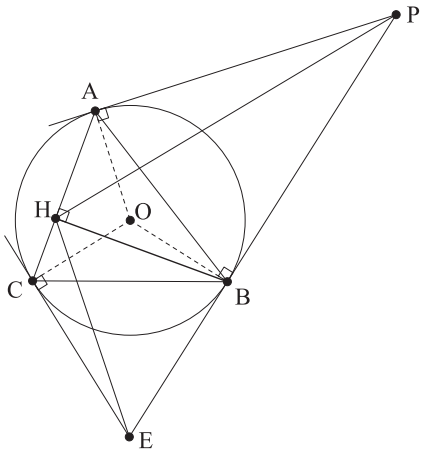
Έστω τρίγωνο $\triangle ABC$ και M το μέσο του BC. Από τυχαίο σημείο S της ευθείας της διχοτόμου της γωνίας του $\angle A$, φέρνουμε προς τις πλευρές AB, AC, ή τις προεκτάσεις αυτών, $SE \perp AB$ και $SZ \perp AC$. Αν T είναι το σημείο τομής της ευθείας AM με την EZ, να αποδειχθεί ότι: $TS \perp BC$.

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο Γιώργος Μήτσιος)*

Στο σχήμα που ακολουθεί:

- *Οι PA, PBE και EC εφάπτονται στα σημεία A, B, C του περιγεγραμμένου κύκλου του (οξυγωνίου) τριγώνου $\triangle ABC$ αντίστοιχα.*
- *Είναι $BH \perp AC$.*

Να δειχθεί ότι η HB είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle PHE$,



Μαθηματικά Β΄ Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο Αποστόλης Κουρδουκλάς) Έστω η εξίσωση*

$$x^2 - 2\lambda x - y^2 - 4\lambda y - 3\lambda^2 = 0 \ \ (Q_\lambda).$$

(α) Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο κάθετες ευθείες μεταξύ τους $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των ευθειών για τις διάφορες τιμές του λ.

(γ) Αν μια ευθεία της οικογένειας (Q_λ) *με θετικό συντελεστή διέρχεται από το σημείο* $(-3, 0)$ *να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή* λ_0 *της μεταβλητής* λ. *Δείξτε ότι για την ανωτέρω τιμή* λ_0 *οι ευθείες της οικογένειας* Q_{λ_0} *είναι συμμετρικές ως προς την* $x = -1$.

(δ) Ας ονομάσουμε στη συνέχεια τις δύο αυτές ευθείες της οικογένειας Q_{λ_0} *με* ε_1 *-την ευθεία που έχει θετικό συντελεστή διεύθυνσης- και* ε_2 *-την ευθεία η οποία έχει αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης. Να βρεθούν οι παράλληλες ευθείες στις* ε_1, ε_2 *που βρίσκονται σε απόσταση* $3\sqrt{2}$ *από αυτές.*

(ε) Έστω (δ_1) *η παράλληλη στην* ε_1 *που δεν διέρχεται από το 2ο τεταρτημόριο και* δ_2 *αυτή που είναι παράλληλη στην* ε_2 *και διέρχεται από το 1ο τεταρτημόριο. Οι ευθείες* ε_1, ε_2, δ_1, δ_2 *προφανώς τέμνονται ανά δύο. Τι είδος παραλληλόγραμμο σχηματίζουν·*

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Χρήστος Ευαγγελινός) Έστω* $A(1,1)$, $B(2,5)$ *δύο κορυφές του τριγώνου* $AB\Gamma$ *και* $I(2,2)$ *το έγκεντρό του. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής* Γ.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο parmenides51) Έστω η συνάρτηση* $f(x) = e^{-x}$ *με* $x \geq 0$ *και ο δειγματικός χώρος* Ω.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ *μπορεί να είναι πιθανότητα ενός ενδεχομένου* A *του* Ω *δηλαδή να ισχύει*

$$P(A) = f(x) = e^{-x}$$

για $x \geq 0$.

(β) Με δεδομένο το ερώτημα (α) να αποδείξετε ότι ο χώρος Ω *αποτελείται από μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.*

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Αντώνης Κυριακόπουλος) Έστω* δ *η διάμεσος* ν *το πλήθος παρατηρήσεων:* $x_1, x_2, ..., x_\nu (\nu \geq 2)$. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:*

$$f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + ... + |x - x_\nu|$$

με $x = \delta$ *λαμβάνει ελάχιστη τιμή.*

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς) Αν για τον μιγαδικό* z *γνωρίζουμε ότι η εικόνα του είναι σημείο κύκλου κέντρου* $K(0,\ 1)$ *και ακτίνας* 2, *να βρεθεί η μέγιστη τιμή του*

$$|z^2 - (2z + 1)i + z - 5|.$$

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Βασίλης Ευαγγέλου) Δίνεται μιγαδικός αριθμός* z *για τον οποίο ισχύει*

$$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0.$$

Να αποδειχθεί ότι:

(α) $|z| = 1$.

(β) $\left(\dfrac{2z - zi - 2i + 1}{1 + zi}\right)^2 \leq 0$.

(γ) $Re(z) = \dfrac{|z+1|^2 - 2}{2}$.

(δ) $|z^2 - 3z + 1| = 5 - |z + 1|^2$.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις με τύπους:*

$$f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

και

$$g(x) = x^2 - 2x + 4\,.$$

Να ορίσετε και στη συνέχεια να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις $f \circ g$ *καθώς και τη* $g \circ f$.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Λάμπρος Μπαλός) Για* $x > 0$ *και για τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση* f *είναι*

$$f(e^{f(x)}) = \ln x.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *για την οποία ισχύουν τα εξής:* $f'(x) = e^{x+f(-x)},\ \forall x \in \mathbb{R}$ *και* $f(0) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Κώστας Ζερβός) Έστω η παραγωγίσιμη γνησίως αύξουσα και κυρτή συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. *Αν η* C_f *έχει ασύμπτωτη στο* $+\infty$ *την ευθεία* $y = \lambda x + \beta$:

(α) Να αποδειχτεί ότι $\lambda > 0$.

(β) Να βρεθεί (αν υπάρχει) η ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ *στο* $+\infty$.

(γ) Να αποδειχτεί ότι $\lambda \cdot f^{-1}(x) + \beta < x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Δημήτρης Βερροιόπουλος) Να αποδειχθεί ότι:* $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^{xt}}{t^2} dt \leq e\,(1 - x)$ *με* $x > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης* $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ *για την οποία ισχύουν:*

- $f(1) = 1$,
- *Η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $(1, +\infty)$,
- *Για κάθε* $x > 1$ *είναι* $x^{xf(x)} = f(x)^{f'(x)\ln x}$,

- *Για κάθε* $x \in [1, +\infty)$ *είναι* $\int_x^{x+1} f(t)\,dt < f(x)$.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Αποστόλης Κουρδουκλάς) Δίδεται η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln \sqrt{x} + \dfrac{7}{3} - c & , x \geq 1 \\ x \log \dfrac{1}{x} + c & , 0 < x < 1 \\ \dfrac{7}{6} & , x = 0 \end{cases}$$

Η f *είναι συνεχής στο* $x_0 = 1$.

1. *Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο της.*
2. *Να βρείτε το σύνολο τιμών της.*
3. *Να εξετάσετε αν η* f *είναι συνεχής στο* $x_0 = 0$ *και να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται της* C_f *των ευθειών* $x = 0$, $x = 1$ *και του άξονα* $x'x$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Κώστας Ζερβός) Να βρεθούν οι* $x, y \in \mathbb{R}$, *αν*

$$(2x + 3y)\sqrt{e^{2-4y} + y^2 + (1-x)e^x + 1} = (e^x + y)\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + x + 3},$$

και $x + 2y = 1$.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\left(f(x) - x^2\right)\left(f''(x) - 1\right) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και είναι

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

Να βρεθεί η f.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Αν* $0 < a < b$ *και η* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής και γνησίως αύξουσα, να αποδειχθεί ότι*

$$ab \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx < \int_a^b f(x) dx.$$

Ασκήσεις μόνο για μαθητές

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς)*

Έστω σημείο $B(x_0, 0)$ *του ημιάξονα* Ox *με* $x_0 \neq 1$ *και η συνάρτηση* $f(x) = x_0^x$, $x > 0$. *Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της* f *στο σημείο* $M(x_0, f(x_0))$ *τέμνει τον* Ox *στο σημείο* A.

(α) Να δείξετε ότι η απόσταση AB *ισούται με* $\dfrac{1}{|\ln x_0|}$.

(β) Αν η απόσταση AB *ισούται με* 1, *να βρείτε τα σημεία* M *της γραφικής παράστασης της* f *και τις εφαπτόμενες στα σημεία αυτά.*

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου)*

Αν $x, y \in \mathbb{R}$, *να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης:*

$$A = \frac{2014}{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 58}.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Αν* $a, b > 0$, *να αποδειχθεί ότι:*

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{2014} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{2014} \geq 2^{2015}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Στρατής Αντωνέας) Έστω*

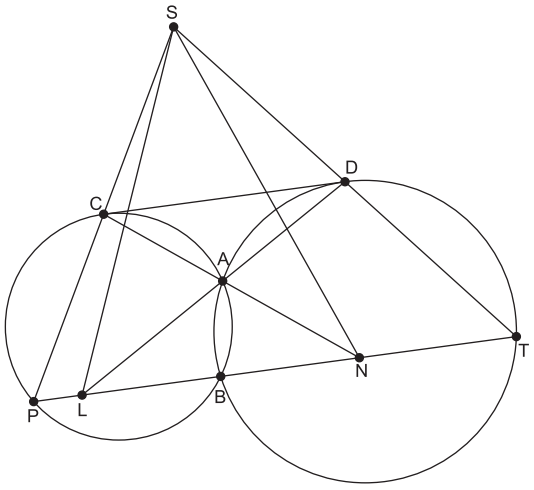
$$x_n = \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}} \quad \mu\varepsilon \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{49}}.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Γεωμετρία

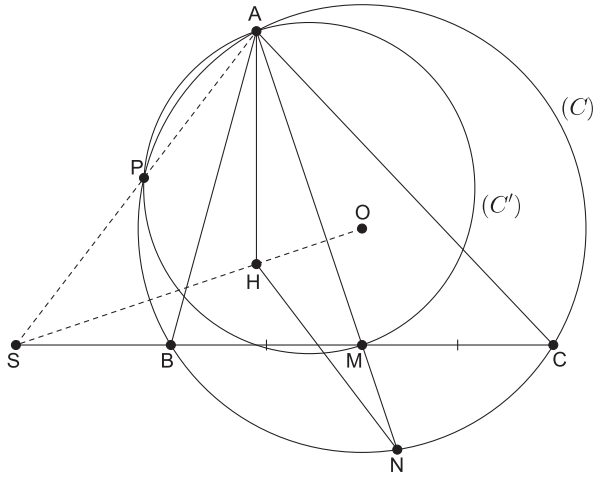
ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο KARKAR) Δύο κύκλοι τέμνονται στα* A, B *και έχουν κοινό εξωτερικά εφαπτόμενο τμήμα* CD. *Από το* B *διέρχεται ευθεία* ϵ, *παράλληλη της* CD, *η οποία τέμνει τους κύκλους στα* P, T. *Τα* PC *και* TD *τέμνονται στο* S, *ενώ οι* CA *και* DA *τέμνουν την* ϵ *στα σημεία* L, N. *Να δείξετε ότι* $SL = SN$.



ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης) Δίδεται οξυγώνιο τρίγωνο* ABC *με* $AB \neq AC$.*Ονομάζουμε* (C) *τον περιγεγραμμένο κύκλο του* ABC, H *το ορθόκεντρο, και* O *το κέντρο του* (C). *Ας είναι* M *το μέσο του* BC. *Η* AM *τέμνει ακόμα τον* (C) *στο* N *και ο κύκλος* (C') *διαμέτρου* AM *ξανά στο* P.

(α) Να δειχθεί ότι οι ευθείες AP, BC, OH συντρέχουν αν και μόνο αν $AH = HN$.

(β) Πως μπορεί να γίνει η γεωμετρική κατασκευή ενός τριγώνου με τις πιο πάνω προδιαγραφές;



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης)*
Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ τέτοιες, ώστε

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

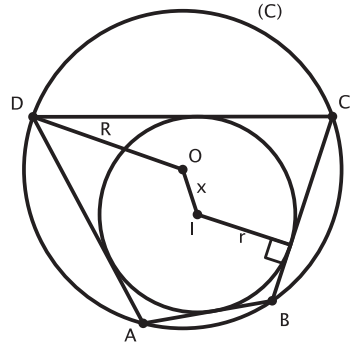
ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Θάνος Μάγκος) Αν $a, b, c > 0$ να αποδείξετε ότι*

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}}.$$

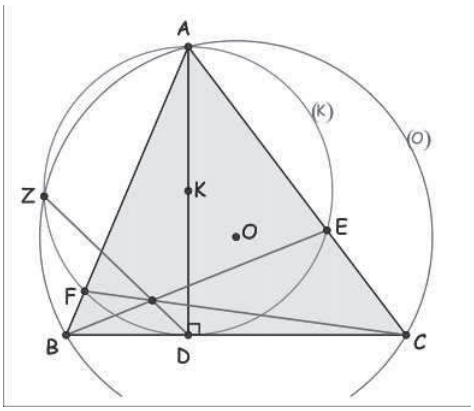
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο parmenides51.) Τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και περιγεγραμμένο σε κύκλο (I, r). Εάν $OI = x$ να αποδειχθεί ότι*

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R + x)^2} + \frac{1}{R - x)^2}.$$



ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας.) Θεωρούμε τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}C$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O) και ας είναι (K), ο κύκλος με διάμετρο το ύψος του AD. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες BE, CF, DZ διέρχονται από το ίδιο σημείο, όπου $E \equiv (K) \cap AC$, $F \equiv (K) \cap AB$, $Z \equiv (K) \cap (O)$ και $Z \neq A$.*



Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Θεωρούμε στο επίπεδο 100 σημεία ώστε ανά τρία να μην είναι συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι το 30% τουλάχιστον των τριγώνων που σχηματίζονται από τα σημεία αυτά, είναι μη οξυγώνια.*

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Υπάρχουν πρώτοι $p_1 < p_2 < ... < p_{99}$ ώστε οι αριθμοί*

$$p_1 + p_2,\ p_2 + p_3, \ldots,\ p_{98} + p_{99},\ p_{99} + p_1$$

να είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων;

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Από τον διαγωνισμό Kyiv Taras του 2013) Έστω $n \times n$ πίνακες A, B τέτοιοι ώστε για κάθε $n \times n$ πίνακα C η εξίσωση*

$$AX + YB = C$$

έχει λύση. Να δείξετε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα C η εξίσωση

$$A^{2013}X + YB^{2013} = C$$

έχει λύση.

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Προτείνει ο Φαίδων Αντριόπουλος) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία είναι φραγμένη σε κάθε διάστημα της μορφής (a, b) με $b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Αν το όριο*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x + 1) - f(x)}{x^k},$$

υπάρχει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, να δείξετε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{k+1}} = \frac{1}{k + 1} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x + 1) - f(x)}{x^k}$$

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη) Αν V ο διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^{n\times n}$ που αποτελείται από τους άνω τριγωνικούς πίνακες, να βρείτε μια βάση του και έναν διανυσματικό υποχώρο W του $\mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιον ώστε ο $\mathbb{R}^{n\times n}$ να είναι το ευθύ άθροισμα των V, W.*

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω $p(x)$ πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές βαθμού τουλάχιστον 2. Να εξεταστεί αν το σύνολο*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p(x) \in \mathbb{Q}\}$$

είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Γεώργιος Σμυρλής) Δείξατε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = \int_0^1 \sin\left(x + f^2(t)\right) dt$, γιά κάθε $x \in [0,1]$.*

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω a_n μία ακολουθία θετικών ακεραίων με όριο το άπειρο. Εξετάστε αν το σύνολο $\left\{\frac{a_n}{m} : n.m \in \mathbb{N}^*\right\}$ είναι πυκνό στο $(0, +\infty)$.*

Γεωμετρία ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κωστάκος) Τα διανύσματα*

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\ \vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \textit{και} \quad \vec{\gamma} = \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$$

είναι μοναδιαία και σχηματίζουν ίσες γωνίες $\frac{\pi}{3}$, δηλαδή

$$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = (\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}) = \frac{\pi}{3}.$$

Να υπολογισθεί η παράσταση

$$A = (\vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma}))) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}).$$

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κωστάκος) Από τυχόν σημείο Μ της έλλειψης*

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*,$$

φέρνουμε τις καθέτους προς τους άξονές της, ΜΑ και ΜΒ, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ο πόλος τής ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, γράφει την καμπύλη

$$\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} = 1.$$

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Δημήτριος Κανακάρης) Να αποδειχθεί ότι αν το τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου μπορεί να παρασταθεί ως διαφορά 2 διαδοχικών κύβων, τότε ο αριθμός αυτός μπορεί να παρασταθεί και ως άθροισμα 2 διαδοχικών τετραγώνων.*

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο vzf) Δίνονται δεκαεφτά ακέραιοι. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα υποσύνολό τους από εννιά ακέραιους, που το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 9.*

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο petros r). Έστω a ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Υπολογίστε το*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x(x^2 + a^2)}\, dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο vzf) Να υπολογίσετε το μέτρο του έργου W που χρειάζεται για την εκτόξευση πυραύλου βάρους B από την επιφάνεια της Γης, κατακόρυφα σε ύψος h.*

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Υπολογίστε την τιμή της παράστασης*

$$K := \cot 70^\circ + 4\cos 70^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{|\sin 2x|}{|\sin x| + |\cos x| + 1}.$$

Ο Φάκελος του καθηγητή, Ανάλυση

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο Γιώργος - Σ. Σμυρλής)*
Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών. Είναι γνωστό ότι:

$$\text{¨}Αν \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \text{ τότε } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n-1}{n}} < \infty.\text{¨}$$

Να αποδειχθεί το ακόλουθο, κάπως πιο εξειδικευμένο, αποτέλεσμα:

$$Αν \sum_{n=2}^{\infty} a_n = s < \infty, \text{ τότε } \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{\frac{n-1}{n}} \le s + 2\sqrt{s}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε*

$$f(x + y + f(2xy)) = 2xy + f(x + y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Ο Φάκελος του καθηγητή, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω παραβολή $y^2 = 2px$ με το E για εστία. Για $n \geq 3$ θεωρούμε ένα κανονικό πολύγωνο $A_1A_2A_3\cdots A_n$ με κέντρο την εστία E και με καμία κορυφή στον άξονα συμμετρίας της παραβολής. Αν οι ημιευθείες $EA_1, EA_2, \ldots, EA_n$ τέμνουν την παραβολή στα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ αντιστοίχως τότε να δείξετε ότι:*

$$EB_1 + EB_2 + EB_3 + \cdots + EB_n \geq np.$$

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Γιώργης Καλαθάκης) Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ABCD$. Να βρείτε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε να υπάρχει σημείο O στο εσωτερικό του τετραπλεύρου για το οποίο να ισχύει:*

$$(AOB) = (BOC) = (COD) = (DOA).$$

Ο Φάκελος του καθηγητή, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 63 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Ας είναι $n \geq 1$ ακέραιος και $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ με $|a| = 1$. Θεωρούμε την εξίσωση*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1 + a^k)x^k = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι σημεία μιας ευθείας ℓ_a

(β) Δύο ευθείες ℓ_a, ℓ_b τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν ισχύει $a + b = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 64 *(Προτείνει ο Βαγγέλης Μουρούκος) Να αποδείξετε ότι*

$$\arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Οι Ασκήσεις και Οι Λύσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Σωτήρης Χασάπης) Ο Γιάννης έχει κάμποσα βάζα με σοκολατάκια από τα οποία κανένα δεν είναι άδειο. Οι κανόνες ενός παιχνιδιού με τον πατέρα του, του επιτρέπουν είτε να διπλασιάσει το περιεχόμενο ενός βάζου, είτε να φάει ένα σοκολατάκι από κάθε βάζο.*

(α) Μπορεί πάντα ο Γιάννης να αδειάσει όλα τα βάζα με αυτούς τους κανόνες;

(β) Αν αντί να διπλασιάζει το περιεχόμενο ενός βάζου το τριπλασιάζει, τότε μπορεί πάντα να αδειάσει όλα τα βάζα;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=31906

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Μπορεί να τα αδειάσει. Ακολουθεί τους εξής κανόνες:

(α) Αν δεν υπάρχει βάζο με ένα σοκολατάκι, τότε αφαιρεί ένα σοκολατάκι από κάθε βάζο.

(β) Αν όλα τα βάζα έχουν από ένα σοκολατάκι, τότε αφαιρεί ένα σοκολατάκι από κάθε βάζο.

(γ) Αν υπάρχει τουλάχιστον ένα βάζο που έχει ένα σοκολατάκι και τουλάχιστον ένα που έχει περισσότερα, τότε παίρνει ένα βάζο που περιέχει ένα σοκολατάκι και διπλασιάζει το περιεχόμενό του.

Υποθέτουμε ότι η πιο πάνω διαδικασία δεν τερματίζει ποτέ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω N_k ο αριθμός από σοκολατάκια που περιέχει το βάζο με τα περισσότερο σοκολατάκια μετά το βήμα k. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (N_k) είναι φθίνουσα. Επίσης παρατηρούμε ότι $N_{k+1} < N_k$, εκτός και αν στο $k+1$ βήμα εφαρμόζουμε τον κανόνα (γ).

Όμως ο κανόνας (γ) μπορεί να εφαρμοστεί το πολύ m διαδοχικές φορές, όπου m ο αριθμός των βάζων.

Επομένως η ακολουθία $(N_{k(m+1)})$ είναι αυστηρώς φθίνουσα ακολουθία φυσικών, άτοπο αφού τέτοια ακολουθία δεν μπορεί να υπάρξει.

Για το επιπλέον ερώτημα αν ξεκινήσουμε με δύο βάζα και συνολικά περιττό αριθμό από σοκολατάκια τότε, μετά από κάθε βήμα ο αριθμός θα εξακολουθεί να είναι περιττός και άρα τα βάζα δεν θα αδειάσουν ποτέ.

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο KARKAR) Βρείτε τους θετικούς ακεραίους a, b, ώστε να ισχύει*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{9}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=31494

Λύση 1 (Θανάσης Μπεληγιάννης) Είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{9} &\Leftrightarrow 2ab-9a-9b=0\\ &\Leftrightarrow 4ab-18a-18b=0\\ &\Leftrightarrow (2a-9)(2b-9)=81.\end{aligned}$$

απ΄ όπου παίρνουμε τις λύσεις: $(a,b)=(5,45),(a,b)=(6,18),(a,b)=(9,9),(a,b)=(18,6),(a,b)=(45,5)$.

Λύση 2 (Στράτης Αντωνέας) Το συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχει στον πίνακα που έχει ο πάπυρος του Rhind, όπου αναφέρεται πως γίνεται η ανάλυση ενός κλάσματος της μορφής $\frac{2}{2n+1}$ με $n=2,3,\ldots,50$ σε θεμελιώδη κλάσματα, δηλαδή κλάσματα με αριθμητή το 1.

Στον πίνακα υπάρχει η ανάλυση $\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$.

Μια ανάλυση τέτοιων κλασμάτων μπορούμε να πετύχουμε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1}.$$

Από αυτήν έχουμε:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{45} + \frac{1}{5}.$$

Σχετικά με το θέμα μπορείτε να βρείτε στη σειρά: *Ιστορία των Μαθηματικών* - G. Loria, Έκδοση ΕΜΕ, τόμος πρώτος.

Λύση 3 (Γιάννης Σταματογιάννης) Η σχέση που δόθηκε γράφεται

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\left(9 + \frac{81}{2b-9}\right)$$

Εφόσον ο a είναι θετικός ακέραιος έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$2b-9 = 1 \Leftrightarrow b = 5, a = 45, (a,b) = (45,5)$.

$2b-9 = 3 \Leftrightarrow b = 6, a = 18, (a,b) = (18,6)$.

$2b-9 = 9 \Leftrightarrow b = 9, a = 9, (a,b) = (9,9)$.

$2b-9 = 27 \Leftrightarrow b = 18, a = 6, (a,b) = (6,18)$.

$2b-9 = 81 \Leftrightarrow b = 45, a = 5, (a,b) = (5,45)$.

Οι άλλες περιπτώσεις δεν δίνουν θετικούς ακέραιους.

Επιμελητής: Δημήτρης Ιωάννου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες ενός συμβατικού ρολογιού στις* 11 *παρά* 20 *το βράδυ;*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=41194

Λύση (Χρήστος Ντάβος) Στις 10 ακριβώς λοιπόν, σε 40′. Ο μεγάλος δείκτης θα υστερεί από τις 10 κατά

$$\frac{2}{12}360^\circ = 60^\circ.$$

Ο μικρός δείκτης υπερβαίνει τις 10 κατά

$$\frac{40}{60}\frac{1}{12}360^\circ = 20^\circ.$$

Συνολικά λοιπόν σχηματίζουν γωνία 80°.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο PetranOmayromixalis) Όλα μου τα στιλό εκτός από* 3 *είναι μπλε, όλα μου τα στιλό εκτός από* 4 *είναι κόκκινα, όλα μου τα στιλό εκτός από* 5 *είναι μαύρα. Πόσα στιλό έχω;*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=10369

Λύση (Geopa)

Α) Αν έχουμε μόνο μπλε, κόκκινα και μαύρα στιλό τότε από τα δεδομένα:

Κόκκινο + Μαύρο = 3.

Μπλε + Μαύρο = 4.

Μπλε + Κόκκινο = 5.

Αν τα προσθέσουμε κατά μέλη είναι

2(Μπλε + Κόκκινο + Μαύρο) = 12.

Άρα Μπλε + Κόκκινο + Μαύρο = 6.

Β) Αν υπήρχαν και στιλό με άλλα χρώματα τότε από τα δεδομένα θα είχαμε:

Κόκκινο + Μαύρο + άλλο χρώμα = 3.

Μπλε + Μαύρο + άλλο χρώμα = 4.

Μπλε + Κόκκινο + άλλο χρώμα = 5.

Από την πρώτη εξίσωση:

Κόκκινο = Μαύρο = Άλλο χρώμα = 1.

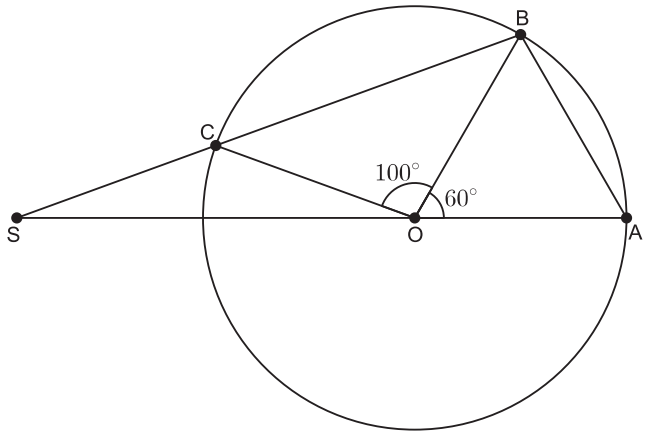
Ενώ από τη 2η Μπλε = 2.

Και από την 3η Μπλε = 3.

Άτοπο, δεν υπάρχει στυλό με άλλο χρώμα.

