ΕΙΚΟΣΙΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΝ

Τεύχος 16
Δεκέμβριος 2016

$$\frac{x^3}{z^3+x^2y}+\frac{y^3}{x^3+y^2z}+\frac{z^3}{y^3+z^2x}\geq\frac{3}{2}$$

Ανισότητες

Επιμέλεια: Φωτεινή Καλδή

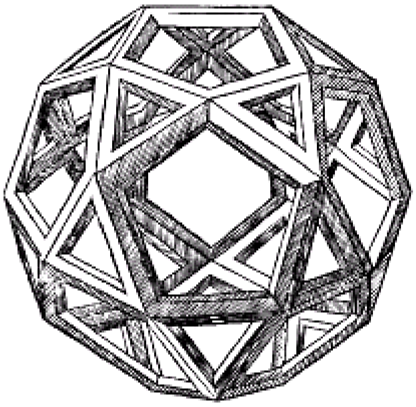
$$\frac{a^3+2}{b^2-b+1}+\frac{b^3+2}{c^2-c+1}+\frac{c^3+2}{a^2-a+1}\geq 9$$

mathematica.gr

Εικοσιδωδεκάεδρον τεύχος 16, Δεκέμβριος 2016.
ISSN: 2241-7133

Το «Εικοσιδωδεκάεδρον» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr. Ο δικτυακός τόπος mathematica.gr ανήκει και διευθύνεται σύμφωνα με τον κανονισμό του που υπάρχει στην αρχική του σελίδα από ομάδα Διευθυνόντων Μελών.

Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci



Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιονεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0,0,\pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2},\pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.
Πηγή:
http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση: Πάνος Γιαννόπουλος

Η επιλογή και η επιμέλεια των ασκήσεων αυτού του τεύχους οφείλεται στην Φωτεινή Καλδή. Τεχνικά βοήθησαν οι Χρήστος Τσιφάκης και Ν.Σ. Μαυρογιάννης.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Αν $x,y,z,w>0$, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{w^2}+\frac{w^2}{x^2}\geq\frac{x+y+z+w}{\sqrt[4]{xyzw}}.$$

Προτείνει ο Θάνος Μάγκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=11529

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{z}{w}\right)^2+\left(\frac{w}{x}\right)^2\geq$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^3}{yzw}}+\sqrt[4]{\frac{y^3}{zwx}}+\sqrt[4]{\frac{z^3}{wxy}}+\sqrt[4]{\frac{w^3}{xyz}}$$

Θέτουμε

$$\frac{x}{y}=a^4,\frac{y}{z}=b^4,\frac{z}{w}=c^4,\frac{w}{x}=d^4,$$

με $a,b,c,d>0$, οπότε είναι και $abcd=1$

και έχουμε πλέον να αποδείξουμε ότι

$$a^8+b^8+c^8+d^8\geq a^3b^2c+b^3c^2d+c^3d^2a+d^3a^2b.$$

Από την ανισότητα Chebyshev και την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε

$$a^8+b^8+c^8+d^8\geq$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}(a^6+b^6+c^6+d^6)\geq$$

$$\sqrt[4]{(abcd)^2}(a^6+b^6+c^6+d^6)=$$

$$(a^6+b^6+c^6+d^6).$$

Αρκεί λοιπόν, να αποδειχθεί ότι

$$a^6+b^6+c^6+d^6\geq a^3b^2c+b^3c^2d+c^3d^2a+d^3a^2b,$$

η οποία προκύπτει από την ανισότητα της αναδιάταξης ή διαφορετικά από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ ως εξής:

$$3a^6+2b^6+c^6\geq 6a^3b^2c,$$

$$3b^6+2c^6+d^6\geq 6b^3c^2d,$$

$$3c^6+2d^6+a^6\geq 6c^3d^2a,$$

$$3d^6+2a^6+b^6\geq 6d^3a^2b,$$

και πρόσθεση κατά μέλη.

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Αν a,b,c μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί ανά δύο, αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\geq 2$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=46949

ΛΥΣΗ

Πολύ γνωστό θέμα ! Αξίζει να θυμηθούμε την ακόλουθη εκπληκτική λύση, που έδωσε τότε (2007) ο Σιλουανός Μπραζιτίκος:

Ισχυρισμός:

Είναι

$$\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}=-1.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού:

Θεωρούμε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$f(x)=\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)}+\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}-1$$

και παρατηρούμε ότι

$$f(a)=f(b)=f(c)=0.$$

Επομένως, το $f(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Ειδικότερα, είναι $f(a+b+c)=0$ και ο Ισχυρισμός έπεται άμεσα!

Τέλος, είναι

$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2+$$

$$2\left[\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\ge 2$$

και το ζητούμενο δείχθηκε!

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Να αποδείξετε ότι αν $a,b,c>0$ με $abc=1,$ τότε ισχύει:

$$a^2b+b^2c+c^2a\ge\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Προτείνει ο Βαγγέλης Μουρούκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=55449

ΛΥΣΗ

(Διονύσιος Αδαμόπουλος)

Ισχύουν τα εξής:

Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί με $xyz=1$ τότε:

α) $x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}$ (1)

β) $x^2+y^2+z^2\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$x^2+y^2+z^2\ge x+y+z \quad (3)$$

γ) Έχουμε

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3\Leftrightarrow$$

$$2(xy+yz+zx)\geq 3+xy+yz+zx\,(4)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3) και (4) κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$(x+y+z)^2\geq x+y+z+3+xy+yz+zx\,.$$

Έστω $x=\dfrac{b}{a}, y=\dfrac{c}{b}$ και $z=\dfrac{a}{c}$.