Επιμελητής: Παύλος Μαραγκουδάκης

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο KARKAR) Δείξτε ότι τα τμήματα AB, CS στο πιο κάτω σχήμα είναι ίσα μεταξύ τους.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=40719

Λύση (Ραφαήλ Ψυρούκης) Εύκολα βρίσκουμε ότι $C\hat{O}S = 20°$. Επειδή οι BO και CO είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου το $\triangle COB$ είναι ισοσκελές και άρα

$$O\hat{C}B = O\hat{B}C = 40°.$$

Εύκολα τώρα βρίσκουμε ότι $O\hat{C}S = 140°$ και άρα $C\hat{S}O = 20°$. Άρα το $\triangle SCO$ είναι ισοσκελές και άρα $SC = CO$. Όμως $CO = BO$ και άρα από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$SC = BO \qquad (1)$$

Η $B\hat{A}O$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $B\hat{O}K$, όπου K το σημείο τομής της AO με τον κύκλο. Όμως $B\hat{O}K = 120°$ και άρα:

$$B\hat{A}O = \frac{B\hat{O}K}{2} = 60°$$

Επομένως, το $\triangle BOA$ είναι ισόπλευρο και άρα:

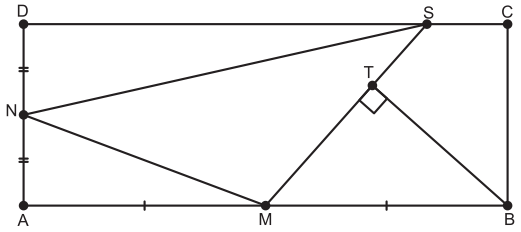
$$AB = BO \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο KARKAR) Το ορθογώνιο $ABCD$ του σχήματος έχει διαστάσεις 8×3 και τα M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB, AD.*

(α) Βρείτε σημείο S της πλευράς DC , ώστε το εμβαδόν του SMN να ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του $ABCD$.

(β) Στη συνέχεια δείξτε ότι η απόσταση BT της κορυφής B από την ευθεία MS , είναι μικρότερη από 3.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=40296

Λύση (Μιχάλης Νάννος)

(α) Θέτω $DS = x$, άρα $SC = 8 - x$.

Αφού $(ABCD) = 24$, $(MAN) = 3$, $(MNS) = 8$ θα πρέπει

$$(DNS) + (SMBC) = 13.$$

Άρα

$$\frac{3x}{4} + \frac{3(12-x)}{2} = 13$$

που δίνει $x = \frac{20}{3}$.

(β) Φέρω $SE = CB = 3$, τότε $EB = SC = \frac{4}{3}$ και $ME = \frac{8}{3}$.

Από Πυθαγόρειο στο $\triangle SME$ είναι

$$SM^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 3^2 \Leftrightarrow SM = \frac{\sqrt{145}}{3}.$$

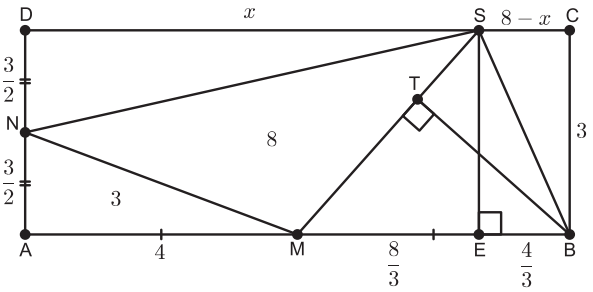
Στο $\triangle SMB$ είναι

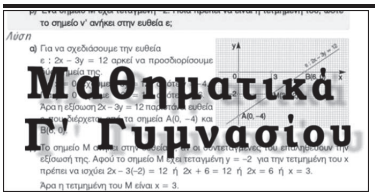
$$\frac{BT \cdot SM}{2} = \frac{SE \cdot MB}{2} \Leftrightarrow BT = \frac{36}{\sqrt{145}}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$BT^2 = \frac{1296}{145} < 9 = 3^2 \Leftrightarrow 1296 < 1305,$$

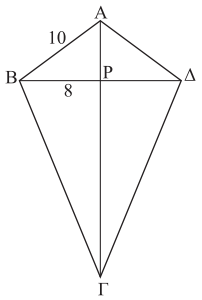
συνεπώς $BT < 3$.





Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Χρήστος Δεμιρτζόγλου) Στο παρακάτω τετράπλευρο ισχύει* ΑΒ = ΑΔ, ΒΓ = ΓΔ *και* ΓΔ = ΓΡ + 2. *Να βρεθεί το εμβαδό του* (ΑΒΓΔ)



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=33893

Λύση (Δημήτρης Τσιντσιλίδας) Τα σημεία A και Γ ισαπέχουν από τα B και Δ , άρα η $A\Gamma$ ειναι μεσοκάθετος της $B\Delta$.

Έτσι με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι $AP = 6$.

Επίσης ξανά με Πυθαγόρειο έχουμε

$$\begin{aligned}\Gamma\Delta^2 = \Delta P^2 + \Gamma P^2 &\Leftrightarrow (\Gamma P + 2)^2 = 64 + \Gamma P^2\\ &\Leftrightarrow 4\Gamma P = 60\\ &\Leftrightarrow \Gamma P = 15\end{aligned}$$

αφού $\Delta P = BP = 8$. Τέλος

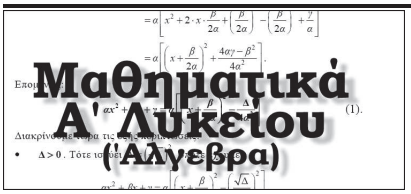
$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (\Gamma\Delta B) \Rightarrow E = \frac{6\cdot 16 + 15\cdot 16}{2} = 168.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο vzf) Σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές a, b, υποτείνουσα c, και $m > 2$, να αποδείξετε ότι $a^m + b^m < c^m$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=25144

Λύση (Κώστας Καπένης) Αφού $\frac{a}{c} < 1, \frac{b}{c} < 1$ και $m > 2$ τότε θα ισχύουν:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow a^m + b^m < c^m.$$



Επιμελητής: Στράτης Αντωνέας

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο qwerty) Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:*

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&p=188722#p188722

Λύση 1 (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Είναι γνωστό ότι αν $a+b+c=0$ τότε $a^3+b^3+c^3=3abc$. (Αυτή η πρόταση υπάρχει στη σελ. 48 του σχολικού βιβλίου της Α Λυκείου). Άρα αφού

$$A + \left(-\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}\right) + \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = 0$$

από την παραπάνω πρόταση παίρνουμε

$$A^3 + \left(-\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}\right)^3 = 3A\left(-\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}\right)\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} A^3 - 20 &= -3A\sqrt[3]{\left(\sqrt{108}+10\right)\left(\sqrt{108}-10\right)} \\ \Leftrightarrow A^3 - 20 &= -6A \\ \Leftrightarrow A^3 + 6A - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(A^3-8\right) + (6A-12) &= 0 \\ \Leftrightarrow (A-2)(A^2+2A+10) &= 0 \\ \Leftrightarrow A &= 2 \end{aligned}$$

αφού το τριώνυμο $A^2+2A+10$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση 2 (Κώστας Ζερβός) Είναι $108 = 2^2\cdot 3^3$. Άρα

$$\begin{aligned} \sqrt{108}+10 &= 2\cdot 3\sqrt{3}+10 \\ &= 3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1 \\ &= (\sqrt{3})^3 + 3\cdot 1\cdot(\sqrt{3})^2 + 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3} + 1^3 \\ &= (\sqrt{3}+1)^3 \end{aligned}$$

και όμοια $\sqrt{108}-10 = (\sqrt{3}-1)^3$.

Άρα

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3} \\ &= (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης) Να λυθεί η εξίσωση*

$$(3x-1)(4x-1)(6x-1)(12x-1) = 5.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&p=197474#p197474

Λύση 1 (Σπύρος Καρδαμίτσης) Κάνοντας πράξεις μεταξύ πρώτης, τέταρτης και δεύτερης, τρίτης παρένθεσης έχουμε:

$$\begin{aligned} &(36x^2-15x+1)(24x^2-10x+1) = 5 \\ \Leftrightarrow\ &[3\cdot(12x^2-5x)+1][2\cdot(12x^2-5x)+1] = 5 \end{aligned}$$

Θέτοντας $12x^2-5x=t$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$(3t+1)(2t+1) = 5 \Leftrightarrow 6t^2+5t-4=0$$

που έχει ως ρίζες τις $t=-\frac{4}{3}$ και $t=\frac{1}{2}$. Αντικαθιστώντας στο μετασχηματισμό προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$12x^2-5x = -\frac{4}{3} \text{ και } 12x^2-5x = \frac{1}{2}$$

ή ισοδύναμα

$$36x^2-15x+4=0 \text{ και } 24x^2-10x-1=0.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η πρώτη είναι αδύνατη και η δεύτερη έχει ως ρίζες της $-\frac{1}{12}$ και $\frac{1}{2}$ οι οποίες είναι και ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Λύση 2 (Γιώργος Βισβίκης) Θέτω $12x-1=y$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$y(y-3)(y-2)(y-1) = 120 \Leftrightarrow (y^2-3y)(y^2-3y+2) = 120.$$

Στη συνέχεια θέτω $y^2 - 3y = t$ και έχω

$$t^2 + 2t - 120 = 0 \Leftrightarrow t = 10 \text{ ή } t = -12.$$

Για $t = 10$ είναι

$$y^2 - 3y - 10 = 0 \Leftrightarrow y = 5 \text{ ή } y = -2.$$

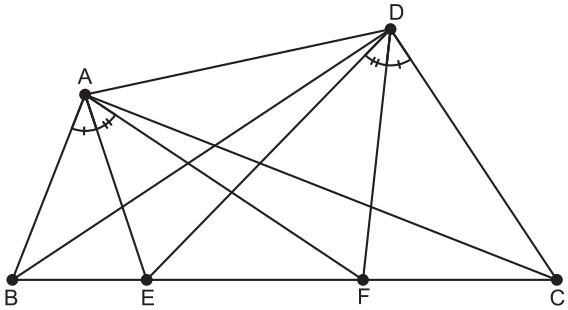
Επομένως,

$$12x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } 12x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{12}.$$

Για $t = 12$ είναι $y^2 - 3y + 12 = 0$, που δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Επιμελητής: Μιχάλης Νάννος

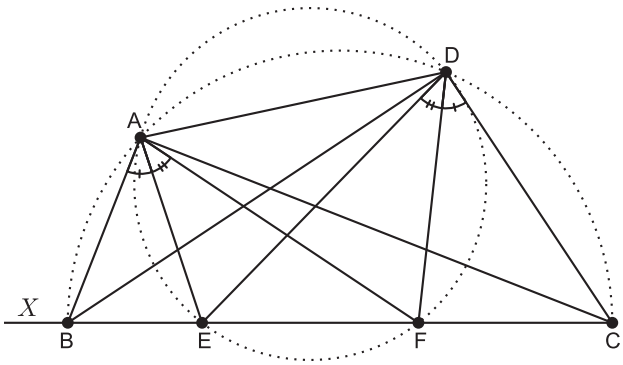
ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο Γιώργος Βισβίκης)*



Στην πλευρά BC ενός τετραπλεύρου $ABCD$ υπάρχουν δύο σημεία E, F, τέτοια ώστε: $B\hat{A}E = C\hat{D}F$ και $E\hat{A}F = E\hat{D}F$. Αποδείξτε ότι $F\hat{A}C = E\hat{D}B$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=41323

Λύση (Στάθης Κούτρας)



Με $\angle EAF = \angle EDF \Rightarrow AEFD$ εγγράψιμο σε κύκλο. Έχουμε:

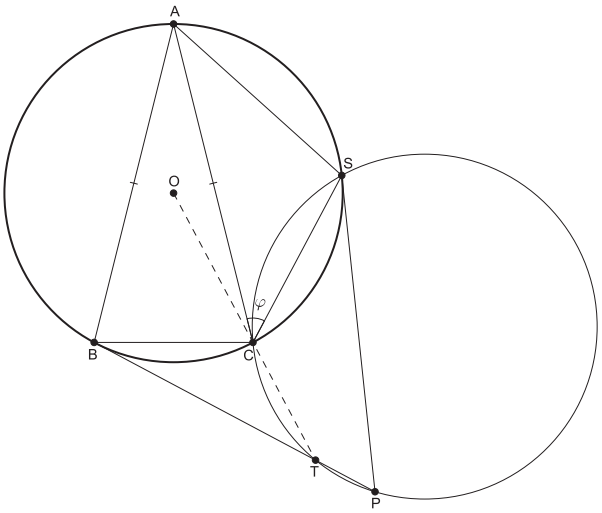
$$\begin{aligned}\angle XBA &= \angle BAE + \angle AEB \quad \text{(εξωτερική στο τρίγωνο } ABE\text{)}\\ &= \angle FDC + \angle ADF \quad (\angle BAE = \angle FDC, \angle AEB = \angle ADF\\ &\qquad\qquad \text{αφού } AEFD \text{ εγγράψιμο)}\\ &= \angle ADC\end{aligned}$$

Άρα το $BADC$ είναι εγγράψιμο. Οπότε:

$$\begin{aligned}&\angle BAC = \angle BDC\\ \Rightarrow\ &\angle FAC = \angle EDB \qquad (\angle BAF = \angle EDC)\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης)*



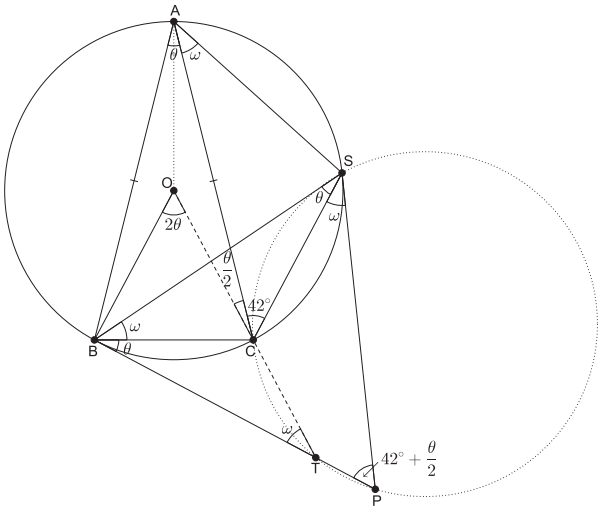
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ABC(AB = AC)$. Γράφουμε τον περιγεγραμμένο του κύκλο (O) κέντρου O. Θεωρούμε σημείο S του κύκλου με τα O, S εκατέρωθεν της AC. Οι εφαπτόμενες του κύκλου (O) στα B, S τέμνονται στο σημείο P. Γράφουμε και τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία C, S, P, ο οποίος τέμνει την ευθεία BP στο T (με P διαφορετικό από το T).

(α) Πως πρέπει να επιλέξουμε το S ώστε τα σημεία O, C, T να ανήκουν στην ίδια ευθεία;

(β) Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του πρώτου ερωτήματος και επί πλέον η γωνία $\varphi = A\widehat{C}S = 42^0$, να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ABC και του τετράπλευρου $CTPS$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=41413

Λύση (Μιχάλης Νάννος)



(α) Θέτω $B\widehat{A}C = \theta = B\widehat{S}C$ και $C\widehat{T}B = \omega$. Θα είναι $B\widehat{O}C = 2\theta$ (επίκεντρη - εγγεγραμμένη στο ίδιο τόξο) και $P\widehat{B}C = \theta$ (χορδή και εφαπτομένη).

Για να είναι τα O, C, T συνευθειακά θα πρέπει το $CTPS$ να είναι εγγράψιμο, δηλαδή

$$C\widehat{T}B = C\widehat{S}P = C\widehat{A}S = C\widehat{B}S = \omega.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OBT είναι $\omega = 90^\circ - 2\theta$, οπότε το σημείο S προσδιορίζεται αν κατασκευάσουμε $C\widehat{A}S = 90^\circ - 2B\widehat{A}C$ με $0^\circ < \theta < 45^\circ$.

(β) Αν $A\widehat{C}S = 42^\circ$, τότε $S\widehat{P}B = 42^\circ + \dfrac{\theta}{2}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο PSB είναι

$$42^\circ + \frac{\theta}{2} + 2\omega + 2\theta = 180^\circ \qquad (1)$$

και από το ορθογώνιο τρίγωνο OBT είναι

$$\omega = 90^\circ - 2\theta \qquad (2).$$

Από το σύστημα των (1), (2) παίρνουμε $(\theta, \omega) = (28^\circ, 34^\circ)$, οπότε $ABC(28^\circ, 76^\circ, 76^\circ)$ και $CTPS$ $(124^\circ, 146^\circ, 56^\circ, 34^\circ)$.

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{cases} 2x^2 + xy &= 1 \\ \frac{9x^2}{2(1-x)^4} &= 1 + \frac{3xy}{2(1-x)^2} \end{cases}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=40441

Λύση (Κώστας Ζερβός) Πρέπει $x \neq 1$.

Έστω $t = \dfrac{3x}{(x-1)^2}$, τότε:

$\dfrac{t^2}{2} = 1 + \dfrac{ty}{2} \iff t^2 - 2 = ty \overset{t\neq 0}{\iff} y = \dfrac{t^2-2}{t}$.

Επίσης: $2x^2 + xy = 1 \overset{x\neq 0}{\iff} y = \dfrac{1-2x^2}{x}$.

Άρα

$\dfrac{t^2-2}{t} = \dfrac{1-2x^2}{x} \iff xt^2 - 2x = t - 2tx^2$

$\iff xt^2 + 2tx^2 - 2x - t = 0 \iff xt(t+2x) - (t+2x) = 0$

$\iff (t+2x)(xt-1) = 0 \iff t = -2x$ ή $xt = 1$.

Αν $t = -2x$, τότε $\dfrac{3x}{(x-1)^2} = -2x$, από την $2x^2 + xy = 1$ έχουμε $x \neq 0$, άρα $2(x-1)^2 = -3$ που είναι αδύνατη.

Αν $tx = 1$, τότε:

$\dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 1 \iff 3x^2 = x^2 - 2x + 1 \iff$

$\iff 2x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

και αφού $1 - 2x^2 = 2x$, από την $y = \dfrac{1-2x^2}{x}$ έχουμε:

$$y = 2.$$

Άρα $(x, y) = \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, 2\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο Αποστόλης Τιντινίδης)*

α) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ *το σύστημα:* $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^4 + y^4 = 82 \end{cases}$

β) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ *η εξίσωση:* $\sqrt[4]{41 - x} + \sqrt[4]{41 + x} = 4$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=41090

Λύση (Κώστας Ζερβός) Για το α) Είναι:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 = 82 &\iff \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = 82 \iff \\ \left[(x+y)^2 - 2xy\right]^2 - 2(xy)^2 &= 82 \iff \\ (4^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2 &= 82 \iff \\ 2(yx)^2 - 64xy + 174 &= 0 \iff \\ (xy)^2 - 32(xy) + 87 &= 0 \iff \\ xy = 29 \text{ ή } xy &= 3. \end{aligned}$$

Αν $xy = 3$, έχουμε $x + y = 4 \iff y = 4 - x$, άρα $x(4-x) = 3 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1$ ή $x = 3$.

Για $x = 1$ έχουμε $y = 3$.

Για $x = 3$ έχουμε $y = 1$.

Αν $xy = 29$, έχουμε $x + y = 4 \iff y = 4 - x$, άρα $x(4-x) = 29 \iff x^2 - 4x + 29 = 0$ που είναι αδύνατη. Άρα $(x, y) = (1, 3)$ ή $(x, y) = (3, 1)$.

β) Πρέπει $-41 \leq x \leq 41$. Έστω $a = \sqrt[4]{41 - x}$, $b = \sqrt[4]{41 + x}$. Τότε $a + b = 4$ και $a^4 + b^4 = 41 - x + 41 + x = 82$. Άρα η (a, b) είναι λύση του προηγούμενου συστήματος. Επομένως $(a, b) = (1, 3)$ ή $(a, b) = (3, 1)$.

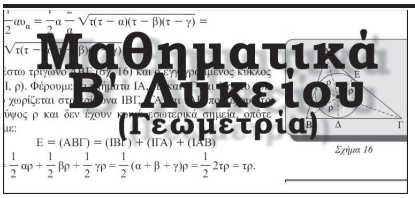
Αν $(a, b) = (1, 3)$, τότε: $\begin{cases} \sqrt[4]{41 - x} = 1 \\ \sqrt[4]{41 + x} = 3 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x = 40 \\ x = 40 \end{cases}$.

Αν $(a, b) = (3, 1)$, τότε:

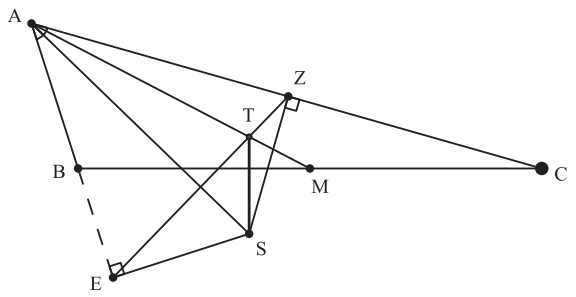
$\begin{cases} \sqrt[4]{41 - x} = 3 \\ \sqrt[4]{41 + x} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -40 \\ x = -40 \end{cases}$.

Άρα $x = 40$ ή $x = -40$



Επιμελητής: Στάθης Κούτρας

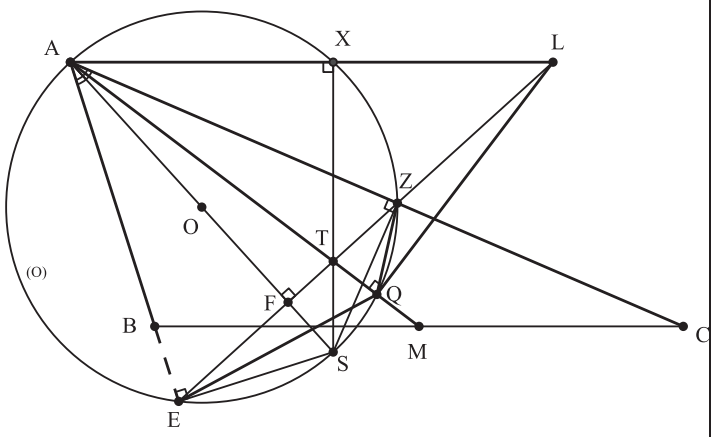
ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης)*



Έστω τρίγωνο $\triangle ABC$ και M το μέσο του BC. Από τυχαίο σημείο S της ευθείας της διχοτόμου της γωνίας του $\angle A$, φέρνουμε προς τις πλευρές AB, AC, ή τις προεκτάσεις αυτών, $SE \perp AB$ και $SZ \perp AC$. Αν T είναι το σημείο τομής της ευθείας AM με την EZ, να αποδειχθεί ότι: $TS \perp BC$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&t=41621

Λύση 1 (Στάθης Κούτρας)

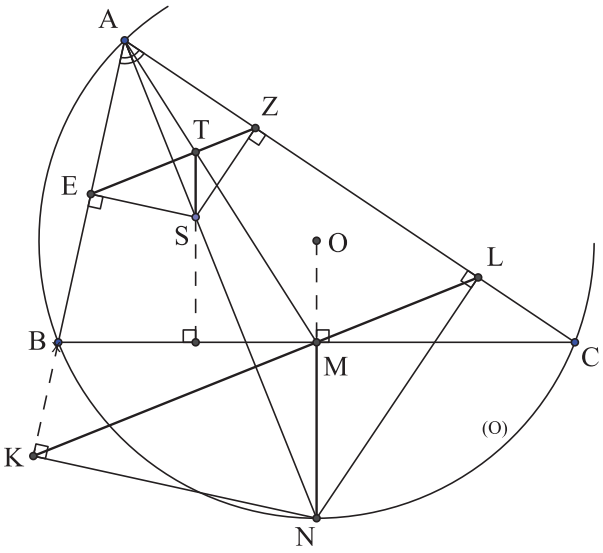


Προφανώς το τετράπλευρο $AESZ$ είναι «χαρταετός» και εγγράψιμος σε κύκλο (έστω (O)) διαμέτρου AS $\left(\angle AES = \angle AZS = 90^0\right)$, (έστω κέντρου O) και ας είναι $Q \equiv AM \cap (O), L \equiv EZ \cap SQ$' Τότε προφανώς είναι $\angle ZQA = \angle EQA$ (από τον «χαρταετό») και $LQ \perp QTA$ (AS διάμετρος του (O)). Έτσι στο τρίγωνο $\triangle ZQE$ οι QT, QL είναι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα και συνεπώς η σειρά (Z, E, L, T) είναι αρμονική, άρα και η δέσμη $A.ZELT$ είναι αρμονική και με M το μέσο της

$$\boxed{BC \Rightarrow AL \parallel BC} : (1).$$

Στο τρίγωνο $\triangle ASL$ ισχύει ότι τα AQ, LF είναι τα δύο ύψη του, με $F \equiv AS \cap TZ$ ($EZ \perp AS$ από τον «χαρταετό») και συνεπώς $AQ \cap LF \equiv T$ είναι το ορθόκεντρό του, άρα $ST \perp AL \overset{AL \parallel BC}{\Rightarrow} \boxed{ST \perp BC}$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Λύση 2 (Σιλουανός Μπραζιτίκος)



Θεωρούμε την ομοιοθεσία του A που στέλνει το S στο μέσο N του τόξου BC (από τη διχοτόμο της γωνίας $\angle A$) του περίκυκλου του τριγώνου $\triangle ABC$ που δεν περιέχει το A. Οι εικόνες E, Z θα είναι οι ορθές προβολές K, L του N στις ευθείες των πλευρών AB, AC του τριγώνου $\triangle ABC$ αντίστοιχα. Από το Θεώρημα *Simpson* τα σημεία K, M, L είναι συνευθειακά και η εικόνα του T θα είναι η τομή της AT με την KL, δηλαδή το σημείο M. Έτσι η εικόνα του ST θα είναι η NM. Από την ομοιοθεσία είναι $ST \parallel NM$ και με $NM \perp BC$ (αφού N, M είναι τα μέσα του τόξου και της αντίστοιχης σε αυτό χορδής BC αντίστοιχα) θα είναι και $ST \perp BC$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

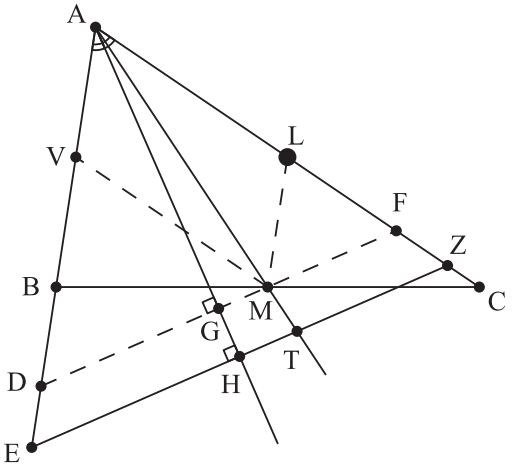
Λύση 3 (Σωτήρης Λουρίδας)

Λήμμα:

Έστω τρίγωνο $\triangle ABC$ και η διάμεσός του AM. Από τυχόν σημείο T της ημιευθείας AM θεωρούμε κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας $\angle A$ του τριγώνου $\triangle ABC$ που τέμνει την ημιευθεία AB στο σημείο E και την ημιευθεία AC στο σημείο Z. Τότε ισχύει η σχέση: $\frac{TZ}{TE} = \frac{c}{b}$.

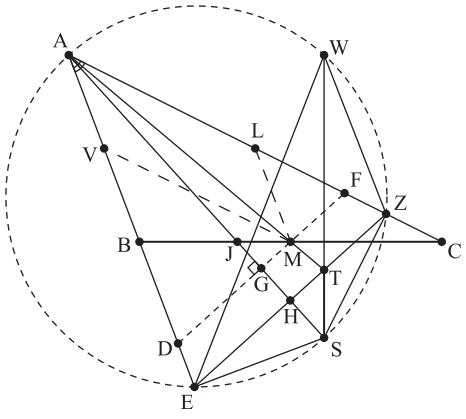
Απόδειξη του λήμματος

Θεωρούμε τη διχοτόμο Ax της γωνίας $\angle A$ και $E \in AB, Z \in AC, T \in EZ$, $, EZ \perp Ax, AV = VB, AL = LC, DF \perp Ax$.



Παρατηρούμε ότι $MV = VD$ λόγω της καθετότητας της MD στη διχοτόμο. Έτσι παίρνουμε $\frac{TZ}{TE} = \frac{MF}{MD} = \frac{AV}{VD} = \frac{AV}{VM} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{c}{b}$.

Στο θέμα μας τώρα: Από το παραπάνω λήμμα στο σχήμα που ακολουθεί ισχύει: $\frac{TZ}{TE} = \frac{MF}{MD} = \frac{c}{b} = \frac{BJ}{JC}$: (1).

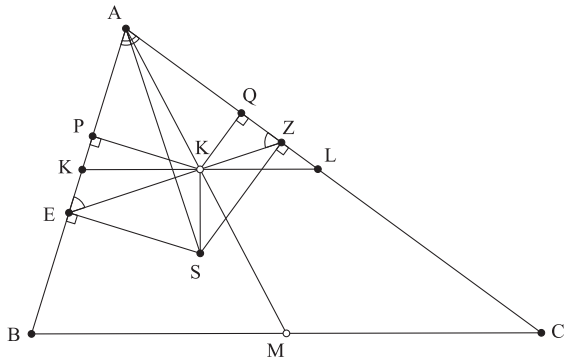


Επομένως το τρίγωνο $\triangle WEZ$ είναι όμοιο προς το τρίγωνο $\triangle ABC$ καθότι ταυτόχρονα με την (1) έχουμε: $\angle SWZ = \angle EWS = \angle SEZ = \angle EZS = \frac{\angle A}{2}$. Άρα παίρνουμε $\angle ZSW = \angle ZEW = \angle C$ από το οποίο παίρνουμε το ζητούμενο.

Σημείωση:

Στο σχήμα είναι $ML \parallel AB, MV \parallel AC, VM = VD$.

Λύση 4 (Στάθης Κούτρας) Έστω K, L τα σημεία τομής της εκ του T παραλλήλου προς την BC με τις AB, AC αντίστοιχα και ας είναι P, Q οι ορθές προβολές του T στις AB, AC αντίστοιχα.



Τότε:

$$M \text{ μέσο της } BC \overset{KL \parallel BC}{\Rightarrow} T \text{ μέσο της } KL$$

οπότε:

$$(TK) = (TL) \Rightarrow (ATK) = (ATL) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{(TQ)}{(TP)} = \frac{(AK)}{(AL)} = \frac{(AB)}{(AC)}} : (1).$$

Από τον «χαρταετό»

$$AESZ \Rightarrow (AE) = (AZ) \Rightarrow$$

$$\angle PET = \angle QZT$$

$$\overset{\angle TPE = \angle TQZ = 90^0}{\Rightarrow} \triangle TQZ = \triangle TPE \Rightarrow$$

$$\frac{(TQ)}{(TP)} = \frac{(QZ)}{(PE)} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

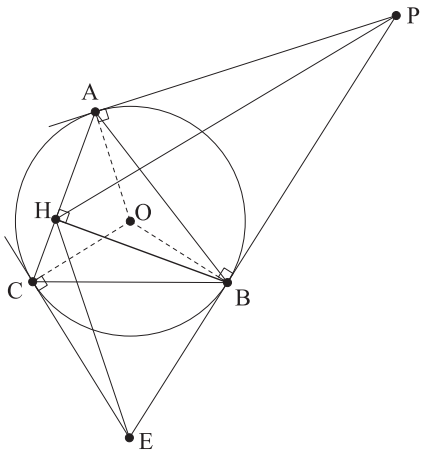
$$\boxed{\frac{(QZ)}{(PE)} = \frac{(AB)}{(AC)}}$$

και από το Θεώρημα των καθέτων ευθειών προκύπτει ότι $TS \perp BC$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο Γιώργος Μήτσιος)*
Στο σχήμα που ακολουθεί:

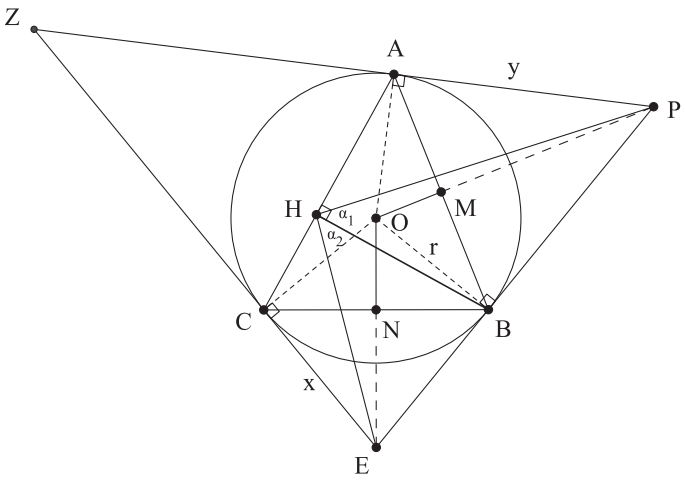
- *Οι PA, PBE και EC εφάπτονται στα σημεία A, B, C του περιγεγραμμένου κύκλου του (οξυγωνίου) τριγώνου $\triangle ABC$ αντίστοιχα.*
- *Είναι $BH \perp AC$.*

Να δειχθεί ότι η HB είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle PHE$,



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&t=41596

Λύση 1 (Νίκος Φραγκάκης)



Για να δείξουμε ότι $\angle a_1 = \angle a_2$ αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle CHE$ και $\triangle AHP$ είναι όμοια. Το τρίγωνο $\triangle ZAC$ είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο Z, , που είναι το σημείο τομής των PE, EC. Θα έχει λοιπόν τις παρά την βάση του γωνίες ίσες και προφανώς και τα παραπληρώματα αυτών των γωνιών ίσα, δηλαδή θα ισχύει:

$$\boxed{\angle ECH = \angle HAP} : (1).$$

Φέρνουμε τις διακεντρικές ευθείες OP, OE που είναι προφανώς μεσοκάθετες στις AB, BC αντίστοιχα στα σημεία M, N. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle HCB$ και $\triangle MOA$ είναι όμοια γιατί έχουν $\angle AOM = \dfrac{\angle AOB}{2} = \angle HCB$ και έτσι θα ισχύει:

$$\frac{HC}{MO} = \frac{CB}{OA} : (2),$$

ομοίως δε

$$\frac{HA}{NO} = \frac{AB}{OB} : (3).$$

Με τους γνωστούς συμβολισμούς των πλευρών του τριγώνου $\triangle ABC$ και με $OA = OB = r$, αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει:

$$\frac{HC}{HA} = \frac{a}{c} \cdot \frac{MO}{NO} : (4).$$

Όμως $OA^2 = MO \cdot PO$ και $OB^2 = NO \cdot EO$ από το Θεώρημα του Ευκλείδη στα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AOP$ και $\triangle BOE$ αντίστοιχα, και έτσι θα έχουμε, εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη:

$$MO \cdot PO = NO \cdot EO$$

και με τη βοήθεια αυτής η σχέση (4) γίνεται:

$$\frac{HC}{HA} = \frac{a}{c} \cdot \frac{EO}{PO} : (5).$$

Αλλά στα εγγράψιμα τετράπλευρα $OBEC$ και $OBPA$ από το Θεώρημα του Πτολεμαίου έχουμε:

$$a \cdot EO = 2rx$$

και

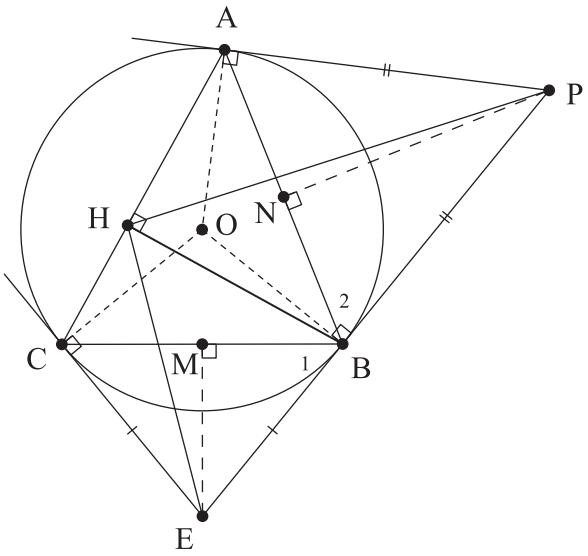
$$c \cdot PO = 2ry,$$

όπου $EC = EB = x$ και $PA = PB = y$. Τώρα θα έχουμε από τη σχέση (5),

$$\boxed{\frac{HC}{HA} = \frac{x}{y} = \frac{CE}{AP}} : (6).$$

Οι σχέσεις (1), (6) μας εξασφαλίζουν ότι: $\triangle HCE \sim \triangle HAP$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Λύση 2 (Γιώργος Βισβίκης)



Μέχρι $\angle ECH = \angle HPA$ όπως η προηγούμενη λύση του Νίκου Φραγκάκη.

Έστω $\angle A, \angle B, \angle C$ οι γωνίες του τριγώνου $\triangle ABC$. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle EMB, \triangle AHB$ είναι όμοια ($\angle A = \angle B_1$) άρα

$$\frac{BE}{AB} = \frac{MB}{AH} \Leftrightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BC}{2AH} : (1).$$

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle CGB, \triangle BNP$ είναι όμοια ($\angle C = \angle B_2$) άρα

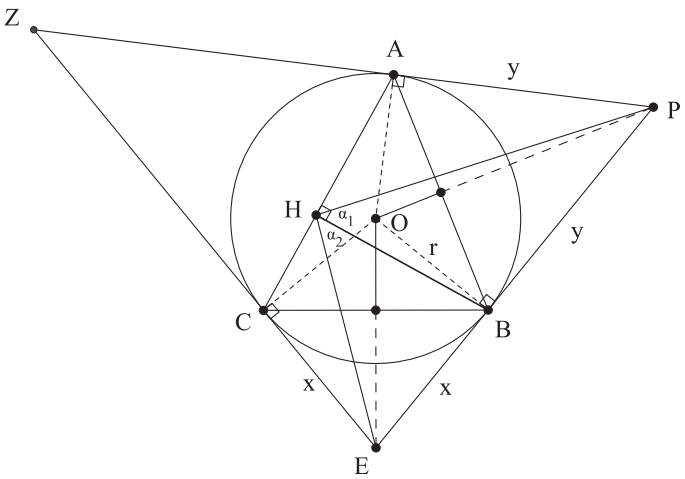
$$\frac{BE}{CH} = \frac{BP}{BC} \Leftrightarrow \frac{AB}{2CH} = \frac{BP}{BC} : (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις $(1), (2)$ κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{BE}{AB} \cdot \frac{AB}{2CH} = \frac{BC}{2AH} \cdot \frac{BP}{BC} \Leftrightarrow \frac{BE}{CH} = \frac{BP}{AH}.$$

Αλλά $BE = CE, BP = AP$ οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται $\frac{CE}{CH} = \frac{AP}{AH}$ και επειδή $\angle ECH = \angle HAP$, τα τρίγωνα $\triangle CHE, \triangle AHP$ είναι όμοια από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Λύση 3 (Νίκος Φραγκάκης)



Για να δείξουμε ότι $\angle a_1 = \angle a_2$ αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle CHE$ και $\triangle AHP$ είναι όμοια. Το τρίγωνο $\triangle ZAC$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Z, που είναι το σημείο τομής των PE, EC. Θα έχει λοιπόν τις παρά την βάση του γωνίες ίσες και προφανώς και τα παραπληρώματα αυτών των γωνιών ίσα, δηλαδή

$$\boxed{\angle ECH = \angle HAP} : (1).$$

Θέτουμε $OA = OB = r, CE = EB = x$ και $PA = PB = y$. Φέρνουμε τις διακεντρικές ευθείες OP, OE που προφανώς είναι μεσοκάθετες στις AB, BC αντίστοιχα. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle HCB$ και $\triangle BOP$ είναι όμοια γιατί έχουν:

$$\angle BOP = \frac{\angle AOB}{2} = \angle HCB$$

και έτσι ισχύει:

$$\frac{HC}{BO} = \frac{HB}{BP} \Leftrightarrow \boxed{\frac{HC}{r} = \frac{HB}{y}} : (2)$$

, ομοίως δε

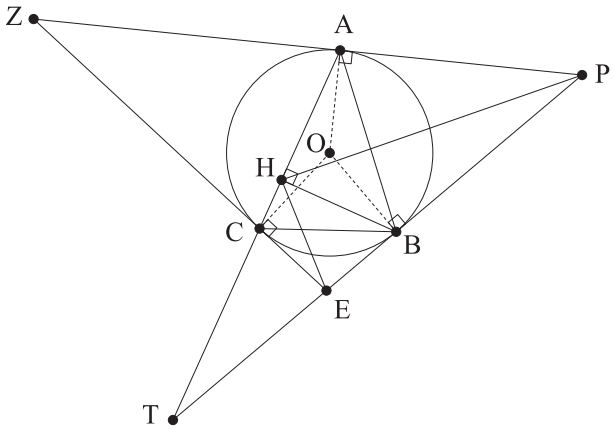
$$\boxed{\frac{HA}{r} = \frac{HB}{x}} : (3).$$

Είναι:

$$(2), (3) \Rightarrow \boxed{\frac{HC}{HA} = \frac{x}{y} = \frac{CE}{AP}} : (4).$$

Οι σχέσεις $(1), (4)$ μας εξασφαλίζουν ότι $\triangle HCE \sim \triangle HAP$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Λύση 4 (Κώστας Βήττας)

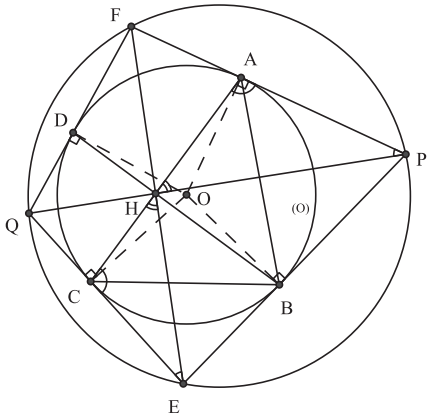


Έστω $T \equiv PE \cap AC$ και στο τρίγωνο $\triangle PEZ$ με διατέμνουσα την ACT, σύμφωνα με το Θεώρημα του Μενελάου, έχουμε:

$$\frac{AP}{AZ} \cdot \frac{CZ}{CE} \cdot \frac{TE}{TP} = 1 \Rightarrow \frac{TE}{TP} = \frac{CE}{AP} = \frac{BE}{BP} : (1)$$

λόγω $AZ = CZ$, $CE = BE$ και $AP = BP$. Από την (1) προκύπτει ότι η σημειοσειρά T, E, B, P είναι αρμονική και άρα, η δέσμη $H.TEBP$ είναι αρμονική. Στην αρμονική αυτή δέσμη από $HB \perp HT$ συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες HB, HT ταυτίζονται με τις διχοτόμους (εσωτερική και εξωτερική αντιστοίχως) της γωνίας $\angle H$ του τριγώνου $\triangle HEP$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Λύση 5 (Στάθης Κούτρας)



Έστω F, Q τα σημεία τομής της στο $D \equiv BH \cap (O), (D \neq B)$ εφαπτόμενης του κύκλου (O) με τις ευθείες PA, EC αντίστοιχα. Τότε για τις χορδές BD, AC του κύκλου (O), με

$$BD \perp AC \Rightarrow \angle ODC + \angle AOB = 180^0$$

$$\overset{\angle FQE+\angle DOC=180^0,\angle FPE+\angle AOB=180^0}{\Rightarrow}$$

$$\angle FQE + \angle FPE = 180^0 \Rightarrow FQEP$$

αμφιγράψιμο τετράπλευρο.

Για το περιγεγραμμένο τετράπλευρο $FQEP$ οι διαγώνιές του και τα τμήματα που συνδέουν τα σημεία επαφής των απέναντι πλευρών του με τον εγγεγραμμένο του κύκλο διέρχονται από το ίδιο σημείο (γνωστή πρόταση) και συνεπώς

$$H \equiv EF \cap PQ \cap AC \cap BD$$

$$\overset{FQEP\ εγγραψιμο}{\Rightarrow} \angle FEQ = \angle FPQ$$

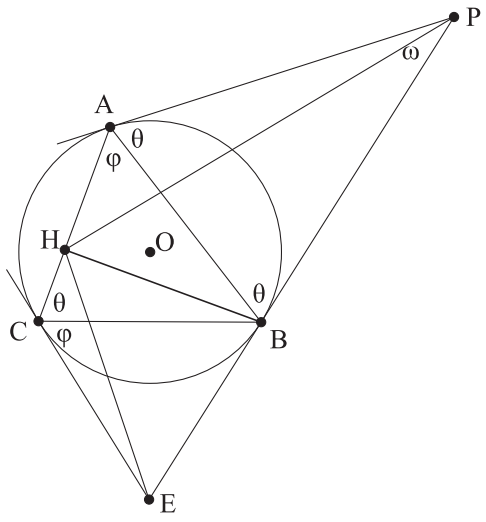
$$\overset{\angle HAP=\angle HCE\ (AP,CE\ εφαπτομενες\ του\ (O))}{\Rightarrow}$$

$$\triangle AHP \sim \triangle CHE \Rightarrow$$

$$\angle PHA = \angle EHC \overset{BH\perp AC}{\Rightarrow} HB$$

διχοτόμος της γωνίας $\angle EHP$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Λύση 6 (Γιώργος Μήτσιος)



Θα σταθώ σε δύο προσεγγίσεις, μόνο για την αναλογία - κλειδί του θέματος:

$$\frac{AH}{AP} = \frac{CH}{CE}.$$

1) Με το πρώτο σχήμα του Νίκου (Φραγκάκη) έχουμε

$$\triangle AHB \sim \triangle NOC \Rightarrow \frac{AH}{ON} = \frac{AB}{OC}$$

και

$$\triangle OPA \sim \triangle OMA \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{OA}{OK}.$$

Με διαίρεση κατά μέλη των πιο πάνω σχέσεων προκύπτει ότι:

$$\frac{AH}{AP} = \frac{2OM \cdot ON}{OA \cdot OC}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, τα όμοια τρίγωνα $\triangle OMA, \triangle BHC$ και $\triangle CEO, \triangle CON$ δίνουν

$$\frac{CH}{CE} = \frac{2OM \cdot ON}{OA \cdot OC},$$

δηλαδή είναι

$$\frac{AH}{AP} = \frac{2d(O,AB) \cdot d(O,BC)}{R^2} = \frac{CH}{CE}.$$

2) Ας δείξουμε την ίδια αναλογία με χρήση και της προσφιλούς Τριγωνομετρίας. Με την βοήθεια του σχήματος έχουμε:

$$AH = AB \cdot συνφ,$$

ενώ

$$\omega = 180^0 - 2\theta \Rightarrow$$

$$ημω = ημ2\theta = 2ημθσυνθ \Rightarrow$$

$$\cdots \frac{AP}{ημθ} = \frac{AB}{ημω} \Rightarrow$$

$$\ldots AP = \frac{AB}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$$

από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $\triangle ABP$. Συνεπώς είναι

$$\frac{AH}{AP} = 2\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta.$$

Ομοίως βρίσκουμε:

$$CH = BC\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \ldots CH = \frac{BC}{2\sigma\upsilon\nu\varphi},$$

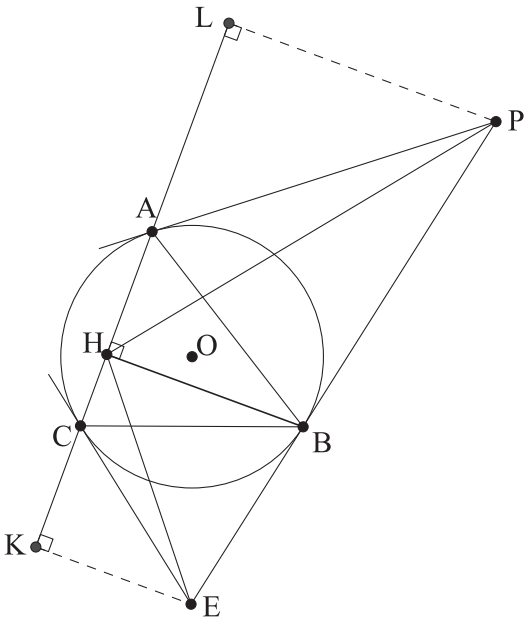
οπότε:

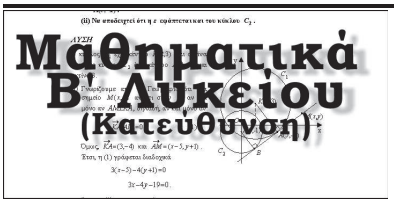
$$\frac{CH}{CE} = 2\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{AH}{AP}.$$

Λύση 7 (Μπάμπης Στεργίου) Πάλι με όμοια τρίγωνα: Από τα σημεία P, E φέρνουμε τις ορθές προβολές προς την ευθεία AB. Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle APL, \triangle BEK$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$\frac{LP}{KE} = \frac{PA}{EB} = \frac{PC}{EC} = \frac{LH}{KH}.$$

Από τον πρώτο και τον τελευταίο λόγο παίρνουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle HLP, \triangle HKE$ είναι όμοια. Επομένως $\angle LHP = \angle KHE$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται.





Επιμελητής: Κώστας Τηλέγραφος

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο Αποστόλης Κουρδουκλάς)* *Έστω η εξίσωση*

$$x^2 - 2\lambda x - y^2 - 4\lambda y - 3\lambda^2 = 0 \ \ (Q_\lambda).$$

(α) Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο κάθετες ευθείες μεταξύ τους $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των ευθειών για τις διάφορες τιμές του λ.

(γ) Αν μια ευθεία της οικογένειας (Q_λ) *με θετικό συντελεστή διέρχεται από το σημείο* $(-3, 0)$ *να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή* λ_0 *της μεταβλητής* λ. *Δείξτε ότι για την ανωτέρω τιμή* λ_0 *οι ευθείες της οικογένειας* Q_{λ_0} *είναι συμμετρικές ως προς την* $x = -1$.

(δ) Ας ονομάσουμε στη συνέχεια τις δύο αυτές ευθείες της οικογένειας Q_{λ_0} *με* ε_1 *-την ευθεία που έχει θετικό συντελεστή διεύθυνσης- και* ε_2 *-την ευθεία η οποία έχει αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης. Να βρεθούν οι παράλληλες ευθείες στις* ε_1, ε_2 *που βρίσκονται σε απόσταση* $3\sqrt{2}$ *από αυτές.*

(ε) Έστω (δ_1) *η παράλληλη στην* ε_1 *που δεν διέρχεται από το 2ο τεταρτημόριο και* δ_2 *αυτή που είναι παράλληλη στην* ε_2 *και διέρχεται από το 1ο τεταρτημόριο. Οι ευθείες* ε_1, ε_2, δ_1, δ_2 *προφανώς τέμνονται ανά δύο. Τι είδος παραλληλόγραμμο σχηματίζουν·*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=39222

Λύση (Κακαβάς Βασίλειος)

(α) Είναι

$$\begin{aligned} x^2 - 2\lambda x - y^2 - 4\lambda y - 3\lambda^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - (y^2 + 4\lambda y + 4\lambda^2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (x-\lambda)^2 - (y+2\lambda)^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (x - y - 3\lambda)(x + y + \lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ x - y - 3\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad x + y + \lambda = 0, & \end{aligned}$$

που σημαίνει τα σημεία $M(x, y)$ ανήκουν στις ευθείες $(\varepsilon_1) : x - y - 3\lambda = 0$ ή $(\varepsilon_2) : x + y + \lambda = 0$ που είναι κάθετες αφού το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης είναι -1.

(β) Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1) \ : \ \ x - y - 3\lambda = 0 \\ (\varepsilon_2) \ : \ \ x + y + \lambda = 0 \end{aligned}$$

προκύπτει η λύση $(x_0, y_0) = (\lambda, -2\lambda)$, οπότε το σημείο τομής είναι σημείο της ευθείας $y = -2x$.

(γ) Για την ευθεία που ανήκει το σημείο $(-3, 0)$ θα ισχύει ότι

$$-3 - 3\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1.$$

Άρα έχουμε τις ευθείες $(\varepsilon_1) \ : \ x - y + 3 = 0$, $(\varepsilon_2) \ : \ x + y - 1 = 0$ που τέμνονται στο σημείο $(-1, \ 2)$.
Τώρα αν $(x_1, \ y_1)$ είναι σημείο της $x - y + 3 = 0$ και το συμμετρικό ως προς την ευθεία $x = -1$ είναι το $(x_2, \ y_2)$ θα ισχύει ότι $-1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y_1 = y_2$. Άρα $x_1 = -2 - x_2$ και επειδή ισχύει

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 + 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ -2 - x_2 - y_2 + 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ x_2 + y_2 - 1 = 0 & \end{aligned}$$

σημαίνει ότι το $(x_2, \ y_2)$ είναι σημείο της ευθείας $(\varepsilon_2) \ : \ x + y - 1 = 0$. Άρα οι ευθείες $(\varepsilon_1) \ : \ x - y + 3 = 0, (\varepsilon_2) \ : \ x + y - 1 = 0$ είναι συμμετρικές ως προς την $x = -1$.

(δ) Αν $M(x_M, y_M)$ σημείο της παράλληλης προς την $(\varepsilon_1) \ x - y + 3 = 0$ σε απόσταση $3\sqrt{2}$ θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} d(M, \varepsilon_1) = \frac{|x_M - y_M + 3|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \\ |x_M - y_M + 3| = 6 \quad &\Leftrightarrow \\ \{x_M - y_M - 3 = 0, \ \ x_M - y_M + 9 = 0\} & \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι είναι σημείο των ευθειών $x - y - 3 = 0$, $x - y + 9 = 0$ με $(\delta_1) \ : \ x - y - 3 = 0$ να

είναι αυτή που δεν διέρχεται από το από το 2ο τεταρτημόριο, αφού τέμνει τους $Ox,\ Oy'$.

Ακόμη αν $M(x_M, y_M)$ σημείο της παράλληλης προς την (ε_2) $x + y - 1 = 0$ σε απόσταση $3\sqrt{2}$ θα ισχύει ότι

$$d(M, \varepsilon_2) = \frac{|x_M + y_M - 1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x_M + y_M - 1| = 6 \quad \Leftrightarrow$$

$$\{x_M + y_M - 7 = 0,\ \ x_M + y_M + 5 = 0\}$$

που σημαίνει ότι είναι σημείο των ευθειών $x + y - 7 = 0$, $x + y + 5 = 0$ με (δ_2) : $x + y - 7 = 0$ να είναι αυτή που διέρχεται από το από το 1ο τεταρτημόριο αφού τέμνει τους Ox, Oy και το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν είναι τετράγωνο πλευράς $3\sqrt{2}$.

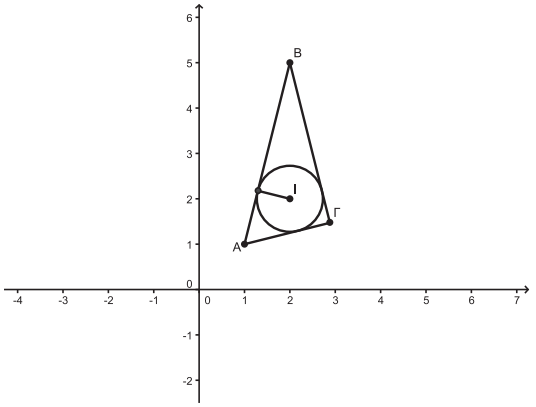
ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Χρήστος Ευαγγελινός) Έστω $A(1,1)$, $B(2,5)$ δύο κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ και $I(2,2)$ το έγκεντρό του. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=192483

Λύση 1 (Γιώργος Βισβίκης) Η εξίσωση της ευθείας AB είναι:

$$y - 1 = 4(x - 1) \Leftrightarrow 4x - y - 3 = 0$$



Η απόσταση του σημείου I από την AB είναι ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου με $\rho = \dfrac{|4 \cdot 2 - 2 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1}} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$.

$A\Gamma : y - 1 = \lambda(x - 1) \Leftrightarrow \lambda x - y - \lambda + 1 = 0$.

Το I θα απέχει και από την $A\Gamma$ απόσταση ίση με ρ.

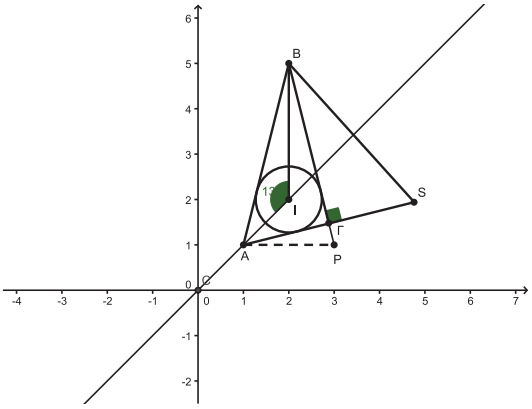
Άρα $\dfrac{|\lambda - 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$, απ' όπου βρίσκουμε $\lambda = 4$ που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της AB και $\lambda = \dfrac{1}{4}$ που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της $A\Gamma$. Οπότε, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$ (1).

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της $B\Gamma$ είναι $\mu = -4$.

Άρα, $B\Gamma : y - 5 = -4(x - 2) \Leftrightarrow y = -4x + 13$ (2)

Η τρίτη κορυφή Γ έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2). Δηλαδή, $\Gamma\left(\dfrac{49}{17}, \dfrac{25}{17}\right)$.

Λύση 2 (Νίκος Φραγκάκης) Επειδή η διχοτόμος της γωνίας B είναι η ευθεία με εξίσωση: $x = 2$, η πλευρά BC θα διέρχεται από το συμμετρικό του $A(1,1)$ ως προς αυτή δηλαδή από το $\boxed{P(3,1)}$. Ομοίως η διχοτόμος της γωνίας A ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, άρα η ευθεία AC θα διέρχεται από το συμμετρικό του $B(2,5)$ ως προς την $y = x$ δηλαδή το $\boxed{S(5,2)}$. Η τομή των ευθειών BP *και* AS δίδει το σημείο C.



Είναι $\begin{cases} BP \to y = -4x + 13 \\ AS \to 4y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{49}{17} \\ y = \dfrac{25}{17} \end{cases}$ που είναι και οι συντεταγμένες που ζητάμε.

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο parmenides51) Έστω η συνάρτηση* $f(x) = e^{-x}$ *με* $x \geq 0$ *και ο δειγματικός χώρος* Ω.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ *μπορεί να είναι πιθανότητα ενός ενδεχομένου* A *του* Ω *δηλαδή να ισχύει*

$$P(A) = f(x) = e^{-x}$$

για $x \geq 0$.

(β) Με δεδομένο το ερώτημα (α) να αποδείξετε ότι ο χώρος Ω *αποτελείται από μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=15652

Λύση (Μυρτώ Λιάπη)

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$0 \leq e^{-x} \leq 1$$

για κάθε $x > 0$, αφού πρέπει $0 \leq P(A) \leq 1$.
Η $e^{-x} \geq 0$ ισχύει πάντα.
Έστω $f(x) = e^{-x} - 1$. Τότε $f'(x) = -e^{-x} < 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.
Έτσι για $x \geq 0$ έπεται

$$f(x) \leq f(0) \quad \Rightarrow \quad e^{-x} - 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \leq 1.$$

(β) Αν ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα τότε

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad N(\Omega) = \frac{N(A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad N(\Omega) = \frac{N(A)}{e^x}.$$

Επειδή όμως ο $N(\Omega)$ είναι φυσικός αριθμός θα πρέπει ο $N(A)$ να είναι πολλαπλάσιο του e^x. Τότε ο $N(A)$ θα είναι άρρητος, άτοπο γιατί ο $N(A)$ είναι φυσικός. Έτσι ο δ.χ. αποτελείται από μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Αντώνης Κυριακόπουλος) Έστω* δ *η διάμεσος* ν *το πλήθος παρατηρήσεων:* $x_1, x_2, ..., x_\nu (\nu \geq 2)$. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:*

$$f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + ... + |x - x_\nu|$$

με $x = \delta$ *λαμβάνει ελάχιστη τιμή.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=5879

Λύση (Αντώνης Κυριακόπουλος) Έστω ότι:

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_\nu.$$

(α) Έστω ότι ο ν είναι περιττός: $\nu = 2\rho + 1$ $(\rho \in \mathbb{N}^*)$. Τότε:

$$x_1 \leq ... \leq x_\rho \leq x_{\rho+1} = \delta \leq x_{\rho+2} \leq ... \leq x_{2\rho} \leq x_{2\rho+1} \quad (I)$$

- Με $x < x_1$, έχουμε:

$$|x - x_1| + |x - x_{2\rho+1}| = -x + x_1 - x + x_{2\rho+1} = x_{2\rho+1} - x_1 + 2(x_1 - x) > x_{2\rho+1} - x_1.$$

- Με $x > x_{2\rho+1}$, έχουμε:

$$|x - x_1| + |x - x_{2\rho+1}| = x - x_1 + x - x_{2\rho+1} = x_{2\rho+1} - x_1 + 2\left(x - x_{2\rho+1}\right) > x_{2\rho+1} - x_1.$$

- Με $x_1 \leq x \leq x_{2\rho+1}$, έχουμε:

$$|x - x_1| + |x - x_{2\rho+1}| = x - x_1 - x + x_{2\rho+1} = x_{2\rho+1} - x_1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

$$|x - x_1| + |x - x_{2\rho+1}| \geq x_{2\rho+1} - x_1 \quad (1),$$

με το = μόνο αν $x_1 \leq x \leq x_{2\rho+1}$.
Όμοια:

$$|x - x_2| + \left|x - x_{2\rho}\right| \geq x_{2\rho} - x_2 \quad (2),$$

με το = μόνο αν $x_2 \leq x \leq x_{2\rho}$.

$$\left|x - x_\rho\right| + \left|x - x_{\rho+2}\right| \geq x_{\rho+2} - x_\rho \quad (\rho),$$

με το = μόνο αν $x_\rho \leq x \leq x_{\rho+2}$.

$$\left|x - x_{\rho+1}\right| \geq 0 \quad (\rho + 1)\ ,$$

με το = μόνο αν $x = x_{\rho+1}$.
Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε:

$$f(x) \geq \left(x_{2\rho+1} + x_{2\rho} + ... + x_{\rho+2}\right) - \left(x_1 + x_2 + ... + x_\rho\right) \quad (II)$$

Παρατηρούμε ότι, με $x \neq x_{\rho+1}$, η $(\rho+1)$ σχέση ισχύει με το $>$ και άρα η (II) ισχύει με το $>$. Ενώ με $x = x_{\rho+1} = \delta$, λόγω των (I) κάθε μια από τις $(\rho+1)$ σχέσεις ισχύει με το = και άρα η (II) ισχύει με το = . Συνεπώς, με $x = \delta$ η συνάρτηση f λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

(β) Έστω ότι ο ν είναι άρτιος: $\nu = 2\rho$ $(\rho \in \mathbb{N}^*)$. Τότε:

$$x_1 \leq ... \leq x_\rho \leq \frac{x_\rho + x_{\rho+1}}{2} = \delta \leq x_{\rho+1} \leq ... \leq x_{2\rho-1} \leq x_{2\rho} \quad (I')$$

Όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι:

$$|x - x_1| + \left|x - x_{2\rho}\right| \geq x_{2\rho} - x_1 \quad (1'),$$

με το (=) μόνο αν$x_1 \leq x \leq x_{2\rho}$.

$$|x - x_2| + \left|x - x_{2\rho-1}\right| \geq x_{2\rho-1} - x_2 \quad (2'),$$

με το = μόνο αν $x_2 \leq x \leq x_{2\rho-1}$.

$$\left|x - x_\rho\right| + \left|x - x_{\rho+1}\right| \geq x_{\rho+1} - x_\rho \quad (\rho'),$$

με το = μόνο αν $x_\rho \leq x \leq x_{\rho+1}$.
Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε:

$$f(x) \geq \left(x_{2\rho} + x_{2\rho-1} + ... + x_{\rho+1}\right) - \left(x_1 + x_2 + ... + x_\rho\right) \quad (II')$$

Παρατηρούμε ότι με $x = \dfrac{x_\rho + x_{\rho+1}}{2} = \delta$, λόγω των (I'), κάθε μια από τις (ρ') σχέσεις ισχύει με το = και άρα η (II') ισχύει με το =. Συνεπώς με $x = \delta$ η συνάρτηση f λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Επιμελητής: Λευτέρης Πρωτοπαπάς

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς) Αν για τον μιγαδικό z γνωρίζουμε ότι η εικόνα του είναι σημείο κύκλου κέντρου $K(0,\,1)$ και ακτίνας 2, να βρεθεί η μέγιστη τιμή του*

$$|z^2-(2z+1)i+z-5|\,.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=40335

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Θέτοντας $w=z-i$ το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο εξής:
Αν $|w|=2$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|w^2+w-4|$.
Αν $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+y^2=4$ και επίσης

$$\begin{aligned}|w|^2&=(x^2-y^2+x-4)^2+(2xy+y)^2\\&=(2x^2+x-8)^2+(4-x^2)(2x+1)^2\\&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&=68-16x^2\,.\end{aligned}$$

Τότε είναι $|w|^2\le 68\implies |w|\le 2\sqrt{17}$ και η ισότητα ισχύει π.χ. όταν $x=0,\ y=2$.
Άρα το ζητούμενο μέγιστο ισούται με $2\sqrt{17}$.

Λύση 2 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Είναι

$$\begin{aligned}|z^2-(2z+1)i+z-5|&=|z^2-2iz+i^2+z-i-4|\\&=\left|(z-i)^2+(z-i)-4\right|\\&=\left|(z-i)^2+(z-i)-(z-i)\,\overline{(z-i)}\right|\\&=2\,|(z-i)+1-(\bar z+i)|\\&=2\,|z-\bar z+1-2i|\\&=2\sqrt{1+4(\mathrm{Im}\,(z)-1)^2}\\&\overset{z=3i}{\le}2\sqrt{1+4(3-1)^2}\\&=2\sqrt{17}\,.\end{aligned}$$

Λύση 3 (Κώστας Χριστόπουλος) Θα μπορούσε κανείς από εδώ $2\,|z-\bar z+1-2i|=2\,|(z-\bar z)-(-1+2i)|$ και πέρα, να το αντιμετωπίσει και γεωμετρικά, ως την μέγιστη απόσταση του σημείου $(-1,2)$ από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(0,-2)$ και $(0,6)$.
Άρα $|(z-\bar z)-(-1+2i)|_{max}=\sqrt{17}$, όταν η εικόνα του z είναι $(0,3)$ ή $(0,-1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Βασίλης Ευαγγέλου) Δίνεται μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει*

$$11z^{10}+10iz^9+10iz-11=0.$$

Να αποδειχθεί ότι:

(α) $|z|=1$.

(β) $\left(\dfrac{2z-zi-2i+1}{1+zi}\right)^2\le 0$.

(γ) $Re\,(z)=\dfrac{|z+1|^2-2}{2}$.

(δ) $|z^2-3z+1|=5-|z+1|^2$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=27420

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος)

(α) Ο μιγαδικός ικανοποιεί και την

$$z^9=\frac{11-10zi}{11z+10i},$$

άρα και την

$$|z|^9=\frac{|11-10iz|}{|11z+10i|}.$$

Θέτοντας $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, βρίσκουμε

$$(x^2+y^2)^9=\frac{121+220y+100y^2+100x^2}{121x^2+121y^2+220y+100}.$$

Αν υποθέσουμε ότι $x^2+y^2>1$ καταλήγουμε από την παραπάνω σχέση ότι $x^2+y^2<1$, άτοπο. Ομοίως αν $x^2+y^2<1$. Άρα $x^2+y^2=1$.

(β) Είναι $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$, άρα ο συζυγής του μιγαδικού

$$\frac{2z - zi - 2i + 1}{1 + zi}$$

είναι ο

$$\frac{\dfrac{2}{z} + \dfrac{i}{z} + 2i + 1}{1 - \dfrac{i}{z}} = \frac{2 + i + 2iz + z}{z - i}$$

ο οποίος, αν πολλαπλασιαστεί ¨πάνω κάτω¨ με i βλέπουμε ότι ισούται με

$$-\frac{2z - zi - 2i + 1}{1 + zi}.$$

Άρα ο εν λόγω μιγαδικός είναι φανταστικός και επομένως το τετράγωνό του είναι μη θετικό.

(γ) Είναι

$$\begin{aligned}\frac{|z+1|^2 - 2}{2} &= \frac{(z+1)(\bar{z}+1) - 2}{2} \\ &= \frac{|z|^2 + z + \bar{z} + 1 - 2}{2} \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2} \\ &= Re(z)\,.\end{aligned}$$

(δ) Είναι, όπως είδαμε και παραπάνω

$$|z+1|^2 = z + \bar{z} + 2 \qquad (1)$$

Επίσης είναι

$$\begin{aligned}|z^2 - 3z + 1|^2 &= (z^2 - 3z + 1)(\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 1) \\ &= (z^2 - 3z + 1)\Big(\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} + 1\Big) \\ &= \frac{(z^2 - 3z + 1)^2}{z^2} \\ &= \Big(z + \frac{1}{z} - 3\Big)^2 \\ &= (z + \bar{z} - 3)^2\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$|z^2 - 3z + 1| = |z + \bar{z} - 3|,$$

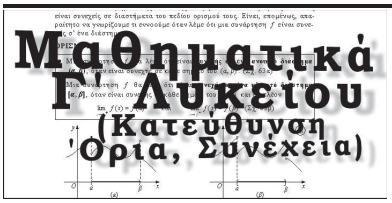
όπου στο δεξί μέλος εμφανίζεται απόλυτη τιμή, αφού ο $z + \bar{z}$ είναι πραγματικός. Μάλιστα, είναι $z + \bar{z} < 3$, αφού $z + \bar{z} = 2Re(z) \le 2|z| = 2$.

Λύση 2 (Βασίλης Μαυροφρύδης)

(α) Ας υποθέσουμε ότι $|z| > 1$. Τότε

$$\begin{aligned}|z| > 1 \quad &\Rightarrow \quad \left|z^9\right| > 1 \\ &\Rightarrow \quad \left|\frac{11 - 10zi}{11z + 10i}\right| > 1 \\ &\Rightarrow \quad |11 - 10zi|^2 > |11z + 10i|^2 \\ &\Rightarrow \quad \text{.....} \\ &\Rightarrow \quad 21 > 21|z|^2 \\ &\Rightarrow \quad |z| < 1\,.\end{aligned}$$

Όμοια αν υποθέσουμε ότι $|z| < 1$ καταλήγουμε πάλι σε άτοπο. Άρα το μέτρο ισούται με 1.



Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις με τύπους:*

$$f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$$

και

$$g(x)=x^2-2x+4\,.$$

Να ορίσετε και στη συνέχεια να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις $f\circ g$ καθώς και τη $g\circ f$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=38484

Λύση (Ευάγγελος Παπαπέτρος) Είναι $D(f)=D(g)=\mathbb{R}$. Επίσης, ισχύει ότι

$$D(f\circ g), D(g\circ f)\subseteq\mathbb{R}\quad (I).$$

Έστω τώρα $x\in\mathbb{R}$. Τότε $x\in D(g)$ και $x\in D(f)$ και $f(x)\in\{-1,0,1\}\subset\mathbb{R}\quad\Rightarrow$

$$f(x)\in\mathbb{R}=D(g)\,.$$

$$g(x)=x^2-2x+4\in\mathbb{R}=D(f)\,.$$

Επομένως

$$\mathbb{R}\subseteq D(f\circ g),\, D(g\circ f)\quad (II).$$

Από τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε ότι

$$D(f\circ g)=D(g\circ f)=\mathbb{R}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. Όμως

$$g(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0\,,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

και συνεπώς

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=1.$$

Η $f\circ g$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Έχουμε $(g\circ f)(x)=g(f(x))\,,\ x\in\mathbb{R}$.
Ας είναι $x\in\mathbb{R}$:
Αν $x<0$, τότε $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-1)=7$.
Αν $x=0$, τότε $(g\circ f)(x)=g(f(0))=g(0)=4$.
Αν $x>0$, τότε $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=3$.
Έτσι,

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}7, x<0\\ 4, x=0\\ 3, x>0\end{cases}$$

Η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως σταθερή και ασυνεχής στο σημείο $x=0$ διότι

$$\lim_{x\to0^-}(g\circ f)(x)=7\neq4=g(0)\neq3=\lim_{x\to0^+}(g\circ f)(x).$$

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Λάμπρος Μπαλός) Για $x>0$ και για τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση f είναι*

$$f(e^{f(x)})=\ln x.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=39318

Λύση 1 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)+\ln x,\quad x>0$$

είναι γνησίως αύξουσα και άρα συνάρτηση 1 - 1. Είναι

$$\begin{aligned}g\left(e^{f(x)}\right)&=f\left(e^{f(x)}\right)+\ln e^{f(x)}\\ &=\ln x+f(x)\\ &=g(x) &&\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\\ e^{f(x)}&=x &&\Leftrightarrow\\ f(x)&=\ln x\,.\end{aligned}$$

Λύση 2 (Μιχάλης Λάμπρου) Θα χρησιμοποιήσω το τετριμμένο γεγονός ότι αν g γνήσια αύξουσα συνάρτηση (και άρα αντιστρέψιμη) με $g=g^{-1}$, τότε η g είναι η ταυτοτική (πράγματι, αν π.χ. $g(x)>x$ τότε αφού g^{-1} γνήσια αύξουσα έχουμε

$$x=g^{-1}(g(x))>g^{-1}(x)=g(x)>x,$$

άτοπο και λοιπά).
Πίσω στην άσκηση: Αν συμβολίσουμε με E την εκθετική, τότε η δοθείσα γράφεται

$$f \circ E \circ f = E^{-1}.$$

Άρα

$$E \circ f = f^{-1} \circ E^{-1} = (E \circ f)^{-1},$$

οπότε $E \circ f =$ ταυτοτική, που σημαίνει $f = E^{-1} = \ln$.

Λύση 3 (Κώστας Ζερβός) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ με $f(x_0) > \ln x_0$, τότε

$$e^{f(x_0)} > e^{\ln x_0} \quad \Rightarrow \quad e^{f(x_0)} > x_0 \, .$$

Αλλά $e^{f(x_0)} > 0$, $x_0 > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα

$$f\left(e^{f(x_0)}\right) > f(x_0) \quad \Rightarrow \quad \ln x_0 > f(x_0)$$

που είναι άτοπο.
Όμοια αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ με $f(x_0) < \ln x_0$.

Άρα $f(x) = \ln x$, $\forall x > 0$.

Λύση 4 (Λάμπρος Μπαλός) Ονομάζω $e^x = k(x)$, οπότε $\ln x = k^{-1}(x)$. Είναι

$$f(k(f(x))) = k^{-1}(x) \, .$$

Για $x = k(x)$ γίνεται

$$f(k(f(k(x)))) = x \, .$$

Ονομάζω $f(k(x)) = g(x)$, οπότε $g(g(x)) = x$. Η $g(g(x))$ είναι η $f(e^x)$ γνησίως αύξουσα, δηλαδή 1 - 1, δηλαδή αντιστρέψιμη. Προκύπτει λοιπόν $g(x) = g^{-1}(x)$ και εφόσον είναι γνησίως αύξουσα, ισοδυναμεί με την $g(x) = x$. Δηλαδή

$$f(k(x)) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = k^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \ln x \, .$$

Επιμελητής: Βασίλης Κακαβάς

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής: $f'(x)=e^{x+f(-x)},\ \forall x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=41418

Λύση 1 (Νίκος Ζανταρίδης) θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x, x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων και είναι $g(0)=f(0)-0=0$.

Έχουμε

$f'(x)=e^{x+f(-x)}\Rightarrow (g(x)+x)'=e^{x+g(-x)-x}\Rightarrow$

$g'(x)=e^{g(-x)}-1:(1)$ και $g'(-x)=e^{g(x)}-1:(2)$.

Ακόμη

$(1)\wedge(2)\Rightarrow g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)=g'(-x)\left(e^{g(-x)}-1\right)\Rightarrow$

$e^{g(x)}g'(x)+e^{g(-x)}(g(-x))'=g'(x)+(g(-x))'\Rightarrow$

$\left(e^{g(x)}+e^{g(-x)}\right)'=(g(x)+g(-x))'\Rightarrow$

$e^{g(x)}+e^{g(-x)}=g(x)+g(-x)+c.$

Για $x=0$ έχουμε

$e^{g(0)}+e^{g(-0)}=g(0)+g(-0)+c\Leftrightarrow c=2.$

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$e^{g(x)}+e^{g(-x)}=g(x)+g(-x)+2:(3)$

Είναι γνωστό ότι ισχύει $e^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Έτσι έχουμε $e^{g(x)}\geq g(x)+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $g(x)=0$.

Ακόμη ισχύει $e^{g(-x)}\geq g(-x)+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $g(-x)=0$.

Επομένως ισχύει $e^{g(x)}+e^{g(-x)}\geq g(x)+g(-x)+2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $g(x)=g(-x)=0$.

Ετσι για να ισχύει η (3) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι $g(x)=g(-x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-x=0\Leftrightarrow f(x)=x$. Η τελευταία συνάρτηση ικανοποιεί την υπόθεση.

Λύση 2 (Ροδόλφος Μπόρης) Έστω $g(x)=f(x)-x$. Προφανώς η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x)=(-f'(-x)+1)e^{x+f(-x)}\\ &= (-f'(-x)+1)f'(x)=(-e^{f(x)-x}+1)f'(x)\\ &= (1-e^{g(x)})(1+g'(x)),\quad g(0)=0\ (1)\end{aligned}$$

Αν τώρα η g δεν ήταν σταθερή, δε θα μπορούσε να έχει 2η ριζα $r>0$ γιατί τότε θα υπήρχε διάστημα (a,b) με $a>0,\ b>0$ τέτοιο ώστε $g(a)=0,\ g(b)=0$ και $g(x)\neq 0,\ x\in(a,b)$. (Αν g όχι σταθερή στο $[0,a]$ τότε $a=0$).

Εκεί θα είχαμε επιπλέον ότι $g''(x)\neq 0$ αφού $g(x)\neq 0$ που καταλήγει σε άτοπο μια που $g'(a)=0, g'(c)=0$ (από θεώρημα *Rolle* στην g στο (a,b) και πάλι θεώρημα *Rolle* στην g' στο (a,c)). Όμοια εργαζόμαστε αν $r<0$. Άρα η g έχει σταθερό πρόσημο για $x>0$ και όμοια για $x<0$.

Αν ήταν $g(x)>0$ στο R_+ τότε $g''(x)<0,\ (2)$ άρα $g'(x)<g'(0)=0$ οπότε $g(x)<0$ αντίφαση. Όμοια εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}_-$

Συνεπώς η συνάρτηση g είναι σταθερή με $g(0)=0$. Άρα $g(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$

Παραπάνω:

1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσαμε ότι $a=0$.
2. $g'(0)=f'(0)-1=e^{0+f(0)}-1=0$.
3. Η (2) προκύπτει από τη σχέση (1) αφού από την τελευταία παίρνουμε

$$\begin{aligned} g''(x) &= (e^0-e^{g(x)})(1+g'(x))\\ &= -g(x)e^u(1+g'(x))\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας στην τελευταία ισότητα το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την e^x και το γεγονός ότι $(1+g'(x))=e^{x+f(-x)}>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Κώστας Ζερβός) Έστω η παραγωγίσιμη γνησίως αύξουσα και κυρτή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=\lambda x+\beta$:*

(α) Να αποδειχτεί ότι $\lambda>0$.

(β) Να βρεθεί (αν υπάρχει) η ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ στο $+\infty$.

(γ) Να αποδειχτεί ότι $\lambda\cdot f^{-1}(x)+\beta<x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=40954

Λύση (Βασίλης Κακαβάς)

(α) Επειδή η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή η f' θα είναι γνήσια αύξουσα και αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0\in R$ ώστε $f'(x_0)=0$ τότε για $x<x_0$ θα ισχύει ότι $f'(x)<f'(x_0)=0$ επομένως f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,\ x_0]$ άτοπο αφού η f είναι γνήσια αύξουσα στο R άρα $f'(x)>0,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Τώρα αν θεωρήσουμε μία εφαπτομένη της f σε σημείο της $(x_0,\ f(x_0))$ αυτή θα έχει εξίσωση

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x_0)(x-x_0)=+\infty$ (λόγω του ότι $f'(x_0)>0$) άρα για την $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ και λόγω της θέσης της εφαπτομένης για μια κυρτή συνάρτηση, θα ισχύει ότι $f(x)\geq g(x),\ \ x\in\mathbb{R}$, επομένως θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Ακόμη ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x-\beta)=0$ και έτσι αν $h(x)=f(x)-\lambda x-\beta$ έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ και αφού $\lambda x=f(x)-h(x)-\beta$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-h(x)-\beta)=+\infty$, άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to\infty}(\lambda x)=+\infty$ επομένως αναγκαία $\lambda>0$.

(β) Είναι $f^{-1}(f(x))=x,\ \ x\in\mathbb{R}$ και με $x>0$ είναι

$\frac{f^{-1}(f(x))}{x}=1$ ή $\frac{f^{-1}(f(x))}{f(x)}\frac{f(x)}{x}=1$ άρα αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda>0$ θα είναι $\frac{f^{-1}(f(x))}{f(x)}=\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}$ και άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(f(x))}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{1}{\lambda}$.

Επομένως επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ με $u=f(x)$ θα ισχύει ότι $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f^{-1}(u)}{u}=\frac{1}{\lambda}$.

Επίσης

$$f^{-1}(f(x))=x\Leftrightarrow f^{-1}(f(x))-\frac{1}{\lambda}f(x)=\frac{\lambda x-f(x)}{\lambda}$$

και επειδή ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta$ θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f^{-1}(f(x))-\frac{1}{\lambda}f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lambda x-f(x)}{\lambda}=-\frac{\beta}{\lambda}$ οπότε $\lim\limits_{u\to+\infty}(f^{-1}(u)-\frac{1}{\lambda}u)=-\frac{\beta}{\lambda}$, άρα η ευθεία $y=\frac{1}{\lambda}x-\frac{\beta}{\lambda}$ είναι ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ στο $+\infty$.

(γ) Βάζοντας όπου x το $f(x)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lambda\cdot f^{-1}(f(x))+\beta<f(x)\Leftrightarrow\lambda x+\beta<f(x)$$

Γι΄ αυτό θεωρώντας την συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-\lambda x-\beta$$

για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ και $h'(x)=f'(x)-\lambda$ και επειδή f' γνήσια αύξουσα θα είναι και η h' γνήσια αύξουσα άρα η h κυρτή στο $\mathbb{R}$, θέλουμε να δείξουμε ότι $h(x)>0$. Έτσι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0\in R$ ώστε $h'(x_0)>0$ τότε όπως προηγούμενα λόγω κυρτότητας της h θα προκύψει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ που είναι άτοπο άρα θα είναι $h'(x)\leq 0,\ \ x\in R\quad(1)$

Ακόμη αν υπάρχει $x_0\in R$ ώστε $h'(x_0)=0$ επειδή h' γνήσια αύξουσα θα ισχύει για $x>x_0$ ότι $h'(x)>h'(x_0)=0$, άτοπο λόγω της (1) άρα ισχύει ότι $h'(x)<0,\ \ x\in\mathbb{R}$ δηλαδή η h είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ θα είναι $h(x)>0,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Επιμελητής: Ροδόλφος Μπόρης

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Δημήτρης Βερροιόπουλος) Να αποδειχθεί ότι:* $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^{xt}}{t^2}dt \le e\,(1-x)$ *με* $x > 0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=191552

Λύση (Γιώργης Καλαθάκης)

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^{xt}}{t^2}dt \le e\,(1-x) \Longleftrightarrow$$

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^{xt}}{(xt)^2}x\,dt \le \frac{e\,(1-x)}{x} \overset{xt=u,\ du=xdt}{\Longleftrightarrow}$$

$$\int_x^1 \frac{e^u}{u^2}du - \frac{e\,(1-x)}{x} \le 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{e\,(1-x)}{x} + \int_1^x \frac{e^u}{u^2}du \ge 0$$

Έστω

$$F(x) = \frac{e\,(1-x)}{x} + \int_1^x \frac{e^u}{u^2}du \quad x > 0.$$

Η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = \left(\frac{e\,(1-x)}{x} + \int_1^x \frac{e^u}{u^2}du\right)' = -\frac{e}{x^2} + \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x - e}{x^2}$$

και $F'(x) \ge 0 \Longleftrightarrow x \ge 1$. Άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$ ίσο με $F(1) = 0$. Άρα $F(x) \ge 0$ για κάθε $x > 0$.

Παρατηρήσεις

1. (από το μέλος Fermat) Η άσκηση λύνεται και με χρήση της ανισότητας Chebyshev:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx,$$

αν η μια από τις δυο συναρτήσεις είναι αύξουσα και η άλλη είναι φθίνουσα στο $[a,b]$.

2. (Γιώργος Βασδέκης) (Υπόδειξη για τη λύση της άσκησης):

Ισχύει

$$\frac{e^{xt}}{t^2} \le \frac{e}{t^2}$$

και τα υπόλοιπα είναι εύκολα.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης* $f : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ *για την οποία ισχύουν:*

- $f\,(1) = 1$,
- *Η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $(1,+\infty)$,
- *Για κάθε* $x > 1$ *είναι* $x^{xf(x)} = f(x)^{f'(x)\ln x}$,
- *Για κάθε* $x \in [1,+\infty)$ *είναι* $\int_x^{x+1} f\,(t)\,dt < f\,(x)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=37941

Λύση (Κώστας Ζερβός) Από τη σχέση

$$x^{xf(x)} = f(x)^{f'(x)\ln x} \quad \text{για κάθε} \quad x > 1$$

έχουμε $xf(x)\ln x = f'(x)\ln x \ln f(x)$ και επειδή $\ln x > 0$ για κάθε $x > 1$, έχουμε $xf(x) = f'(x)\ln f(x)$.

Αλλά $f(x) > 0$, άρα

$$x = \frac{f'(x)}{f(x)}\ln f(x) \Longleftrightarrow 2x = 2\frac{f'(x)}{f(x)}\ln f(x)$$
$$\Longleftrightarrow (x^2)' = (\ln^2 f(x))',$$

επομένως υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\ln^2 f(x) = x^2 + c, \quad x > 1$.

Αλλά η f είναι συνεχής, άρα

$$\lim_{x\to 1^+} \ln^2 f(x) = \ln^2 f(1) = 0$$

και $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+c) = 1+c$, επομένως $c=-1$ και έτσι $\ln^2 f(x) = x^2-1, \quad x>1$. Για $x>1$ είναι $x^2-1\neq 0$, άρα $\ln^2 f(x)\neq 0$ και ως συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αρα

$$\ln f(x) = \sqrt{x^2-1} \quad \text{ή} \quad \ln f(x) = -\sqrt{x^2-1},$$

επομένως

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{ή} \quad f(x) = e^{-\sqrt{x^2-1}} \quad \text{για κάθε} \quad x\geq 1.$$

Από το ΘΜΤ για την $g(x) = \int_1^x f(t)dt$ στο $[x, x+1]$ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ ώστε $g(x+1)-g(x) = g'(\xi)$ άρα $\int_x^{x+1} f(t)dt = f(\xi)$ και λόγω της $\int_x^{x+1} f(t)\,dt < f(x)$ θα έχουμε

$$f(\xi) < f(x), \tag{1}$$

όπου $x<\xi$.

- Αν $f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ γιατί

  $$f'(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0, \qquad x>1$$

  και απορίπτεται λόγω της (1).

- Αν $f(x) = e^{-\sqrt{x^2-1}}$: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ γιατί

  $$f'(x) = -e^{\sqrt{x^2-1}}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0, \qquad x>1$$

  και είναι δεκτή.

Άρα $f(x) = e^{-\sqrt{x^2-1}}, \qquad x\geq 1.$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου
(Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη)

Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Αποστόλης Κουρδουκλάς)* *Δίδεται η συνάρτηση*

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln\sqrt{x}+\dfrac{7}{3}-c & ,x\geq 1\\ x\log\dfrac{1}{x}+c & ,0<x<1\\ \dfrac{7}{6} & ,x=0\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

1. *Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο της.*
2. *Να βρείτε το σύνολο τιμών της.*
3. *Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται της C_f των ευθειών $x=0$, $x=1$ και του άξονα $x'x$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=195414

Λύση (Ευάγγελος Παπαπέτρος) Αρχικά $D(f)=[0,+\infty)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x=1$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\in\mathbb{R}$. Ειδικότερα

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x) \quad &\Leftrightarrow\\ \lim_{x\to 1^-}\left(x\log\frac{1}{x}+c\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2\ln\sqrt{x}+\frac{7}{3}-c\right) \quad &\Leftrightarrow\\ c=\frac{7}{3}-c \quad &\Leftrightarrow\\ c=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν και τον τύπο αλλαγής βάσης για τους λογαρίθμους, έχουμε ότι

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln\sqrt{x}+7/6\,, & x\in[1,+\infty)\\ (-x\ln x/\ln 10)+7/6\,, & x\in(0,1)\\ 7/6\,, & x=0\end{cases}$$

(α) Για κάθε $x>1$ είναι

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x\ln\sqrt{x}+x^2\cdot\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}\\ &=2x\ln\sqrt{x}+\frac{x}{2}>0\end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Επί πλέον, για $x\in(0,1)$ είναι

$$f'(x)=-\frac{\ln x+1}{\ln 10}$$

και άρα

$$\begin{aligned}f'(x)<0 \quad &\Leftrightarrow \quad x\in\left(\tfrac{1}{e},1\right)\\ f'(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{e}\\ f'(x)>0 \quad &\Leftrightarrow \quad x\in\left(0,\tfrac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}x\ln x&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}\overset{D.L.H}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}\\ &=\lim_{x\to 0}(-x)=0\,.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η f είναι συνεχής στο σημείο $x=0$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},1\right]$ γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x=\frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e\ln 10}+\frac{7}{6}$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x=1$ το $f(1)=\frac{7}{6}$.

Επίσης, είναι φανερό ότι $f(x)\geq f(0)=\frac{7}{6}\,,x\geq 0$ και συνεπώς, η f παρουσιάζει στο σημείο $x=0$ ολικό ελάχιστο, το $f(0)=\frac{7}{6}$.

Παρατηρήσεις: Ενώ η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $x=1$ του $[0,+\infty)$, δεν ισχύει ότι $f'(1)=0$ διότι η f δεν

παραγωγίζεται στο σημείο αυτό. Πράγματι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{x\ln x}{-\ln 10\,(x-1)}\\ &= -\frac{1}{\ln 10}\lim_{x\to 1^-}\frac{x\ln x-1\ln 1}{x-1}\\ &= -\frac{1}{\ln 10}\left[\frac{d}{dx}(x\ln x)\right]_{x=1}\\ &= -\frac{1}{\ln 10}\left[\ln x+1\right]_{x=1}\\ &= -\frac{1}{\ln 10},\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2\ln\sqrt{x}}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2\ln\sqrt{x}-1^2\ln\sqrt{1}}{x-1}\\ &= \left[\frac{d}{dx}\left(x^2\ln\sqrt{x}\right)\right]_{x=1}\\ &= \left[2x\ln\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right]_{x=1}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Το ίδιο συμβαίνει και για το $x=0$ μιας και αυτό δεν είναι εσωτερικό σημείο του $[0,+\infty)$. Αντιθέτως, στο εσωτερικό σημείο $x=\frac{1}{e}$ του $[0,+\infty)$, η f παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με $f'(\frac{1}{e})=0$ (Θεώρημα Fermat).

Ακόμη, το $x=\frac{1}{e}$ είναι η μοναδική ρίζα της παραγώγου της f στο $(0,1)$ μιας και η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, $f(0)=f(1)=\frac{7}{6}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. (Βέβαια, αυτό το βλέπει κανείς, λύνοντας την εξίσωση $f'(x)=0\,,\ x\in(0,1)$.) Όσον αφορά το πρόσημο ισχύει $f(x)>0\,, x\geq 0$.

(β) Είναι

$$f\left([0,+\infty)\right) = \left[f(0), f\left(\tfrac{1}{e}\right)\right]\cup\left[f(1), f\left(\tfrac{1}{e}\right)\right]\cup\left[f(1), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

όπου

$$f(0)=\frac{7}{6}\,,\quad f\left(\tfrac{1}{e}\right)=\frac{1}{e\ln 10}+\frac{7}{6}\,,\quad f(1)=\frac{7}{6}\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\ln\sqrt{x}+\frac{7}{6}\right)=+\infty\,.$$

Έτσι $f\left([0,+\infty)\right)=\left[\frac{7}{6},+\infty\right)$.

1. Όπως δείξαμε στο **α)**, η f είναι συνεχής στο σημείο $x=0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{1/2}f(x)\,dx+\int_{1/2}^1 f(x)\,dx = I_1+I_2\,.$$

και αναμένουμε, η τιμή αυτού, να είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\frac{7}{6}$. Είναι

$$I_1=\int_0^{1/2}f(x)\,dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^{1/2}f(x)\,dx$$

με

$$\begin{aligned}\int_a^{1/2}f(x)\,dx &= \int_a^{1/2}\left(-\frac{x\ln x}{\ln 10}+\frac{7}{6}\right)dx\\ &= \left[\int_a^{1/2}-\frac{x\ln x}{\ln 10}\,dx+\int_a^{1/2}\frac{7}{6}\,dx\right]=\\ &\left[\left[-\frac{x^2\ln x}{2\ln 10}\right]_a^{1/2}+\int_a^{1/2}\frac{x^2}{2\ln 10}\cdot\frac{1}{x}\,dx+\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}-a\right)\right]=\\ &\left[\frac{\ln 2}{8\ln 10}+\frac{a^2\ln a}{2\ln 10}+\int_a^{1/2}\frac{x}{2\ln 10}\,dx+\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}-a\right)\right]=\\ &\left[\frac{\ln 2}{8\ln 10}+\frac{a^2\ln a}{2\ln 10}+\left[\frac{x^2}{4\ln 10}\right]_a^{1/2}+\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}-a\right)\right]\end{aligned}$$

άρα

$$I_1=\frac{2\ln 2+1}{16\ln 10}+\frac{7}{12}$$

και

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{1/2}^1 f(x)\,dx\\ &= \lim_{b\to 1^-}\int_{1/2}^b f(x)\,dx\\ &= \lim_{b\to 1^-}\int_{1/2}^b\left(-\frac{x\ln x}{\ln 10}+\frac{7}{6}\right)dx\\ &= \lim_{b\to 1^-}\left[\int_{1/2}^b-\frac{x\ln x}{\ln 10}\,dx+\int_{1/2}^b\frac{7}{6}\,dx\right]\\ &= \lim_{b\to 1^-}\left[\left[-\frac{x^2\ln x}{2\ln 10}\right]_{1/2}^b+\int_{1/2}^b\frac{x^2}{2\ln 10}\cdot\frac{1}{x}\,dx+\frac{7}{6}\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \lim_{b\to 1^-}\left[-\frac{\ln 2}{8\ln 10}-\frac{b^2\ln b}{2\ln 10}+\int_{1/2}^b\frac{x}{2\ln 10}\,dx+\frac{7}{6}\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \lim_{b\to 1^-}\left[-\frac{\ln 2}{8\ln 10}-\frac{b^2\ln b}{2\ln 10}+\left[\frac{x^2}{4\ln 10}\right]_{1/2}^b+\frac{7}{6}\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \lim_{b\to 1^-}\left[-\frac{\ln 2}{8\ln 10}-\frac{b^2\ln b}{2\ln 10}-\frac{1}{16\ln 10}+\frac{b^2}{4\ln 10}+\frac{7}{6}\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= -\frac{2\ln 2+1}{16\ln 10}+\frac{7}{12}\,.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Κώστας Ζερβός) Να βρεθούν οι* $x, y \in \mathbb{R}$, *αν*

$$(2x+3y)\sqrt{e^{2-4y}+y^2+(1-x)e^x+1} = (e^x+y)\sqrt{x^2+y^2+2xy+x+3},$$

και $x+2y=1$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=40496

Λύση (Αλέξανδρος Συγγελάκης)

Το ζεύγος $(-3,2)$ δεν είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων συνεπώς (για $y \neq 2$) αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση ότι $x = 1-2y$, η πρώτη εξίσωση γράφεται τελικά στη μορφή:

$$\frac{\sqrt{\left(e^{1-2y}+y\right)^2+1}}{e^{1-2y}+y} = \frac{\sqrt{(2-y)^2+1}}{2-y} \qquad (1)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^\star$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^\star$ συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0),\ (0, +\infty)$.

Όμως από την (1) οι αριθμοί $e^{1-2y}+y,\ 2-y$ είναι ομόσημοι συνεπώς η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(e^{1-2y}+y) = f(2-y)$$

και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα, είναι και $1-1$ άρα τελικά

$$e^{1-2y}+y = 2-y$$

δηλαδή

$$e^{1-2y} = 1+(1-2y).$$

Όμως από την γνωστή ανισότητα $e^x \geq 1+x$ η οποία ισχύει ως ισότητα μόνο για $x=0$ παίρνουμε τελικά $1-2y=0$ δηλαδή $y=\frac{1}{2}$ πράγμα που σημαίνει ότι $x=0$ και έτσι έχουμε το ζεύγος $(x,y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ που επαληθεύει το αρχικό σύστημα.

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\left(f(x)-x^2\right)\left(f''(x)-1\right)=1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

και είναι

$$f(0)=1,\quad f'(0)=0.$$

Να βρεθεί η f*.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&t=41822

Λύση (Θάνος Μάγκος) Θέτω $g(x)=f(x)-x^2$ οπότε το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο εξής:

> Αν $g(0)=1, g'(0)=0$ και $g(x)(g''(x)+1)=1$, να βρεθεί η g.

Έχουμε φανερά

$$g(x)\neq 0, g(0)>0$$

και g συνεχής. Επομένως $g(x)>0$ παντού. Είναι

$$g''(x)+1=\frac{1}{g(x)}\implies g'(x)g''(x)+g'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$
$$\implies \frac{1}{2}(g'(x))^2+g(x)=\ln g(x)+c.$$

Από τις αρχικές συνθήκες βλέπουμε ότι $c=1$. Τότε, από τη γνωστή ανισότητα $\ln A\le A-1$, προκύπτει

$$\frac{1}{2}(g'(x))^2\le 0\implies g'(x)\equiv 0\implies g \quad \text{σταθερή},$$

άρα $g(x)=1\quad \forall x$. Άρα $f(x)=x^2+1$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Αν* $0<a<b$ *και η* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *συνεχής και γνησίως αύξουσα, να αποδειχθεί ότι*

$$ab\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx<\int_a^b f(x)dx.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&t=38844

Λύση 1 (Κώστας Ζερβός) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt-a\int_a^x\frac{f(t)}{t^2}dt,\quad x\in[a,b].$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με

$$g'(x)=\cdots=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)dt}{x^2}$$
$$=\frac{x-a}{x^2}\left(f(x)-\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}\right).$$

Από το ΘΜΤ για την $h(x)=\int_a^x f(t)dt$ στο $[a,x]$ υπάρχει $\xi\in(a,x)$ ώστε

$$h'(\xi)=\frac{h(x)-h(a)}{x-a}\iff f(\xi)=\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}.$$

Αλλά η f είναι γνησίως αύξουσα , άρα

$$\xi<x\Rightarrow f(\xi)<f(x)\Rightarrow f(x)-\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}>0.$$

Επομένως $g'(x)>0$, άρα γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$, έτσι

$$g(b)>g(a)\Rightarrow\frac{1}{b}\int_a^b f(t)dt-a\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt>0$$
$$\Rightarrow\int_a^b f(t)dt>ab\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt.$$

Λύση 2 (Χρήστος Κυριαζής) Μία εκτός ύλης αντιμετώπιση είναι η ανισότητα Chebychev.

Είναι η περίπτωση που η μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (f) και η άλλη γνησίως φθίνουσα ($\frac{1}{x^2}$).

Τότε ισχύει:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{x^2}dx$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$
$$= \frac{1}{ab}\int_a^b f(x)dx, \quad \text{δηλαδή:}$$

$$ab\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx < \int_a^b f(x)dx \quad (a,b>0).$$

Επιμελητής: Σωτήρης Χασάπης

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς)*

Έστω σημείο $B(x_0, 0)$ του ημιάξονα Ox με $x_0 \neq 1$ και η συνάρτηση $f(x) = x_0^x, \quad x > 0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0)$ τέμνει τον Ox στο σημείο A.

(α) Να δείξετε ότι η απόσταση AB ισούται με $\dfrac{1}{|\ln x_0|}$.

(β) Αν η απόσταση AB ισούται με 1, να βρείτε τα σημεία M της γραφικής παράστασης της f και τις εφαπτόμενες στα σημεία αυτά.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=41743

Λύση (dr.tasos)

(α) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

άρα $A\left(x_0 - \frac{1}{\ln x_0}, 0\right)$ οπότε

$$(AB) = \sqrt{(x_0 - x_0 - \frac{1}{\ln x_0})^2} = \frac{1}{|\ln x_0|}.$$

(β) Έχουμε

$$|\ln x_0| = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ ή } x = e^{-1}.$$

Οπότε είναι $M_1(e, e^e)$ και $M_2\left((\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}), (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}\right)$. Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων σε αυτά τα σημεία είναι

$$y - e^e = e^e(x - x_0)$$

και

$$y = -\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}(x - x_0) + \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου)*

Αν $x, y \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2014}{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 58}.$$

---

http://www.mathematica.gr/...php?f=69&t=42368&p=198072#p198072

Λύση (Κωνσταντίνος Τζιμούλιας) Είναι

$$\begin{aligned} A &= \frac{2014}{(x^2 - 2 \cdot 2x + 4) + (y^2 + 1 \cdot 2y + 1) + 53} \\ &= \frac{2014}{(x-2)^2 + (y+1)^2 + 53} \\ &\leq \frac{2014}{53} = 38 \end{aligned}$$

με την ισότητα όταν $x = 2$ και $y = -1$ για να γίνει μικρός ο παρονομαστής

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Αν* $a, b > 0$, *να αποδειχθεί ότι:*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^{2014}+\left(1+\frac{b}{a}\right)^{2014}\geq 2^{2015}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=41776

Λύση 1 (Χρήστος Κυριαζής) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχω:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)^{2014}+\left(1+\frac{b}{a}\right)^{2014} &\geq 2\sqrt{\left[\left(1+\frac{\alpha}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^{2014}}\\ &= 2\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)^{2014}}\\ &= 2\sqrt{\left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{2014}}\\ &= 2\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{2014}\\ &\geq 2\cdot 2^{2014}=2^{2015}.\end{aligned}$$

Λύση 2 (Τσάνο Φατιόν) Έστω $\frac{a}{b}=k$ και $\frac{b}{a}=\frac{1}{k}$ και $k>0$. Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ είναι

$$\frac{(1+k)^{2014}+\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2014}}{2}\geq\sqrt{(1+k)^{2014}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2014}}.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+k)^{2014}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2014}}\geq 2^{2014} &\Leftrightarrow\\ \left((1+k)\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{1007}\geq 2^{2014} &\Leftrightarrow\\ (1+k)\left(1+\frac{1}{k}\right)\geq 2^2 &\Leftrightarrow\\ (k+1)^2\geq 4k,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από την ανισότητα $(a+b)^2\geq 4ab$.

Λύση 3(Νικόλαος Τζαβίδας) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{b}\right)^{2014}+\left(1+\frac{b}{a}\right)&\geq 2\left(1+\frac{a}{b}\right)^{1007}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{1007}\\ &= 2[\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)]^{1007}\\ &= 2\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{ab}{ab}\right)^{1007}\\ &= 2\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{1007}\\ &\geq 2\,(2+2)^{1007}\\ &= 2\cdot 4^{1007}=2\cdot 2^{2014}=2^{2015}.\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει για $a=b$, με τον περιορισμό $a, b\neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Στρατής Αντωνέας) Έστω*

$$x_n=\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\quad \mu\varepsilon\quad n=1,2,\ldots.$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{49}}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=40916

Λύση (Κώστας Ζερβός) Είναι

$$\begin{aligned}n+\sqrt{n^2-1}&=\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}\\ &=\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

Άρα $x_n=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}}$, επομένως

$$\frac{1}{x_n}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right).$$

Άρα

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{49}}=$$

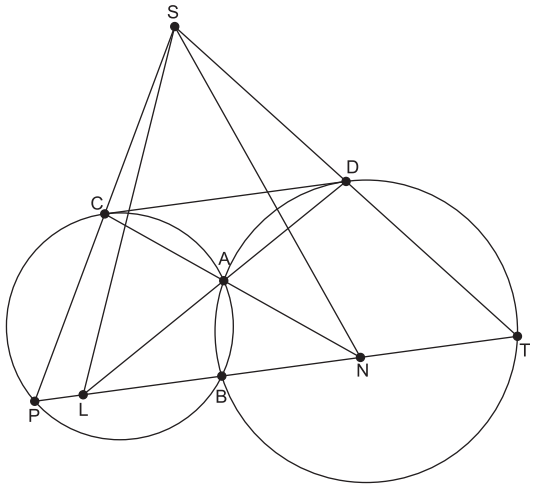
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left((\sqrt{2}-\sqrt{0})+(\sqrt{3}-\sqrt{1})+\cdots+(\sqrt{50}-\sqrt{48})\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(5\sqrt{2}-1+7\right)=$$

$$5+3\sqrt{2}.$$

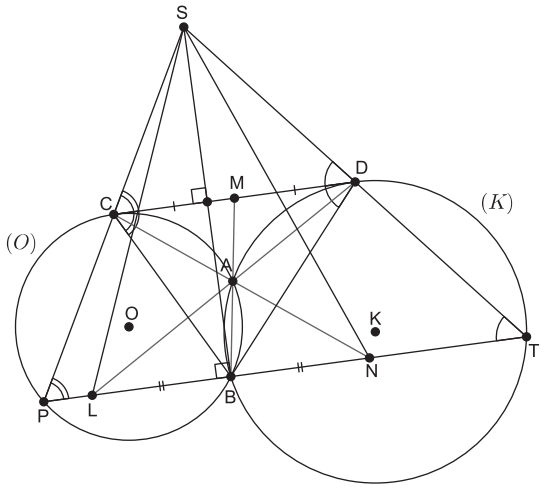
Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο KARKAR) Δύο κύκλοι τέμνονται στα A, B και έχουν κοινό εξωτερικά εφαπτόμενο τμήμα CD. Από το B διέρχεται ευθεία ϵ, παράλληλη της CD, η οποία τέμνει τους κύκλους στα P, T. Τα PC και TD τέμνονται στο S, ενώ οι CA και DA τέμνουν την ϵ στα σημεία L, N. Να δείξετε ότι $SL = SN$.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=37822

Λύση 1 (Στάθης Κούτρας) Ας είναι $M \equiv AB \cap CD$ Τότε M το μέσο της CD (αφού το M είναι σημείο του ριζικού άξονα AB (κοινή χορδή) των κύκλων $(O), (K)$ και MC, MD εφαπτόμενα τμήματα των $(O), (K)$ αντίστοιχα).



Από την κεντρική δέσμη LAD, BAM, NAC με $CD \parallel LN$, και αφού M το μέσο της CD, τότε το B είναι το μέσο της LN, άρα SB διάμεσος του τριγώνου SLN.

Είναι

$$SDC = DTB \quad \text{(εντός, εκτός και επί τα αυτά)}$$
$$= CBD \quad \text{(εγγεγρ. υπό χορδής και εφαπτομένης)}$$

και

$$SCD = CPB \quad \text{(εντός, εκτός και επί τα αυτά)}$$
$$= BCD \quad \text{(εγγεγρ. υπό χορδής και εφαπτομένης).}$$

Άρα

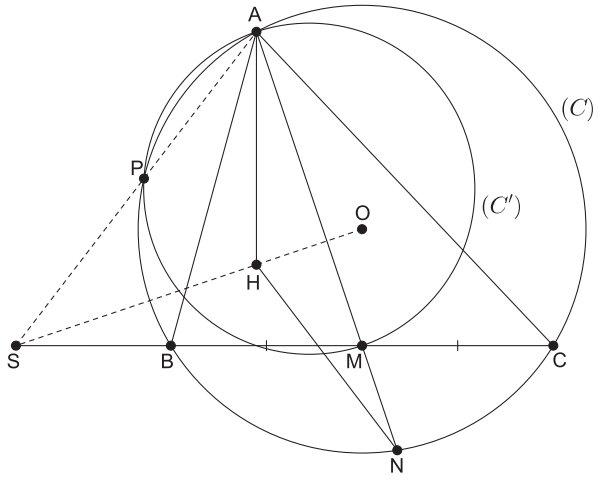
$\triangle SDC = \triangle BDC \Rightarrow (DS) = (DB) \Rightarrow \triangle SDB$ ισοσκελές και με DS διχοτόμο της γωνίας του $\angle SDB \Rightarrow DC \perp SB \overset{CD \parallel PT}{\Rightarrow} SB \perp PT$.

Έτσι στο τρίγωνο $\triangle SLN$ η SB είναι ύψος και διάμεσος άρα αυτό είναι ισοσκελές, δηλαδή $(SL) = (SN)$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης) Δίδεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με $AB \neq AC$.Ονομάζουμε (C) τον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC, H το ορθόκεντρο, και O το κέντρο του (C). Ας είναι M το μέσο του BC. Η AM τέμνει ακόμα τον (C) στο N και ο κύκλος (C') διαμέτρου AM ξανά στο P.*

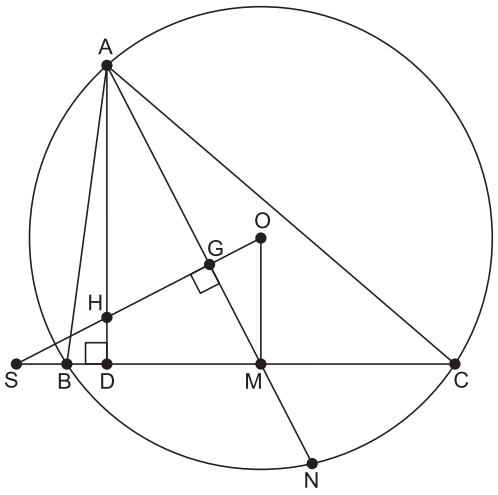
(α) Να δειχθεί ότι οι ευθείες AP, BC, OH συντρέχουν αν και μόνο αν $AH = HN$.

(β) Πως μπορεί να γίνει η γεωμετρική κατασκευή ενός τριγώνου με τις πιο πάνω προδιαγραφές;



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=38382

Λύση 1 (Κώστας Δόρτσιος)



Για την κατασκευή ενός τέτοιου τριγώνου εργαζόμαστε ως εξής:

Κατασκευή: Σε τυχαίο κύκλο κέντρου O θεωρούμε μια τυχαία χορδή. Στο ανωτέρω σχήμα έστω την AN.

Στη συνέχεια φέρουμε την κάθετη από το κέντρο O σ΄ αυτήν (η οποία είναι και μεσοκάθετος) και στη συνέχεια πάνω στην κάθετη αυτή θεωρούμε το σημείο H τέτοιο ώστε $HG = 2 \cdot OG$.

Στη συνέχεια αφού φέρουμε την AH και την παράλληλη προς αυτήν από το σημείο O ορίζουμε πάνω στη χορδή AN το σημείο M.

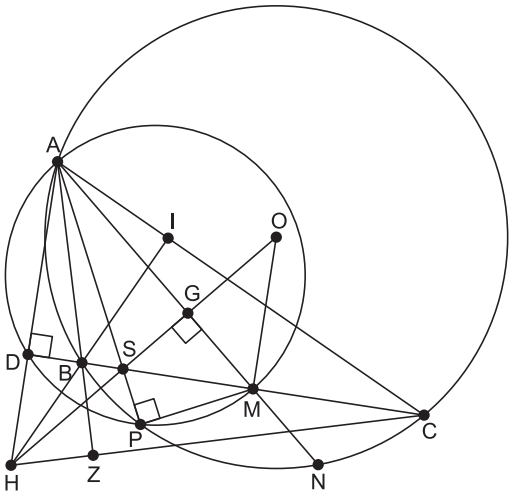
Τέλος αν φέρουμε την κάθετη προς την OM αυτή θα τμήσει τον κύκλο (O) στα σημεία B, C που θα είναι μαζί με το σημείο A οι τρείς κορυφές του ζητούμενου τριγώνου.

Πράγματι:

Στο τρίγωνο αυτό η AH προεκτεινόμενη δίνει το σημείο D και η AD ως παράλληλη προς την OM θα είναι κάθετη στην BC. Επειδή τα τρίγωνα $(AHG), (GOM)$ είναι όμοια θα είναι ακόμα: $AH = 2 \cdot OM$. Άρα το σημείο H θα είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ABC. Τέλος επειδή το H ανήκει στη μεσοκάθετη προς την AN θα ισχύει: $AH = HN$.

Διερεύνηση:

Γενικά το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις. Για κάθε μια θέση της χορδής AN κατασκευάζεται κι ένα αντίστοιχο τρίγωνο με τις ανωτέρω απαιτήσεις. Ειδικότερα αν η χορδή AN γίνει ίση με τη διάμετρο τότε το τριγωνο που προκύπτει είναι το εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο. Σε ένα τέτοιο τρίγωνο ο περίκεντρο, το βαρύκεντρο και το ορθόκεντρο συμπίπτουν.



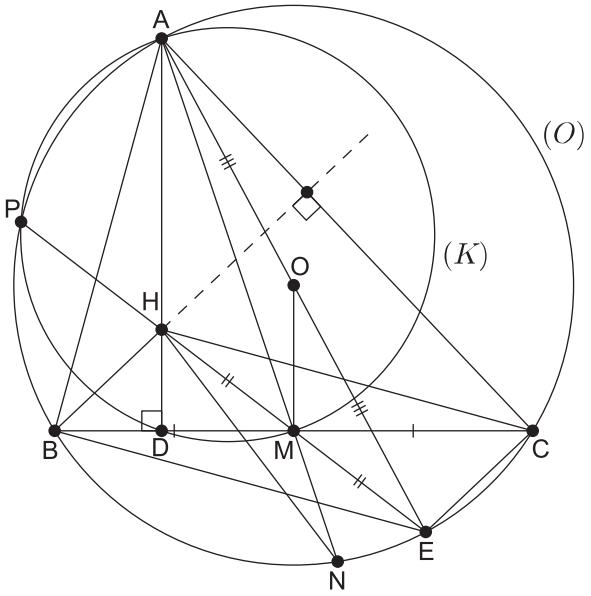
Παρατήρηση:

Το αρχικό ερώτημα για τις συντρέχουσες BC, OH, AP ισχύει και για αμβλυγώνιο τρίγωνο, με την ίδια απόδειξη που παρατέθηκε στις προηγούμενες αναρτήσεις, όπως φαίνεται και στο ανωτέρω σχήμα.

Λύση 2 (Στάθης Κούτρας) Θα δείξουμε πρώτα ένα λήμμα που είναι και το "κλειδί" του προβλήματος.

Λήμμα: Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC (AB \neq AC)$ και ας είναι M το μέσο της BC. Αν P είναι το άλλο (εκτός του A) κοινό σημείο του περικυκλίου (O) του τριγώνου $\triangle ABC$ με τον κύκλο (K) διαμέτρου AM, να δειχθεί ότι η PM διέρχεται από το ορθόκεντρο H του τριγώνου $\triangle ABC$.

Απόδειξη του λήμματος



Ας είναι

$$H \equiv PM \cap AD\,(AD \perp BC) \quad \text{και} \quad E \equiv PM \cap (O)\,.$$

Τότε με

$$\angle MPA \overset{\text{εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο}}{\Longrightarrow} 90^0 \Rightarrow$$
$$\angle EPA = 90^0 \Rightarrow$$
$$AE \text{ διάμετρος του κύκλου } (O)$$

οπότε:

$$EC \perp AC \tag{1}$$

Με $OM \perp BC$ (απόστημα στη χορδή BC του (O)) και $AD \perp BC$ προκύπτει ότι

$$OM \parallel AD \overset{\triangle AHE\ (\ O \text{ μέσο της } AE)}{\Longrightarrow} M \text{ μέσο της HE}$$

$$\overset{M \text{ μέσο της } BC}{\Longrightarrow} BHCE \text{ παραλληλόγραμμο}$$

(οι διαγώνιές του διχοτομούνται) και συνεπώς

$$BH \parallel EC \overset{(1)}{\Rightarrow} BH \perp AC \overset{AD \perp BC}{\Rightarrow} H \text{ το ορθόκεντρο του } \triangle ABC$$

και το λήμμα έχει αποδειχθεί. □

Στο θέμα μας τώρα με βάσει το παραπάνω λήμμα τα σημεία P, H, M είναι συνευθειακά.

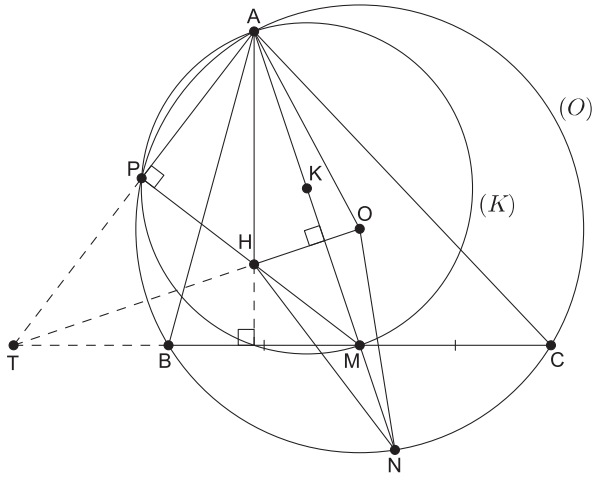
- Έστω ότι

$$AH = HN \overset{OA=ON=R_O}{\Longrightarrow} AHNO \text{ (χαρταετός)}$$

και συνεπώς $OH \perp AN$ (και μάλιστα μεσοκάθετη) δηλαδή

$$OH \perp AM. \tag{1}$$

Επίσης είναι $AP \perp MHP$, αφού η AM είναι διάμετρος του κύκλου (K) και $MB \perp AH$, αφού H το ορθόκεντρο του $\triangle ABC$, δηλαδή οι ευθείες AP, OH, CB είναι οι ευθείες των υψών του $\triangle AHM$ και επομένως θα συγκλίνουν στο ορθόκεντρό του T.



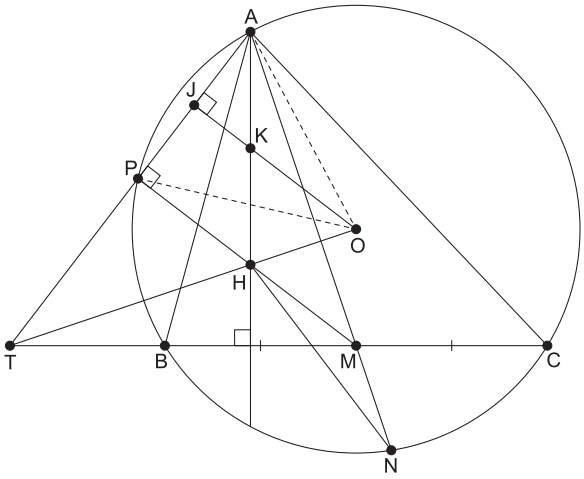
- Αντιστρόφως:

Αν οι ευθείες OM, AP, BC συγκλίνουν (έστω στο T), τότε με $AH \perp TM$ (H το ορθόκεντρο του τριγώνου $\triangle ABC$) και $MHP \perp AT$ (αφού AM διάμετρος του κύκλου (K)) το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $\triangle ATM$ (σημείο τομής δύο υψών του) και επομένως THO είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του, δηλαδή $THO \perp AN$ και με O το κέντρο του περικυκλίου του $\triangle ABC$ και AN χορδή του (O) θα είναι THO μεσοκάθετη της AN άρα $HA = HN$ και το θέμα μας έχει ολοκληρωθεί.

Λύση 3 (Σωτήρης Λουρίδας) Έστω ότι συντρέχουν, αν $H_1 \equiv MP \cap AH \Rightarrow AK = KH_1$, με το τετράπλευρο KH_1MO να είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς παίρνουμε

$$AH_1 = 2KH_1 = 2OM = AH \Rightarrow$$
$$H \equiv H_1 \Rightarrow TO \perp AN \Rightarrow HA = HN.$$

Έστω $AH = HN$ με το σημείο T να είναι η τομή των OH, CB. Τότε στο τρίγωνο ATM το MH είναι το τρίτο ύψος, οπότε αν $P \equiv MH \cap AT \Rightarrow \angle MPA = 90°$.


A
J
K
P
O
H
T
B
M
C
N

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις* $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *τέτοιες, ώστε*

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=35047

Λύση (Κώστας Ζερβός)
Για $x = 1$, έχουμε $f(1 + f(y)) = f(1) + y$ για κάθε $y \in \mathbb{Z}^+$.
Έστω $f(1) = a$. Τότε

$$f(1 + f(x)) = a + x \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Z}^+$.
Θα δείξουμε ότι

$$f((a + 1)n) = (a + 1)n \quad (2)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Για $n = 1$ έχουμε

$$f(a + 1) = a + 1 \iff f(1 + f(1)) = f(1) + 1$$

που ισχύει από την (1).
Έστω ότι $f((a + 1)n) = (a + 1)n$. Από την (1) έχουμε

$$f(1 + f((a + 1)n)) = a + (a + 1)n \iff$$

$$\iff f(na + n + 1) = a + na + n$$

και ξανά από την (1) :

$$f(1 + f(na + n + 1)) = a + na + n + 1 \iff$$

$$\iff f(1 + a + na + n) = a(n + 1) + n + 1 \iff$$

$$\iff f((a + 1)n) = (a + 1)n.$$

Επίσης

$$f(1 + f(a + 1)) = a + a + 1 \iff f(a + 2) = 2a + 1.$$

Για $x = a$, $y = a + 2$ στην αρχική σχέση, έχουμε

$$f(a^2 + f(a + 2)) = af(a) + a + 2 \iff$$

$$\iff f(a^2 + 2a + 1) = af(a) + a + 2 \iff$$

$$\iff f((a + 1)(a + 1)) = af(a) + a + 2 \overset{(2)}{\iff}$$

$$\iff (a + 1)(a + 1) = af(a) + a + 2 \iff$$

$$\iff f(a) = a + 1 - \frac{1}{a}.$$

Αλλά $a, f(a) \in \mathbb{N}^*$, άρα $a = 1$, δηλαδή $f(1) = 1$.
Θα δείξουμε ότι $f(n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
Για $n = 1$ έχουμε $f(1) = 1$, που ισχύει.
Έστω ότι $f(n) = n$. Από την (1) έχουμε

$$f(1 + f(n)) = f(1) + n \iff f(n + 1) = n + 1.$$

Άρα $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{Z}^+$.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Θάνος Μάγκος) Αν* $a, b, c > 0$ *να αποδείξετε ότι*

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=12183#p66050

Λύση (Γιώργος Μπασδέκης) Η ανισότητα είναι ομογενής, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε πως $a + b + c = 9$.
Έστω επιπλέον ότι

$$a^2 + b^2 + c^2 = 27 + 6t^2$$

για $t \in [0, 1]$. Αν $t = 0$, τότε ισχύει η ισότητα, αφού $a = b = c = 3$. Ας υποθέσουμε ότι $0 < t \leq 1$. Αν (x, y, z) είναι μια μετάθεση των a, b, c, τότε αποδεικνύεται (βλ. Σχόλιο) ότι

$$3 - 2t \leq x \leq 3 + 2t \quad (2)$$

με την ισότητα να ισχύει αν $x = 3 + 2t$ και $y = z = 3 - t$ ή αν $x = 3 - 2t$ και $y = z = 3 + t$. Επιπλέον, η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{\frac{9 + 2t^2}{9 - t^2}}.$$

Επειδή, όμως, ισχύει

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3 + 2t} + \frac{3 + 2t - x}{(3 + 2t)x}$$

για κάθε $x \in (0,9)$ αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\frac{3}{3+2t} + \frac{1}{3+2t} \cdot \left(\sum_{\text{cyclic}} \frac{3+2t-a}{a} \right) \geq \sqrt{\frac{9+2t^2}{9-t^2}}.$$

Λόγω της (2), μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα *Cauchy-Schwarz* στο αριστερό μέλος και τότε θα έχουμε

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{3+2t-a}{a} \geq \frac{\left(\sum_{\text{cyclic}} (3+2t-a) \right)^2}{\sum_{\text{cyclic}} a(3+2t-a)} = \frac{6t}{3-t}.$$

Είναι αρκετό, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι

$$\frac{3}{3+2t} + \frac{6t}{(3+2t)(3-t)} \geq \sqrt{\frac{9+2t^2}{9-t^2}},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{3t+9}{(3+2t)(3-t)} \geq \sqrt{\frac{9+2t^2}{9-t^2}}.$$

Αφού υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας, απομένει να αποδειχθεί η ανισότητα

$$9(t+3)^2(9-t^2) \geq (9+2t^2)(3+2t)^2(3-t)^2.$$

Αφού κάνουμε τις πράξεις και στα δύο μέλη, έχουμε να δείξουμε ότι

$$t^2(3-t)(8t^3-9t+27) \geq 0$$

η οποία ισχύει αφού $0 < t \leq 1$.

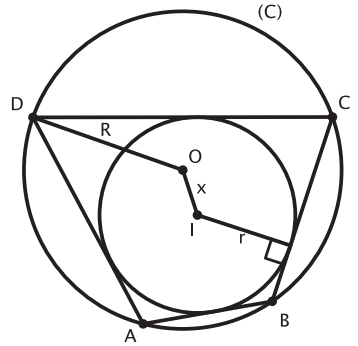
Σχόλιο: Περισσότερα στην παραπάνω τεχνική στην ανισότητα *Cauchy-Schwarz* θα βρείτε στην εργασία του Γιώργου Μπασδέκη που είναι διαθέσιμη στο παρακάτω θέμα:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=165244#p165244

Επιμελητής: Κώστας Βήττας

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο parmenides51.) Τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και περιγεγραμμένο σε κύκλο (I,r). Εάν $OI=x$ να αποδειχθεί ότι*

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{(R+x)^2}+\frac{1}{R-x)^2}.$$



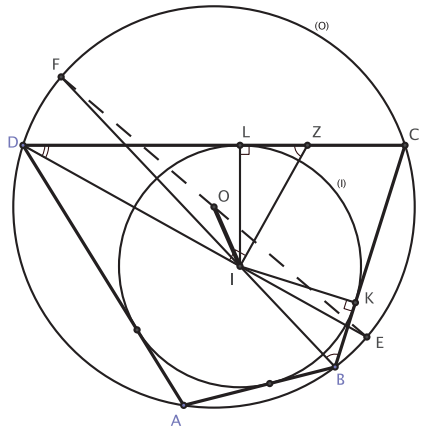
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=42144

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος.) Επειδή το $ABCD$ είναι αμφιγράψιμο τετράπλευρο, ισχύει

$$\angle B+\angle D=180^\circ\Rightarrow\angle IBC+\angle IDC=\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle D}{2}=90^\circ \quad (1)$$

Έστω το σημείο Z μεταξύ των $L,\ C$, ώστε να είναι $LZ=KB$ και λόγω των ορθογωνίων τριγώνων KIB, KIZ και της (1), προκύπτει ότι το τρίγωνο $\triangle IDZ$ είναι ορθογώνιο με

$$\angle DIZ=90^\circ \quad (2)$$



Στο ορθογώνιο αυτό τρίγωνο, αποδεικνύεται εύκολα (γνωστή ισότητα) ότι ισχύει

$$\frac{1}{(IL)^2}=\frac{1}{(IZ)^2}+\frac{1}{(ID)^2} \quad (3)$$

Από (3), $IL=r$ και $IZ=IB$ έπεται ότι

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{(IB)^2}+\frac{1}{(ID)^2} \quad (4)$$

Έστω τα σημεία $E\equiv(O)\cap DI$ και $F\equiv(O)\cap BI$. Ισχύει, $\angle AOE=\angle D$ και $\angle AOF=\angle B$ και άρα έχουμε

$$\angle AOE+\angle AOF=180^\circ (5)$$

Από (5) προκύπτει ότι τα σημεία E,O,F είναι συνευθειακά και επομένως ισχύει

$$(IB)(IF)=(ID)(IE)=R^2-x^2 \quad (6)$$

Από (6) παίρνουμε

$$\frac{1}{(IB)^2}=\frac{(IF)^2}{(R^2-x^2)^2} \quad (7)$$

και

$$\frac{1}{(ID)^2}=\frac{(IE)^2}{(R^2-x^2)^2} \quad (8)$$

Από (4), (7), (8) είναι

$$\frac{1}{r^2}=\frac{(IE)^2+(IF)^2}{(R^2-x^2)^2} \quad (9)$$

Στο τρίγωνο $\triangle IEF$, σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα των διαμέσων, έχουμε

$$(IE)^2+(IF)^2=2(OI)^2+\frac{(EF)^2}{2}=2(R^2+x^2) \quad (10)$$

Από (9), (10) είναι

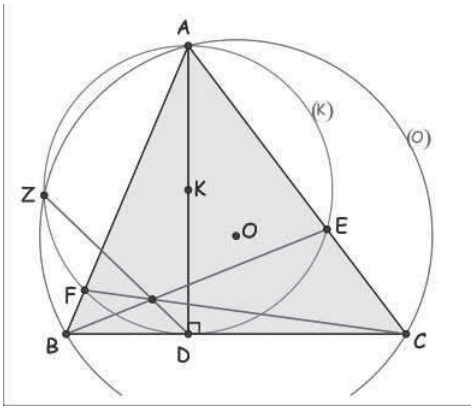
$$\frac{1}{r^2}=\frac{2(R^2+x^2)}{(R^2-x^2)^2}=\frac{(R+x)^2+(R-x)^2}{(R+x)^2\cdot(R-x)^2} \quad (11)$$

Τέλος από (11) παίρνουμε

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{(R+x)^2}+\frac{1}{(R-x)^2}$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας.) Θεωρούμε τρίγωνο* $\overset{\Delta}{ABC}$ *εγγεγραμμένο σε κύκλο* (O) *και ας είναι* (K)*, ο κύκλος με διάμετρο το ύψος του* AD*. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες* BE*,* CF*,* DZ *διέρχονται από το ίδιο σημείο, όπου* $E \equiv (K) \cap AC$*,* $F \equiv (K) \cap AB$*,* $Z \equiv (K) \cap (O)$ *και* $Z \neq A$*.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=42240

Λύση (Σάκης Τσαρέας.) Από το εγγεγραμμένο στον κύκλο (K) τετράπλευρο $AEDF$ έχουμε $\angle AFE = \angle ADE$ (1)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\ DAC$ με $DE \perp AC$ έχουμε $\angle ADE = \angle C$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \angle AFE = \angle C$ και άρα, το τετράπλευρο $BCEF$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (L).

Οι ευθείες AZ, EF, BC, ως οι ριζικοί άξονες των κύκλων (O), (K), (L), λαμβανομένων ανά δύο, συντρέχουν στο ριζικό τους κέντρο, έστω το σημείο S.

Από το πλήρες τετράπλευρο $AEDFBC$ έχουμε ότι η δέσμη $A.SBPC$ είναι αρμονική, όπου $P \equiv BE \cap CF$.

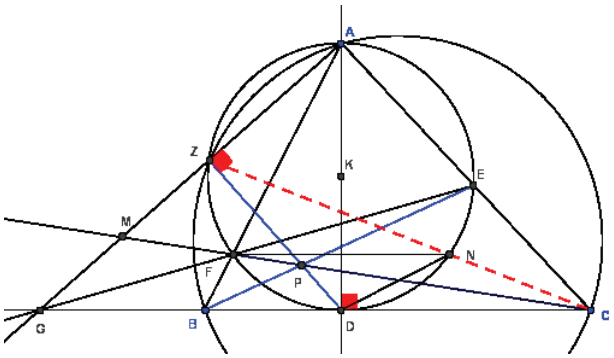
Η αρμονική αυτή δέσμη τέμνεται από την ευθεία CF και άρα, η σημειοσειρά M, F, P, C είναι αρμονική, όπου $M \equiv AS \cap CF$.

Έστω το σημείο $N \equiv (K) \cap CZ$ και από $\angle ZNF = \angle ZAF \equiv ZAB = \angle ZCB \Rightarrow FN \parallel BC \Rightarrow FN \perp AD$ (3)

Από (3) λόγω συμμετρίας, έχουμε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου (K) στα σημεία F, N, τέμνονται στο σημείο έστω T, το οποίο ανήκει στην ευθεία AD.

Το τετράπλευρο $AFDN$ είναι αρμονικό λόγω της FN, ως της πολικής ευθείας του σημείου T ως προς τον κύκλο (K) και άρα, η δέσμη $Z.AFDN$ είναι αρμονική.

Η αρμονική αυτή δέσμη τέμνεται από την ευθεία CM και λόγω της αρμονικής σημειοσειράς M, F, P, C, συμπεραίνεται ότι η ακτίνα της ZD περνάει από σημείο $P \equiv BE \cap CF$, ως το αρμονικό συζυγές του M ως προς τα σημεία F, C και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



Επιμελητής: Αλέξανδρος Συγκελάκης

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Θεωρούμε στο επίπεδο* 100 *σημεία ώστε ανά τρία να μην είναι συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι το* 30% *τουλάχιστον των τριγώνων που σχηματίζονται από τα σημεία αυτά, είναι μη οξυγώνια.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=190087

Λύση (Σέμα Διονύσης)

Λήμμα: Αν σε ένα επίπεδο δίνονται 5 σημεία τέτοια ώστε ανα 3 να μην είναι συνευθειακά, τότε σχηματίζονται τουλάχιστον 3 τρίγωνα, με κορυφές τα σημεία αυτά, τα οποία είναι μη οξυγώνια.

Απόδειξη: Θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με το αν στο κυρτό σχήμα αυτών των σημείων μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο, τετράπλευρο ή πεντάγωνο.

(α) Έστω ότι το τρίγωνο ABC είναι το κυρτό σχήμα και τα άλλα δυο σημεία D, E βρίσκονται μέσα σε αυτό. Τουλάχιστον δυο από τα τρίγωνα ADB, BDC, CDA θα έχουν αμβλείες γωνίες στο σημείο D. Όμοια, τουλάχιστον δυο από τα τρίγωνα AEB, BEC, CEA είναι αμβλυγώνια. Έτσι υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα μη οξυγώνια τρίγωνα.

(β) Έστω ότι το τετράπλευρο $ABCD$ είναι το κυρτό σχήμα και το σημείο E βρίσκεται μέσα σε αυτό. Τουλάχιστον μια γωνία του τετραπλεύρου είναι μη οξυγώνια και άρα θα έχουμε και ένα μη οξυγωνίο τρίγωνο. Επίσης το σημείο E βρίσκεται στο εσωτερικό είτε του τριγώνου ABC ή του CDA. Οπότε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, καθορίζει και άλλα δυο αμβλυγώνια τρίγωνα. Και άρα συνολικά τρια μη οξυγώνια και σε αυτή τη περίπτωση.

(γ) Έστω τέλος ότι σχηματίζεται ένα πεντάγωνο, και άρα δεν έχουμε κανένα σημείο μέσα σε αυτό το σχήμα. Εύκολα βλέπουμε ότι τουλάχιστον δύο από τις γωνίες του δεν είναι οξείες, και άρα από δω έχουμε τουλάχιστον δυο μη οξυγώνια τρίγωνα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτές οι δυο γωνίες βρίσκονται σε δυο από τις κορυφές A, B, C του πενταγώνου. Τώρα θεωρούμε το τετράπλευρο $ACDE$. Τουλάχιστον μια από τις γωνίες δεν είναι οξεία, και άρα έχουμε άλλο ένα μη οξυγώνιο τρίγωνο. Οπότε, και σε αυτή την περίπτωση έχουμε τουλάχιστον τρια μη οξυγώνια τρίγωνα.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση ο ισχυρισμός μας αληθεύει.

Απόδειξη άσκησης: Τώρα μένει να πάρουμε όλους τους συνδυασμούς των πέντε σημείων που επιλέγουμε από τα εκατό σημεία που δίνονται. Υπάρχουν $\binom{100}{5}$ συνδυασμοί, σε καθένα από τους οποίους υπάρχουν τουλάχιστον τρια μη οξυγώνια τρίγωνα τα οποία θα έχουν και σημεία στο εσωτερικό τους. Όμως οι κορυφές/σημεία του καθενός τριγώνου μετρούνται $\binom{97}{2}$ φορές. Άρα θα υπάρχουν τουλάχιστον

$$\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$$

μη οξυγώνια τρίγωνα με κορυφές τα 100 σημεία που δίνονται. Επίσης όλα τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τα 100 σημεία που δίνονται είναι $\binom{100}{3}$. Άρα ο λόγος των δυο τελευταίων αποτελεσμάτων μας δίνει το ελάχιστο ποσοστό των τριγώνων που είναι μη οξυγώνια:

$$\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}\cdot\binom{100}{3}} = 3\frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 2\cdot 6}{120\cdot 97\cdot 96\cdot 100\cdot 99\cdot 98} = 30\%$$

τουλάχιστον των τριγώνων είναι μη οξυγώνια.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Υπάρχουν πρώτοι* $p_1 < p_2 < \ldots < p_{99}$ *ώστε οι αριθμοί*

$$p_1 + p_2,\ p_2 + p_3, \ldots,\ p_{98} + p_{99},\ p_{99} + p_1$$

να είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=192844

Λύση 1 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι πρώτοι. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πρώτοι $p_1 < p_2 < \cdots < p_{99}$ ώστε

$p_1 + p_2 = n_1^2$, $p_2 + p_3 = n_2^2, \ldots, p_{99} + p_1 = n_{99}^2$ και οι $n_1, \ldots, n_{99}$ ακέραιοι. Τότε

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{99} = \frac{n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{99}^2}{2}$$

Αποκλείεται να είναι όλοι οι p_i περιττοί. Πράγματι, αν αυτό ίσχυε τότε όλοι οι n_i θα ήταν άρτιοι και έτσι το πρώτο μέλος της προηγούμενης ισότητας θα ήταν περιττός ενώ το δεύτερο μέλος θα ήταν άρτιος.

Κάποιος λοιπόν από τους p_i θα είναι άρτιος. Ο μόνος που μπορεί να είναι άρτιος είναι ο p_1. Θα είναι λοιπόν $p_1 = 2$, όλοι οι οι άλλοι θα είναι περιττοί, οι n_1, n_{99} περιττοί, οι $n_2, ..., n_{98}$ άρτιοι. Επίσης

$$p_1 + n_2^2 + n_4^2 + ... + n_{98}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{99}^2}{2}$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2 + \cdots - n_{98}^2 + n_{99}^2}{2}.$$

Άρα

$$n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2 + \cdots - n_{98}^2 + n_{99}^2 = 4.$$

Ο αριθμός

$$-n_2^2 + n_3^2 - n_4^2 + \cdots - n_{98}^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 4, και $n_1^2 \equiv n_{99}^2 \equiv 1 \bmod 4$. Άρα το πρώτο μέλος της τελευταίας διαιρούμενο με 4 αφήνει υπόλοιπο 2, άτοπο.

Λύση 2 (Δημήτρης Ιωάννου) Είναι γνωστό, ότι κάθε πρώτος αριθμός ή θα είναι ο 2 ή θα είναι περιττός και μάλιστα της μορφής $4k + 1$, ή $4k + 3$, όπου $k \in \mathbb{N}$. Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι κάθε τέλειο τετράγωνο, θα είναι της μορφής $4n$ ή $4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $p_1 = 2$

Τότε για να είναι ο $p_1 + p_2$ τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει $p_2 = 4m_2 + 3$ (διότι αν ήταν $p_2 = 4m_2 + 1$, τότε $p_1 + p_2 = 2 + 4m_2 + 1 =$πολλ$4 + 3$ και άρα δεν θα μπορούσε να είναι τέλειο τετράγωνο).

Επίσης, αφού $p_2 = 4m_2 + 3$, τότε για να είναι ο $p_2 + p_3$ τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει $p_3 = 4m_3 + 1$ (διότι αν ήταν $p_3 = 4m_3 + 3$, τότε $p_2 + p_3 =$πολλ$4 + 2$ και άρα δεν θα μπορούσε να είναι τέλειο τετράγωνο).

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, έχουμε:

Αφού $p_3 = 4m_3 + 1$, τότε πρέπει $p_4 = 4m_4 + 3$, και τότε πρέπει $p_5 = 4m_5 + 1, \ldots, p_{99} = 4m_{99} + 1$. Τότε όμως

$$p_{99} + p_1 = 4m_{99} + 1 + 2 = \text{ πολλ.}4 + 3$$

και άρα δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Περίπτωση 2: $p_1 = 4m_1 + 1$.

Τότε για να είναι ο $p_1 + p_2$ τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει $p_2 = 4m_2 + 3$, και για να είναι ο $p_2 + p_3$ τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει $p_3 = 4m_3 + 1$, και με τον ίδιο τρόπο, συμπεραίνουμε ότι πρέπει ο $p_{99} = 4m_{99} + 1$. Τότε όμως

$$p_{99} + p_1 = 4m_{99} + 1 + 4m_1 + 1 = \text{ πολλ.}4 + 2,$$

που όμως και πάλι δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Περίπτωση 3: $p_1 = 4m_1 + 3$.

Τότε για να είναι ο $p_1 + p_2$ τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει $p_2 = 4m_2 + 1$, και για να είναι ο $p_2 + p_3$ τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει $p_3 = 4m_3 + 3$, και με τον ίδιο τρόπο, συμπεραίνουμε ότι πρέπει $p_{99} = 4m_{99} + 3$.

Τότε όμως

$$\begin{aligned} p_{99} + p_1 &= 4m_{99} + 3 + 4m_1 + 3 = 4(m_{99} + m_1) + 4 + 2 \\ &= \text{ πολλ.}4 + 2 \end{aligned}$$

όπου και πάλι δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Άρα δεν υπάρχουν τέτοιοι πρώτοι.

Λύση 3 (Γιώργος Γαβριλόπουλος) Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

• Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί και $p_1 > 2$. Τότε όλα τα τετράγωνα που θα δημιουργούνται θα είναι άρτιοι αριθμοί.

Ας τα συμβολίσουμε ως $4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{99}$ (αφού οι άρτιοι υψωμένοι στο τετράγωνο είναι πολλαπλάσια του 4).

Θα ισχύει

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2) + (p_2 + p_3) + \cdots + (p_{99} + p_1) \\ = 4a_1 + 4a_2 + \cdots + 4a_{99}, \end{aligned}$$

επομένως θα είναι

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{99} = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99})$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το άθροισμα 99 περιττών πρώτων είναι περιττός αριθμός.

• Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί και ότι $p_1 = 2$. Τότε οι μόνοι αριθμοί που είναι περιττοί και τέλεια τετράγωνα θα είναι οι $p_1 + p_2, p_{99} + p_1$.

Οι δύο αυτοί αριθμοί θα είναι της μορφής $4a_1 + 1, 4a_{99} + 1$ (αφού όλοι οι περιττοί αριθμοί που είναι ταυτόχρονα και τέλεια τετράγωνα ακεραίων είναι της μορφής $8k + 1$ άρα και της μορφής $4m + 1$).

Όπως και στην παραπάνω περίπτωση, θα είναι

$$(p_1 + p_2) + (p_2 + p_3) + \cdots + (p_{99} + p_1) \\ = 4a_1 + 1 + 4a_2 + 4a_3 + 4a_4 + \cdots + 4a_{99} + 1.$$

Επομένως

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{99} = 2(a_1 + a_2 + \cdots a_{99}) + 1$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού το άθροισμα 98 περιττών πρώτων είναι άρτιος και με την πρόσθεση αρτίου έχουμε άρτιο αποτέλεσμα.

Σχόλιο: Στον παραπάνω σύνδεσμο και αμέσως παρακάτω από τη λύση του Παύλου Μαραγκουδάκη, ο Γιώργος Γαβριλόπουλος μας παραπέμπει στον σύνδεσμο viewtopic.php?p=185428 όπου υπάρχουν ακόμη δύο λύσεις (οι λύσεις 2 και 3 όπως φαίνονται παραπάνω) οι οποίες είναι έξω από το φάκελο των διαγωνισμών της ΕΜΕ. Τις παραθέτουμε όμως για λόγους πληρότητας

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Από τον διαγωνισμό Kyiv Taras του 2013) Έστω $n \times n$ πίνακες A, B τέτοιοι ώστε για κάθε $n \times n$ πίνακα C η εξίσωση*

$$AX + YB = C$$

έχει λύση. Να δείξετε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα C η εξίσωση

$$A^{2013}X + YB^{2013} = C$$

έχει λύση.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=40087

Λύση (Κώστας Τσουβαλάς) Δείχνουμε ότι τουλάχιστον ένας από τους A, B είναι αντιστρέψιμος.Πράγματι αν όχι έστω r_1, r_2 οι τάξεις τους που είναι γνήσια μικρότερες του n. Τότε

$$A = Q_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P_1 \text{ και } B = Q_2 \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} P_2$$

με P_1, P_2, Q_1, Q_2 αντιστρέψιμους. Θέτουμε

$$S_1 = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r_1} \end{pmatrix} Q_1^{-1} \text{ και } S_2 = P_2^{-1} \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r_2} \end{pmatrix}.$$

Τότε προφανώς $S_1A = BS_2 = O$. Για $C = Q_1P_2$ υπάρχουν X_1, Y_1 με

$$AX_1 + Y_1B = Q_1P_2,$$

και πολλαπλασιάζοντας αριστερά με S_1 και δεξιά με S_2 λαμβάνουμε ότι

$$O = (S_1Q_1)(P_2S_2) = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r_2} \end{pmatrix}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $n - r_1, n - r_2 > 0$. Τελικά ένας από τους δυο πίνακες είναι αντιστρέψιμος, έστω ο A (όμοια αν είναι ο B). Τότε για τυχαίο C υπάρχει Z ώστε $A^{2013}Z = C$. Τότε το ζεύγος (Z, O) είναι μια λύση της ζητούμενης εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Προτείνει ο Φαίδων Αντριόπουλος) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία είναι φραγμένη σε κάθε διάστημα της μορφής (a, b) με $b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Αν το όριο*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^k},$$

υπάρχει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, να δείξετε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^k}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=39843

Λύση (Νίκος Ζαρίφης)

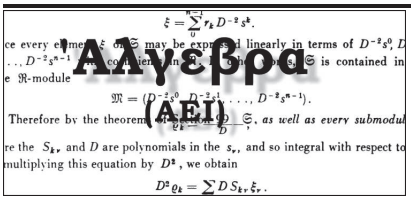
Θέτοντας $a_n = f(n)$ δημιουργούμε το αντίστοιχο όριο

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^{k+1}}.$$

Από θεώρημα Stolz είναι

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^{k+1}} &= \lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} \\ &= \lim_{n \to \infty} -\frac{a_n - a_{n-1}}{\sum_{t=1}^{k} \binom{k+1}{t} (-1)^{k+1-t} n^t} \\ &= \frac{1}{\binom{k+1}{k}} \lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n^k} \\ &= \frac{1}{k+1} \lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n^k} \end{aligned}$$

όπου το όριο υπάρχει. Οπότε το όριο είναι ίσο με το ζητούμενο. (Ισχύει από αρχή μεταφοράς)


$$\xi = \sum_0^{n-1} r_k D^{-2} s^k.$$
ce every element ξ of $\mathfrak{S}$ may be expressed linearly in terms of $D^{-2}s^0, D$ ..., $D^{-2}s^{n-1}$ with coefficients in $\mathfrak{R}$. Therefore $\mathfrak{S}$ is contained in e $\mathfrak{R}$-module
$$\mathfrak{M} = (D^{-2}s^0, D^{-2}s^1, \ldots, D^{-2}s^{n-1}).$$
Therefore by the theorem of Section 9, $\mathfrak{S}$, as well as every submodul
re the $S_{k\nu}$ and D are polynomials in the s_ν, and so integral with respect to multiplying this equation by D^2, we obtain
$$D^2 \varrho_k = \sum D S_{k\nu} \xi_\nu .$$

Αλγεβρα (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη) Αν V ο διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^{n\times n}$ που αποτελείται από τους άνω τριγωνικούς πίνακες, να βρείτε μια βάση του και έναν διανυσματικό υποχώρο W του $\mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιον ώστε ο $\mathbb{R}^{n\times n}$ να είναι το ευθύ άθροισμα των V, W.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=42265

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου)

(α) Βάση του V: Οι άνω τριγωνικοί πίνακες που έχουν έναν άσσο κάπου και μηδέν παντού αλλού.

(β) W: οι γνήσια κάτω τριγωνικοί (δηλαδή κάτω τριγωνικοί αλλά με όλο μηδενικά και στη διαγώνιο).

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω $p(x)$ πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές βαθμού τουλάχιστον 2. Να εξεταστεί αν το σύνολο*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p(x) \in \mathbb{Q}\}$$

είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=40333

Λύση (Νίκος Μαυρογιάννης) Θα χρησιμοποιήσω τα εξής λήμματα:

Λήμμα 1: Ένα πολυώνυμο $f \in \mathbb{Q}[x]$ βαθμού n είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το πολυώνυμο $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι ανάγωγο.

Απόδειξη:. Θα υπάρχουν πολυώνυμα h, s βαθμών m, k αντίστοιχα ώστε

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = h(x)\, s(x)$$

αν και μόνο αν

$$\frac{1}{x^n} f(x) = h\left(\frac{1}{x}\right) s\left(\frac{1}{x}\right)$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$f(x) = x^m h\left(\frac{1}{x}\right) x^k s\left(\frac{1}{x}\right).$$

Δηλαδή αν και μόνο αν

$$f(x) = h_1(x)\, s_1(x)$$

με

$$h_1(x) = x^m h\left(\frac{1}{x}\right) \text{ και } s_1(x) = x^k s\left(\frac{1}{x}\right).$$

Λήμμα 2: Αν

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

είναι ένα πολυώνυμο του $\mathbb{Z}[x]$ και p είναι ένας πρώτος που δεν διαιρεί τον a_n τότε το πολυώνυμο

$$g(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 + \frac{1}{p}$$

είναι ανάγωγο.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1 αρκεί το

$$x^n g\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + \left(a_0 + \frac{1}{p}\right) x^n$$

να είναι ανάγωγο. Αυτό γράφεται και ως

$$x^n g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{p}\left((pa_0 + 1)\, x^n + pa_1 x^{n-1} + \cdots + pa_n\right)$$

Αυτό πράγματι είναι ανάγωγο διότι το

$$(pa_0 + 1)\, x^n + pa_1 x^{n-1} + \cdots + pa_n$$

είναι ανάγωγο από το κριτήριο του Eisenstein: Ο πρώτος p διαιρεί όλους τους συντελεστές εκτός του μεγιστοβάθμιου και ο p^2 δεν διαιρεί τον σταθερό αφού ο p δεν είναι διαιρέτης του a_n.

Για το κυρίως θέμα: Θεωρούμε διάστημα (a, b). Αφού το πολυώνυμο $p(x)$ δεν είναι σταθερό θα υπάρχουν ρητοί c, d με $a < c < d < b$ έτσι ώστε $p(c) \neq p(d)$. Έστω

ο ρητός αριθμός $s = \frac{p(c)+p(d)}{2}$. Αυτός βρίσκεται μεταξύ των $p(c), p(d)$ και προφανώς

$$(p(c) - s)(p(d) - s) < 0.$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $q(x) = p(x) - s$. Αυτό έχει ρητούς συντελεστές και επομένως γράφεται στην μορφή:

$$q(x) = \frac{1}{r}(a_n x^n + ... + a_0)$$

με τους $a_0, \ldots, a_n$ να είναι ακέραιοι. Θεωρούμε μία ακολουθία πρώτων αριθμών

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots$$

που δεν διαιρούν τον a_n. Από το Λήμμα 2 τα πολυώνυμα

$$a_n x^n + \cdots + a_0 + \frac{1}{p_k}$$

είναι ανάγωγα. Επομένως και τα

$$q_k(x) = \frac{1}{r}\left(a_n x^n + \cdots + a_0 + \frac{1}{p_k}\right) = q(x) + \frac{1}{rp_k} \in \mathbb{Q}[x]$$

είναι επίσης ανάγωγα.

Επειδή η ακολουθία $\frac{1}{rp_k}$ είναι μηδενική θα είναι

$$q_k(c) = q(c) + \frac{1}{rp_k} \to q(c)$$

και

$$q_k(d) = q(d) + \frac{1}{rp_k} \to q(d).$$

Θα υπάρχει λοιπόν κατάλληλος k ώστε τα $q_k(c), q_k(d)$ να είναι ομόσημα των $q(c), q(d)$ οπότε από το θεώρημα του Bolzano το πολυώνυμο $q_k(x)$ θα έχει ρίζα t μεταξύ των c, d και επομένως στο διάστημα (a, b).

Τέλος:

(α) Αφού το $q_k(x)$ είναι ανάγωγο βαθμού μεγαλύτερου του 1 ο t είναι άρρητος,

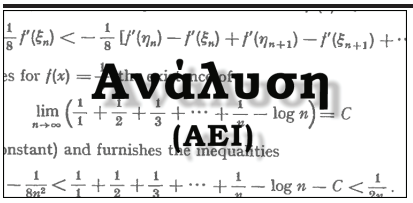
(β) $q_k(t) = 0$ και επομένως

$$p(t) - s + \frac{1}{rp_k} = 0$$

δηλαδή

$$p(t) = s - \frac{1}{rp_k} \in \mathbb{Q}$$

Άρα πράγματι οι άρρητοι που απεικονίζονται σε ρητούς από το p αποτελούν πυκνό υποσύνολο των πραγματικών.



Επιμελητές: Αναστάσιος Κοτρώνης - Γρηγόρης Κωστάκος

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Γεώργιος Σμυρλής) Δείξατε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*, ώστε* $f(x) = \int_0^1 \sin\left(x + f^2(t)\right) dt$*, για κάθε* $x \in [0,1]$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=37825

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Εξετάζουμε τον διανυσματικό χώρο K των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ που παράγονται από τις sin(.), cos(.) με την $\|.\|_\infty$. Ορίζουμε

$$T : K \to C[0,1],\ (Tf)(x) = \int_0^1 \sin\left(x + f^2(t)\right) dt.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η T είναι συνεχής.

Επίσης, επειδή

$$\int_0^1 \sin\left(x + f^2(t)\right) dt =$$

$$\left(\int_0^1 \cos f^2(t)\, dt\right) \sin x + \left(\int_0^1 \sin f^2(t)\, dt\right) \cos x =$$

$$a \sin x + b \cos x$$

έχουμε ότι $Tf \in K$.

Ας παρατηρηθεί ακόμη ότι $|a| \le 1$, $|b| \le 1$ οπότε

$$\|Tf\|_\infty = \|a \sin(.) + b \cos(.)\|_\infty = \sqrt{a^2 + b^2} \le \sqrt{2},$$

δηλαδή το σύνολο

$$\{\|Tf\|_\infty : f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ συνεχής συνάρτηση}\}$$

είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο χώρου πεπερασμένης διάστασης.

Έπεται ότι η εικόνα της T είναι υποσύνολο συμπαγούς υποσυνόλου του K. Από το (θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder), η T έχει σταθερό σημείο, όπως θέλαμε.

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω* a_n *μία ακολουθία θετικών ακεραίων με όριο το άπειρο. Εξετάστε αν το σύνολο* $\left\{\frac{a_n}{m} : n.m \in \mathbb{N}^*\right\}$ *είναι πυκνό στο* $(0, +\infty)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=41661

Λύση (Παύλος Μαραγκουδάκης) Έστω $x > 0$ και $0 < \varepsilon < x$. Θέτουμε $\beta = x - \varepsilon$ και $\gamma = x + \varepsilon$. Ορίζουμε τις ακολουθίες

$$b_n = n\beta \quad \text{και} \quad c_n = n\gamma.$$

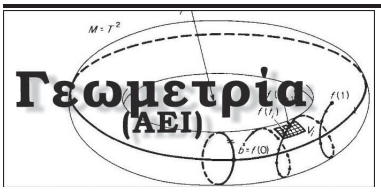
Υπάρχει δείκτης k ώστε για κάθε $n \ge k$ να είναι $b_{n+1} < c_n$. Πράγματι αρκεί να διαλέξουμε $k > \frac{\beta}{\gamma - \beta}$. Τότε για το σύνολο

$$A = (b_k, c_k) \bigcup (b_{k+1}, c_{k+1}) \bigcup \cdots$$

είναι $A = (b_k, +\infty)$. Στο σύνολο A ανήκει τουλάχιστον ένας όρος a_n της ακολουθίας (a_n), οπότε υπάρχει δείκτης m ώστε $a_n \in (b_m, c_m)$. Άρα

$$m(x - \varepsilon) < a_n < m(x + \varepsilon),$$

δηλαδή $\left|\frac{a_n}{m} - x\right| < \varepsilon$. Άρα το δοσμένο σύνολο είναι πράγματι πυκνό στο σύνολο των θετικών.



Επιμελητής: Θάνος Μάγκος

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κωστάκος) Τα διανύσματα*

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\ \vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \ \textit{και}\ \ \vec{\gamma} = \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$$

είναι μοναδιαία και σχηματίζουν ίσες γωνίες $\frac{\pi}{3}$*, δηλαδή*

$$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = (\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}) = \frac{\pi}{3}.$$

Να υπολογισθεί η παράσταση

$$A = (\vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma}))) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}).$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=11&t=41083

Λύση (Κώστας Ζερβός) Είναι

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})\vec{\gamma} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\gamma}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma})) &= \vec{\alpha} \times \left(\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\right)\\ &= \frac{1}{2}\vec{\alpha} \times \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \times \vec{\gamma}\\ &= \vec{\gamma} \times \vec{\alpha}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}A &= (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})\\ &= ((\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}\\ &= (\vec{\beta} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma})) \cdot \vec{\gamma}\\ &= \left[(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha})\vec{\gamma}\right] \cdot \vec{\gamma}\\ &= \left(\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\gamma}\right) \cdot \vec{\gamma}\\ &= \frac{1}{2}\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - \frac{1}{2}\vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma}\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κωστάκος) Από τυχόν σημείο* Μ *της έλλειψης*

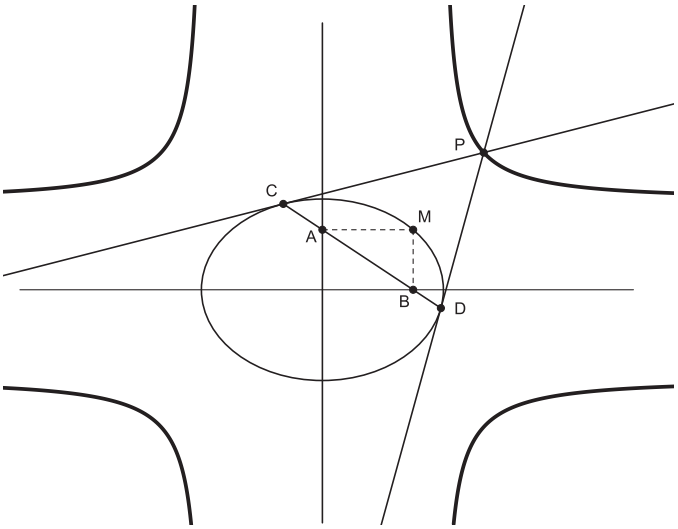
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*,$$

φέρνουμε τις καθέτους προς τους άξονές της, ΜΑ *και* ΜΒ*, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ο πόλος τής ευθείας που διέρχεται από τα σημεία* Α *και* Β*, γράφει την καμπύλη*

$$\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} = 1.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=11&t=42673

Λύση 1 (Κώστας Ζερβός) Έστω $M(a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$.



Τότε $A(a\cos t, 0), B(0, b\sin t)$.

Αν $P(x_0, y_0)$ ο πόλος τής ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε

$$AB : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{a^2} = 1.$$

Αλλά $A, B \in AB$, άρα

$$\frac{a\cos t x_0}{a^2} = 1 \iff \cos t = \frac{a}{x_0}$$

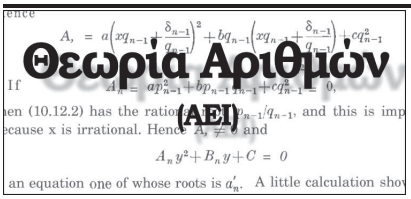
και

$$\frac{b\sin t x_0}{b^2} = 1 \iff \sin t = \frac{b}{y_0}.$$

Άρα

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \iff \frac{a^2}{x_0^2} + \frac{b^2}{y_0^2} = 1,$$

που σημαίνει ότι το P γράφει την καμπύλη $\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} = 1$.



Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Δημήτριος Κανακάρης) Να αποδειχθεί ότι αν το τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου μπορεί να παρασταθεί ως διαφορά 2 διαδοχικών κύβων, τότε ο αριθμός αυτός μπορεί να παρασταθεί και ως άθροισμα 2 διαδοχικών τετραγώνων.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=41369#p192805

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Έστω k θετικός ακέραιος τέτοιος, ώστε

$$k^2 = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$

για κάποιο θετικό ακέραιο n. Τότε, είναι:

$$\begin{aligned} & 4k^2 = 12n^2 + 12n + 4 \\ \Leftrightarrow\ & 4k^2 - 1 = 12n^2 + 12n + 3 \\ \Leftrightarrow\ & (2k-1)(2k+1) = 3(2n+1)^2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $2k-1$ και $2k+1$ είναι σχετικά πρώτοι. Άρα, ο ένας από αυτούς θα είναι τέλειο τετράγωνο (περιττού) ακεραίου, ενώ ο άλλος είναι ίσος με το τριπλάσιο του τετραγώνου ενός ακεραίου.

Αν ήταν

$$2k + 1 = (2m+1)^2$$

για κάποιο ακέραιο m, τότε θα είχαμε ότι

$$2k = (2m+1)^2 - 1 = 4m(m+1)$$

και άρα ο αριθμός k θα ήταν άρτιος, πράγμα άτοπο από τη σχέση

$$k^2 = 3n(n+1) - 1,$$

αφού ο αριθμός $n(n+1)$ είναι άρτιος.

Επομένως, είναι

$$2k - 1 = (2m+1)^2,$$

οπότε

$$k = (m+1)^2 + m^2,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο vzf) Δίνονται δεκαεφτά ακέραιοι. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα υποσύνολό τους από εννιά ακέραιους, που το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 9.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=31929#p147794

Λύση 1 (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Ας ονομάσουμε τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$.

Από τους πρώτους πέντε, δηλαδή τους $a_1, a_2, \ldots, a_5$, υπάρχουν τρεις με άθροισμα πολλαπλάσιο του 3, αφού καθένας από αυτούς αφήνει υπόλοιπο 0, 1 ή 2 στη διαίρεση με το 3.

Αλλάζοντας την αρίθμηση, αν χρειάζεται, υποθέτουμε ότι είναι οι a_1, a_2, a_3.

Ομοίως, από τους a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, υπάρχουν τρεις με άθροισμα πολλαπλάσιο του 3, κ.ο.κ.

Συνεχίζοντας έτσι, από τους 17 αριθμούς βρίσκουμε 5 τριάδες με άθροισμα πολλαπλάσιο του 3.

Το άθροισμα καθεμιάς από αυτές τις τριάδες αφήνει υπόλοιπο 0, 3 ή 6 όταν διαιρεθεί με το 9.

Συνεπώς, υπάρχουν 3 τριάδες ανάμεσα σε αυτές τις 5, που όλες μαζί έχουν άθροισμα στοιχείων πολλαπλάσιο του 9.

Σχόλιο: (Σιλουανός Μπραζιτίκος) Πρόκειται για ειδική περίπτωση του θεωρήματος Erdős-Ginzburg: Κάθε σύνολο $2n-1$ ακεραίων έχει υποσύνολο με n στοιχεία των οποίων το άθροισμα διαιρείται με n.

Επιμελητής: Λευτέρης Πρωτοπαπάς

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο petros r). Έστω a ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Υπολογίστε το*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x(x^2+a^2)}\, dx.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=47&t=40995

Λύση (Σεραφείμ Τσιπέλης) Θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x\left(x^2+a^2\right)}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x\left(x^2+a^2\right)}\, dx \\
&= \frac{1}{2a^2}\int_0^{\infty} \sin 2x\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+a^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2a^2}\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x}\, dx - \frac{1}{2a^2}\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+a^2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{4a^2} - \frac{1}{2a^2}\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+a^2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{4a^2} - \frac{1}{4a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+a^2}\, dx
\end{aligned}$$

Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \dfrac{ze^{2iz}}{z^2+a^2}$, που είναι μερόμορφη στο άνω ημιεπίπεδο. Στο άνω ημιεπίπεδο έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\frac{ze^{2i(x+iy)}}{z^2+a^2}\right| \\
&= \frac{|z| \cdot \left|e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x)\right|}{\left|z^2+a^2\right|} \\
&= \frac{|z| \cdot e^{-2y}}{\left|z^2+a^2\right|} \xrightarrow{z\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Έχει απλό πόλο (πάντα στο άνω ημιεπίπεδο) τον $z = ia$ με

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z = ia\right) = \lim_{z\to ia}(z - ia) f(z) = \frac{e^{-2a}}{2}.$$

Θεωρώντας το μιγαδικό ολοκλήρωμα της $f(z)$ στην καμπύλη $\mathcal{C}$ που αποτελείται από το τμήμα του άξονα $x'x$ από $x_1 = -M$ και $x_2 = M$ και το άνω ημικύκλιο ακτίνας $\rho = M$ έχουμε ότι:

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(f(z), z = ia\right) = \pi i e^{-2a}.$$

Επομένως με $M \to +\infty$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2+a^2}\, dx = \pi i e^{-2a} \\
\Rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos 2x + i \sin 2x)}{x^2+a^2}\, dx = \pi i e^{-2a} \\
\Rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+a^2}\, dx = \pi e^{-2a}
\end{aligned}$$

και τελικά

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x\left(x^2+a^2\right)}\, dx &= \frac{\pi}{4a^2} - \frac{1}{4a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+a^2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{4a^2} - \frac{1}{4a^2}\pi e^{-2a} = \frac{\pi}{4a^2}\left(1 - e^{-2a}\right).
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο vzf) Να υπολογίσετε το μέτρο του έργου W που χρειάζεται για την εκτόξευση πυραύλου βάρους B από την επιφάνεια της Γης, κατακόρυφα σε ύψος h.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=47&t=6626

Λύση (Κώστας Ρεκούμης) Αν B είναι το βάρος του πυραύλου στην επιφάνεια της γης, τότε

$$B = G\frac{Mm}{R^2},$$

οπότε η μάζα του πυραύλου είναι

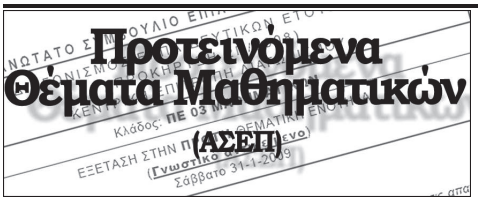
$$m = \frac{BR^2}{GM}.$$

Τα δυναμικά του πεδίου βαρύτητας της γης στην επιφάνειά της και σε ύψος h είναι αντίστοιχα:

$$G\frac{M}{R} \text{ και } G\frac{M}{R+h},$$

ενώ το ζητούμενο έργο ισούται με την διαφορά δυναμικού επί την μάζα:

$$\left(G\frac{M}{R} - G\frac{M}{R+h}\right)\frac{BR^2}{GM} = B\frac{Rh}{R+h}.$$



Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Υπολογίστε την τιμή της παράστασης*

$$K := \cot 70^\circ + 4\cos 70^\circ.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=41829

Λύση (Φωτεινή Καλδή)

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4\sin 20^\circ \\ &= \frac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\cos 20^\circ}\left(\frac{1}{2}\sin 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\cos 20^\circ}\sin 70^\circ \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{|\sin 2x|}{|\sin x| + |\cos x| + 1}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=39505

Λύση (Κώστας Ζερβός) Η ελάχιστη τιμή είναι προφανώς 0 για $x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.Για τη μέγιστη έχουμε

$$|\sin 2x| = 2|\sin x||\cos x| \le |\sin x|^2 + |\cos x|^2 = 1$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}|\sin 2x| \le |\sin x| + |\cos x| \\ \Leftrightarrow\ &2|\sin 2x|^2 \le 1 + |\sin 2x| \\ \Leftrightarrow\ &2|\sin 2x|^2 - |\sin 2x| - 1 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ &(|\sin 2x| - 1)(2|\sin 2x| + 1) \le 0 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει. Έχουμε ισότητα όταν

$$|\sin 2x| = 1 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

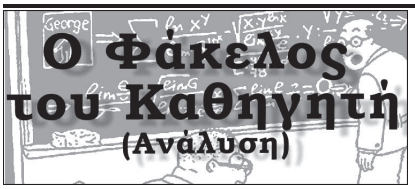
Άρα

$$|\sin 2x| + \sqrt{2}|\sin 2x| \le |\sin x| + |\cos x| + 1 \Leftrightarrow f(x) \le \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

με τη ισότητα να ισχύει όταν

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα η μέγιστη τιμή της είναι $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$.



Επιμελητής: Βαγγέλης Μουρούκος

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο Γιώργος - Σ. Σμυρλής)*
Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών. Είναι γνωστό ότι:

$$\text{¨Αν } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \text{ τότε } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n-1}{n}} < \infty.\text{¨}$$

Να αποδειχθεί το ακόλουθο, κάπως πιο εξειδικευμένο, αποτέλεσμα:

$$\text{Αν } \sum_{n=2}^{\infty} a_n = s < \infty, \text{ τότε } \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{\frac{n-1}{n}} \leq s + 2\sqrt{s}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&t=31976

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης)
Για $n \geqslant 2$ από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$a_n^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \frac{(n-2)a_n + 2\sqrt{a_n}}{n} < a_n + \frac{2}{n}\sqrt{a_n}.$$

Άρα $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^{\frac{n-1}{n}} \leqslant s + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Όμως από την ανισότητα Cauchy – Schwarz έχουμε ότι

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n\right) = \frac{\pi^2 - 6}{6} s < s.$$

Το αποτέλεσμα τώρα έπεται και μάλιστα με κάπως καλύτερο συντελεστή για το $\sqrt{s}$.

Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ τότε πιο στοιχειωδώς έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

που πάλι είναι αρκετό για το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης)*
Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(x + y + f(2xy)) = 2xy + f(x + y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&t=40597

Λύση (Σπύρος Καπελλίδης)
Η δοσμένη σχέση

$$f(x + y + f(2xy)) = 2xy + f(x + y) \quad (1)$$

για $y = -x$ δίνει

$$f(f(-2x^2)) = -2x^2 + f(0) \quad (2),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή κάθε μη θετικός u γράφεται ως $-2x^2$ η (2) γίνεται

$$f(f(u)) = u + f(0) \quad (3),$$

για κάθε $u \in (-\infty, 0]$.

Από την (3) εύκολα συμπεραίνουμε ότι η f είναι $1-1$ στο διάστημα $(-\infty, 0]$, άρα, λόγω της συνέχειας, γνησίως μονότονη σε αυτό.

1η περίπτωση: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

Αν $f(0) < 0$, τότε $f(f(0)) < f(0)$, άτοπο, γιατί $f(f(0)) = f(0)$.

Αν $f(0) > 0$, τότε επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (*) υπάρχει $x_0 < 0$ ώστε $f(x_0) = 0$, άρα η (3) για $u = x_0$ δίνει

$$f(0) = x_0 + f(0) \Rightarrow x_0 = 0,$$

άτοπο. Άρα $f(0) = 0$.

*[Αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$, τότε, παίρνοντας όρια στο $-\infty$ στην (3) έχουμε $f(a) = -\infty$, άτοπο, άρα $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$].

Συνεπώς η (3) γράφεται

$$f(f(x)) = x \quad (4),$$

για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.

Έστω ότι για κάποιο $x \leq 0$ έχουμε $f(x) < x$. Τότε $f(f(x)) < f(x) < x$, άτοπο.

Έστω ότι για κάποιο $x \leq 0$ έχουμε $f(x) > x$. Τότε $f(f(x)) > f(x) > x$, άτοπο.

Άρα

$$f(x) = x \quad (5),$$

για κάθε $x \le 0$.

Η (1) για $y = -\frac{1}{2}$ δίνει

$$f\left(x - \frac{1}{2} + f(-x)\right) = -x + f(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x - \frac{1}{2}) = x - \frac{1}{2},$$

για κάθε $x > 0$, και για $x = x + \frac{1}{2}$ έχουμε $f(x) = x$, για κάθε $x > 0$, άρα

$$\boxed{f(x) = x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

που είναι δεκτή, γιατί επαληθεύει την (1).

2η περίπτωση: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε κατ΄ αρχάς ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (αποδεικνύεται εύκολα, όπως πιο πάνω) και ότι κάθε αριθμός $a > f(0)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $f(h(a))$, όπου $h(a) < 0$.

Λήμμα 1: Ο ισχυρισμός $f(0) > 0$ είναι ψευδής.

Αν ο περιορισμός της f στα θετικά x παίρνει και αρνητικές τιμές, τότε θα υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Βάζοντας στην (1) όπου x, y το $\sqrt{\frac{x_0}{2}}$ έχουμε ότι

$$f\left(2\sqrt{\frac{x_0}{2}} + f(x_0)\right) = x_0 + f\left(2\sqrt{\frac{x_0}{2}}\right) \Rightarrow x_0 = 0,$$

άτοπο.

Αν ο περιορισμός της f στα θετικά x παίρνει μόνον θετικές τιμές, τότε βάζοντας στην (1) $y = x > 0$ έχουμε ότι

$$f(2x + f(2x^2) = 2x^2 + f(2x) > 2x^2.$$

Συνεπώς ο ανωτέρω περιορισμός μπορεί να πάρει την οσοδήποτε μεγάλη θετική τιμή.

Έστω $f(x_1)$ μία τέτοια. Τότε υπάρχει αρνητικός αριθμός $h(x_1)$ με αρκετά μεγάλη απόλυτη τιμή ώστε $f(x_1) = f(h(x_1))$ και συνεπώς

$$f(f(x_1)) = f(f(h(x_1))) \Rightarrow f(f(x_1)) = h(x_1) + f(0) < 0,$$

άτοπο.

Λήμμα 2: Ο ισχυρισμός $f(0) < 0$ είναι ψευδής.

Πράγματι, αν αληθεύει, τότε $f(f(0)) > f(0)$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $f(f(0)) = f(0)$.

Από τα πιο πάνω λήμματα προκύπτει ότι $f(0) = 0$, άρα

$$f(f(x)) = x \quad (a),$$

για κάθε $x \le 0$.

Έστωσαν $x_1, x_2 > 0$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε από τη σχέση $f(f(h(x_1))) = f(f(h(x_2))$ με $h(x_1), h(x_2) < 0$ προκύπτει ότι

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow f(h(x_1)) = f(h(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι $1-1$ και στο $[0, +\infty)$, συνεπώς είναι και στους μη αρνητικούς γνησίως μονότονη.

Αν είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα υπάρχουν $x_1 > 0$ και $x_2 < 0$ ώστε

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2 < 0,$$

άτοπο.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και στους θετικούς και, λόγω συνέχειας, γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

Έστω ότι για κάποιο $x > 0$ έχουμε $f(f(x)) \ne x$. Τότε

$$f(f(f(x))) \ne f(x) \Rightarrow f(x) \ne f(x),$$

άτοπο.

Άρα

$$f(f(x)) = x \quad (b),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από την (b) εύκολα συμπεραίνουμε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφ΄ ετέρου, επειδή για κάθε $a > 0, b \le 0$ υπάρχουν x, y ώστε $x + y = a \wedge 2xy = b$, η (1) δίνει

$$f(a + f(b)) = b + f(a) \quad (*).$$

Αν $a, b > 0$, τότε

$$f(a + b) = f(f(h(a)) + f(h(b)) = h(b) + f(f(h(a)) =$$

$$= h(b) + h(a) = f^{-1}(b) + f^{-1}(a) = f(b) + f(a).$$

Άρα η f είναι συνάρτηση Cauchy στο $(0, +\infty)$, συνεπώς $f(x) = kx$ για κάθε $x > 0$, όπου $k < 0$. Επαληθεύοντας στην αρχική βρίσκουμε ότι $f(x) = -x$ για κάθε $x > 0$.

Όμοια βρίσκουμε ότι $f(x) = -x$ για κάθε $x < 0$, άρα

$$\boxed{f(x) = -x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

που είναι δεκτή, γιατί επαληθεύει την (1).

Επιμελητής: Γιώργος Μπαλόγλου

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω παραβολή $y^2 = 2px$ με το E για εστία. Για $n \geq 3$ θεωρούμε ένα κανονικό πολύγωνο $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ με κέντρο την εστία E και με καμία κορυφή στον άξονα συμμετρίας της παραβολής. Αν οι ημιευθείες $EA_1, EA_2, \ldots, EA_n$ τέμνουν την παραβολή στα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ αντιστοίχως τότε να δείξετε ότι:*

$$EB_1 + EB_2 + EB_3 + \cdots + EB_n \geq np.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=39416

Λύση(Κώστας Ζερβός) Έστω $p > 0$, (όμοια αν $p < 0$).

Τα A_k είναι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης

$$\left(z - \frac{p}{2}\right)^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta),$$

όπου $\theta \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ και $r > 0$ (r η ακτίνα του πολυγώνου). Η εξίσωση ανάγεται στην

$$w^n - r^n(\cos\theta + i\sin\theta) = 0$$

και

$$\begin{aligned} w_k &= r\left(\cos\frac{2(k-1)\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{2(k-1)\pi + \theta}{n}\right) \\ &= r(\cos\phi_k + i\sin\phi_k) \end{aligned}$$

είναι οι ρίζες της. Επομένως

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos\phi_k = 0 \quad (1)$$

Τα σημεία B_k για $k = 1, 2, \ldots, n$ είναι εικόνες των μιγαδικών z_k ώστε $\mathrm{Arg}\left(z_k - \frac{p}{2}\right) = \phi_k$. Άρα

$$z_k - \frac{p}{2} = r_k(\cos\phi_k + i\sin\phi_k) \Leftrightarrow z_k = r_k\cos\phi_k + \frac{p}{2} + r_k\sin\phi_k$$

για $k = 1, \ldots, n$. Οι εικόνες των z_k ανήκουν στην παραβολή, άρα

$$\begin{aligned} & r_k^2\sin^2\phi_k = 2p\left(r_k\cos\phi_k + \frac{p}{2}\right) \\ \iff & r_k^2\sin^2\phi_k + r_k^2\cos^2\phi_k = r_k^2\cos^2\phi_k + 2pr_k\cos\phi_k + p^2 \\ \iff & r_k^2 = (r_k\cos\phi_k + p)^2 \\ \overset{r_k>0, p>0}{\iff} & r_k = \frac{p}{1-\cos\phi_k} \\ \iff & r_k = \frac{p(1+\cos\phi_k)}{\sin^2\phi_k} \geq p(1+\cos\phi_k). \end{aligned}$$

Στα παραπάνω είναι $1 - \cos\phi_k > 0$ γιατί κανένα από τα A_k δεν βρίσκεται στον $x'x$. Επομένως

$$EB_k = \left|z_k - \frac{p}{2}\right| = r_k \geq p(1+\cos\phi_k).$$

Άρα

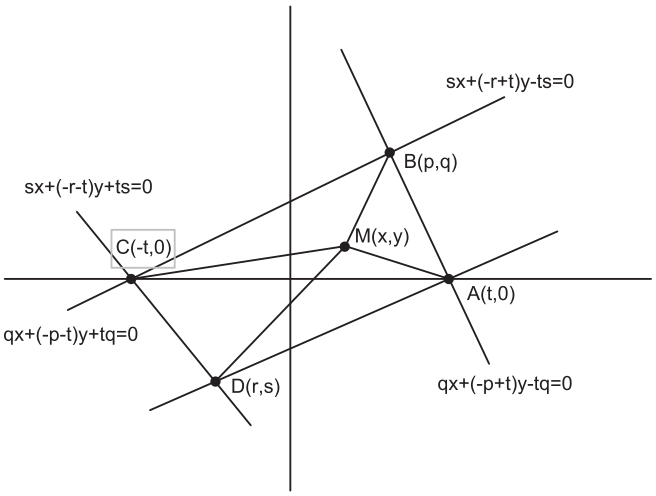
$$EB_1 + EB_2 + \cdots + EB_n \geq np + p\sum_{k=1}^{n}\cos\phi_k \overset{(1)}{=} np.$$

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Γιώργης Καλαθάκης) Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ABCD$. Να βρείτε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε να υπάρχει σημείο O στο εσωτερικό του τετραπλεύρου για το οποίο να ισχύει:*

$$(AOB) = (BOC) = (COD) = (DOA).$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=38914

Λύση 1 (Νίκος Μαυρογιάννης) Γράφω μία προσέγγιση που χρησιμοποιεί Αναλυτική Γεωμετρία. Αλλάζω το όνομα του ζητουμένου σημείου από O σε M. Χάριν απλούστευσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι το τετράπλευρο μας έχει κορυφές: $A(t, 0)$ με $t > 0$, $B(p, q)$ με $q > 0$, $C(-t, 0)$ και $D(r, s)$ με $s < 0$. Η αρχή O των αξόνων είναι μέσο του AC.



Εύκολα βρίσκουμε ότι η ευθεία CB έχει εξίσωση

$$qx + (-p - t)\, y + tq = 0$$

και το O ανήκει στο θετικό της ημιεπίπεδο. Η ευθεία BA έχει εξίσωση

$$qx + (-p + t)\, y - tq = 0$$

και το O ανήκει στο αρνητικό της της ημιεπίπεδο. Η ευθεία DC έχει εξίσωση

$$sx + (-r - t)\, y + ts = 0$$

και το O ανήκει στο αρνητικό της ημιεπίπεδο. Η ευθεία DA έχει εξίσωση

$$sx + (-r + t)\, y - ts = 0$$

και το O ανήκει στο θετικό της ημιεπίπεδο.

Επομένως και για το τυχόν εσωτερικό σημείο M του κυρτού τετραπλεύρου θα ισχύει ότι το M βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο των DA, CB και στο αρνητικό ημιεπίπεδο των BA, DC .

Οι πληροφορίες αυτές μας επιτρέπουν να ξέρουμε με τι πρόσημο θα πάρουμε τις ορίζουσες που εμφανίζονται στα εμβαδά των τεσσάρων τριγώνων. Θα είναι

$$(MCB) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p & q & 1 \\ -t & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}, \quad (MAB) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} p & q & 1 \\ t & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix},$$

$$(MCD) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} r & s & 1 \\ -t & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}, \quad (MAD) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} r & s & 1 \\ t & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}.$$

Τα τέσσερα εμβαδά θα είναι ίσα αν και μόνο αν

$$qx - py = 0 \tag{1}$$

$$sx - ry = 0 \tag{2}$$

$$(q + s)\, x + (-p - r - 2t)\, y = -t\,(s + q) \tag{3}$$

Άρα κατ΄ αρχάς πρέπει το παραπάνω σύστημα να είναι συμβιβαστό και άρα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} q & -p & 0 \\ s & -r & 0 \\ q+s & -p-r-2t & -t\,(s+q) \end{vmatrix} = 0$$

που ισοδυναμεί με την

$$t\,(s + q)\,(qr - ps) = 0,$$

και επειδή $t > 0$ ισοδυναμεί με την

$$(s + q)\,(qr - ps) = 0.$$

Άρα υπάρχουν οι περιπτώσεις:

(α) ή

$$s + q = 0$$

οπότε το μέσο της BD ανήκει στην AC και, λόγω $p + r + 2t \neq 0$ (B, C, D μη συγγραμικά), $y = 0$, $x = 0$, και M μέσο της AC.

(β) είτε

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Η (4) μας λέει ότι τα $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ είναι συγγραμμικά. Άρα θα πρέπει η BD να διχοτομεί την AC. Μάλιστα λόγω της (1) το ζητούμενο σημείο M ανήκει στην ευθεία $y = \frac{q}{p}x$ δηλαδή αναγκαστικά πρέπει να ανήκει στην διαγώνιο BD οπότε λόγω της ισότητας $(CMD) = (CMB)$ είναι το μέσο της BD (*). Άρα αν υπάρχει τέτοιο σημείο θα είναι μοναδικό. Δηλαδή μια αναγκαία συνθήκη είναι

Τουλάχιστον μία διαγώνιος του τετραπλεύρου να διχοτομεί την άλλη.

Η συνθήκη πολύ εύκολα φαίνεται πως είναι και ικανή: Το μέσο της διχοτομούσης είναι κατάλληλο σημείο.

Φυσικά στην κλάση αυτή των τετραπλεύρων περιλαμβάνονται και τα παραλληλόγραμμα.

(*) *Σημείωση:* Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούσαμε να φθάσουμε εξετάζοντας λίγο περισσότερο το σύστημα των τριών εξισώσεων. Το υποσύστημα των (1), (2) λόγω της (4) έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{p}{q}\frac{s+q}{2},\ y = \frac{q+s}{2}$$

όπου φαίνεται ότι το M είναι μέσο της BD.

Λύση 2 (Σωτήρης Λουρίδας) Έστω E το σημείο τομής των διαγωνίων του κυρτού τετράπλευρου $ABCD$. Έστω επίσης ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο O του τετράπλευρου $ABCD$ με την ιδιότητα

$$(OBA) = (OAD) = (ODC) = (OCB) \qquad (1)$$

Προφανώς αν το σημείο O ταυτιστεί με το σημείο E ισχύουσας της σχέσης (1), το τετράπλευρο $ABCD$ καθίσταται παραλληλόγραμμο καθότι εύκολα παίρνουμε ότι οι διαγώνιες του διχοτομούνται.

Θεωρούμε τώρα ότι ισχύει η σχέση (1) χωρίς το σημείο O να ανήκει σε μία από τις δύο διαγώνιους, ας υποθέσουμε ότι δεν ανήκει στην διαγώνιο BD. Προκειμένου να «λειτουργήσουμε» την ισότητα (1) θεωρούμε

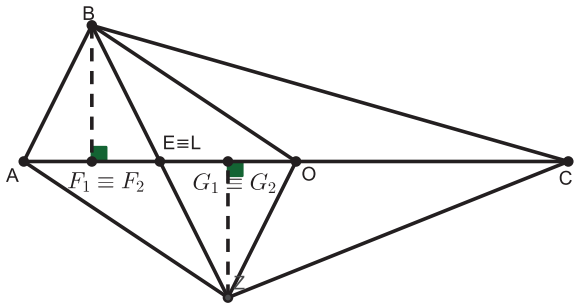
$$BF_1 \perp AO, \quad DG_1 \perp AO \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε $BF_1 \overset{\parallel}{=} DG_1$. Έτσι έχουμε: $BE_1 = E_1D$ αν $E_1 \equiv DB \cap OA$.

Θεωρούμε τώρα $BF_2 \perp OC$, $DG_2 \perp OC$ και σε συνδυασμό με την ισότητα $(BOC) = (DOC)$ όμοια παίρνουμε $BE_2 = E_2D$, αν $E_2 \equiv DB \cap OC$. Συνεπώς τα σημεία E_1, E_2 «συναντώνται» στο μέσο L της διαγωνίου BD. Άμεσα πλέον διαπιστώνουμε ότι $A \in OL$, $C \in OL \Rightarrow L \in AC \Rightarrow L \equiv E$.

Επίσης από τις $A \in OL$, $C \in OL$ και (1) προκύπτει ότι το O οφείλει να είναι μέσο της AC.

Τελικά για να ισχύει η ισότητα (1) όταν το σημείο O δεν είναι σημείο της διαγωνίου BD πρέπει και αρκεί η διαγώνιος AC να διέρχεται από το μέσον της διαγωνίου BD και το σημείο O να ταυτιστεί με το μέσο της διαγωνίου AC. Όμοια για να ισχύει η ισότητα (1) όταν το σημείο O δεν είναι σημείο της διαγωνίου AC πρέπει και αρκεί η διαγώνιος BD να διέρχεται από το μέσον της διαγωνίου AC και το σημείο O να ταυτιστεί με το μέσο της διαγωνίου BD. Έτσι καταλήγουμε στην ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ισχύ της (1) για εσωτερικό σημείο O του κυρτού τετράπλευρου $ABCD$, που είναι: «τουλάχιστον η μία διαγώνιος διέρχεται από το μέσο της άλλης διαγωνίου».



.

Λύση 3 (Ανδρέας Βαρβεράκης) **Λήμμα.** Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων μιας γωνίας xOy που σχηματίζουν ισεμβαδικά τρίγωνα με δύο τμήματα OA, OB επί των πλευρών της γωνίας, είναι η ημιευθεία OM όπου M το μέσο του AB.

Από τις $(OBA) = (OBC)$ και $(ODA) = (ODC)$ προκύπτει ότι το O κείται επί των BM, DM, όπου M το μέσον της AC. Από τις $(OAB) = (OAD)$ και $(OCB) = (OCD)$ προκύπτει ότι το O κείται επί των AN, CN, όπου N το μέσον της BD. Συμπεραίνουμε ότι ή $O \equiv M$ με $N \in AC$ ή $O \equiv N$ με $M \in BD$ (ή και τα δύο, οπότε $ABCD$ παραλληλόγραμμο).

Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 63 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Ας είναι* $n \geq 1$ *ακέραιος και* $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ *με* $|a| = 1$. *Θεωρούμε την εξίσωση*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + a^k) x^k = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι σημεία μιας ευθείας ℓ_a

(β) Δύο ευθείες ℓ_a, ℓ_b *τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν ισχύει* $a + b = 0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=41670

Λύση (Παύλος Μαραγκουδάκης)

(α) Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν το διωνυμικό ανάπτυγμα του Νεύτωνα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(x+1)^n + (ax+1)^n = 0.$$

Αν x_0 είναι μια λύση της εξίσωσης αυτής, τότε $(x_0+1)^n + (ax_0+1)^n = 0$ οπότε

$$|x_0 + 1| = |ax_0 + 1|.$$

Εφόσον $|a| = 1$, τελικά

$$|x_0 + 1| = |x_0 + \overline{a}|.$$

Άρα η εικόνα του x_0 ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $(-1, 0)$ και την εικόνα του $-\overline{a}$.

(β) Αν $a = x_a + y_a i$ τότε η ευθεία ℓ_a έχει συντελεστή διεύθυνσης $\ell_a = \dfrac{y_a}{1 - x_a}$ και ομοίως $\ell_b = \dfrac{y_b}{1 - x_b}$ όπου $b = x_b + y_b i$ με $x_a^2 + y_a^2 = x_b^2 + y_b^2 = 1$.

$$\ell_a \perp \ell_b \Leftrightarrow \frac{y_a y_b}{(1 - x_a)(1 - x_b)} = -1$$

Όμως

$$\frac{y_a y_b}{(1 - x_a)(1 - x_b)} = \frac{(1 + x_a)(1 + x_b)}{y_a y_b}$$

οπότε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} & x_a x_b + y_a y_b = -x_a - x_b - 1 \\ \Rightarrow\ & (x_a + x_b)^2 + (y_a + y_b)^2 = -2x_a - 2x_b = 2x_a + 2x_b \\ \Rightarrow\ & x_a + x_b = y_a + y_b = 0 \\ \Rightarrow\ & a + b = 0 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 64 *(Προτείνει ο Βαγγέλης Μουρούκος) Να αποδείξετε ότι*

$$\arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=31191

Λύση 1 (Μιχάλης Λάμπρου) Από τον τύπο

$$2\arctan x = \arctan\frac{2x}{1 - x^2}$$

(είναι γνωστός και βγαίνει από τον $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$), το δεξί μέλος είναι ίσο με

$$\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{1 - \frac{2}{3}} = 6\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Από τον τύπο

$$\cos a = \pm\frac{1}{\sqrt{\tan^2 a + 1}}$$

έχουμε

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow C = \arccos\left(\frac{1}{5}\right)$$

(η γωνία $6\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 280^\circ$ είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο).

Από το τελευταίο έπεται το ζητούμενο.

Λύση 2 (Βαγγέλης Μουρούκος) Θεωρούμε τρίγωνο ABC με πλευρές $a = 5$, $b = 6$ και $c = 7$. Από το Νόμο των Συνημιτόνων, είναι

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$C = \arccos\left(\frac{1}{5}\right).$$

Αν $s = \dfrac{a + b + c}{2} = 9$ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε από τη σχέση

$$\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

προκύπτει ότι

$$\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow C = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

και το συμπέρασμα έπεται!