Τότε για οποιοδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c θα ισχύει ότι:

$$(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})^2\geq 3+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=$$

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq\sqrt{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}$$

Αν όμως γνωρίζουμε επιπλέον ότι $abc=1$, τότε

$$\frac{1}{a}=bc,\frac{1}{b}=ca \text{ και } \frac{1}{c}=ab$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$b^2c+c^2a+a^2b\geq\sqrt{(a+b+c)(bc+ca+ba)}\,,$$

που είναι η ζητούμενη ανισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 4.

Αν $x,y,z>0$ με $x+y+z=3,$ αποδείξτε ότι

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx.$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=55111

ΛΥΣΗ

(Φωτεινή Καλδή)

Αρκεί να δείξουμε

$$2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{z}\geq 2xy+2yz+2zx\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2+2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{z}\geq$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2+2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{z}\geq(x+y+z)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2+2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{z}\geq 9$$

ισχύει αφού

$$x^2+2\sqrt{x}=x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}\geq 3\sqrt[3]{x^3}=3x \text{ και}$$

$$x+y+z=3.$$

Η ισότητα αν και μόνο αν $x=y=z=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.

Έστω $x,y,z>0$ με $xyz=1$. Να αποδειχτεί ότι :

$$\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\geq\frac{3}{4}$$

Προτείνει ο Ορέστης Λιγνός

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=54163

ΛΥΣΗ 1

(Φωτεινή Καλδή)

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}=\frac{x^3}{1+(y+z)+yz}$$

Από τηγενικευμένημορφή

$$\frac{x_1^k}{a_1}+\frac{x_2^k}{a_2}+\ldots+\frac{x_n^k}{a_n}\ge\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^k}{n^{k-2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)} \quad ,$$

$x_i, a_i > 0, k \ge 2, k \in \mathbb{N}$

έχουμε

$$\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\ge\frac{(x+y+x)^3}{3\big(3+2(x+y+z)+(xy+yz+zx)\big)}=$$

$$\frac{(x+y+x)^3}{9+6(x+y+z)+3(xy+yz+zx)}\ge$$

$$\overset{(x+y+z)^2\ge3(xy+yz+zx)}{\ge}$$

$$\frac{(x+y+x)^3}{9+6(x+y+z)+(x+y+z)^2}\overset{a=x+y+z\ge3, AM\ge GM}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\frac{a^3}{(a+3)^2}=f(a)\ge f(3)=\frac{3}{4}$$

ΛΥΣΗ 2

(sotarm)

Μια διαφορετική λύση, από ΑΜ-ΓΜ ισχύει:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\ge\frac{3x}{4}$$

Τώρα έχω με εφαρμογή και στους άλλους όρους:

$$\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{4}\sum(1+x)\ge\sum\frac{3x}{4}\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\ge\frac{1}{4}\sum(2x-1)\ge\frac{3}{4}$$

Αφού $2\sum x\ge 6\sqrt[3]{xyz}=6$, από ΑΜ-ΓΜ.

Ισότητα όταν $x=y=z=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.

Έστω x,y,z θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^3}{z^3+x^2y}+\frac{y^3}{x^3+y^2z}+\frac{z^3}{y^3+z^2x}\ge\frac{3}{2}$$

Προτείνει ο Σωτήρης Λοϊζιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=54346

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{x^3}{3z^3+3x^2y}+\frac{y^3}{3x^3+3y^2z}+\frac{z^3}{3y^3+3z^2x}\ge\frac{1}{2}.$$

Λόγω της ΑΜ-ΓΜ αρκεί

$$\frac{x^3}{2x^3+y^3+3z^3}+\frac{y^3}{2y^3+z^3+3x^3}+\frac{z^3}{2z^3+x^3+3y^3}\ge\frac{1}{2}.$$

Θέτοντας $x^3=a, y^3=b, z^3=c$ έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{a}{2a+b+3c}+\frac{b}{2b+c+3a}+\frac{c}{2c+a+3b}\ge\frac{1}{2}.$$

Αυτό είναι άμεσο από Cauchy-Schwarz, αφού

$$\frac{a}{2a+b+3c}+\frac{b}{2b+c+3a}+\frac{c}{2c+a+3b}=$$

$$\frac{a^2}{2a^2+ab+3ac}+\frac{b^2}{2b^2+bc+3ab}+\frac{c^2}{2c^2+ac+3bc}$$

$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)}=\frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.

Έστω οι θετικοί a,b,c με $abc=1$.Να δείξετε ότι :

$$\sum \frac{a}{a^2+2} \le 1$$

Προτείνει ο Ορέστης Λιγνός

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=54190

ΛΥΣΗ

(Β.Μουρούκος)

Είναι:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a^2+2} \le \sum_{cyc} \frac{a}{2a+1} = \sum_{cyc} \frac{1}{2+\frac{1}{a}},$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{cyc} \frac{1}{2+\frac{1}{a}} \le 1, \text{ ή ισοδύναμα:}$$

$$\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)+\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)+$$

$$+\left(2+\frac{1}{c}\right)\left(2+\frac{1}{a}\right) \le \left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \le$$

$$8+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{1}{abc} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \ge 3 \Leftrightarrow a+b+c \ge 3,$$

που ισχύει, από την ανισότητα

αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου:

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a=b=c=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Να αποδείξετε ότι για τους θετικούς αριθμούς

a, b, c ισχύει η ανισότητα:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=54172

ΛΥΣΗ 1

(Αλέξ.Συγκελάκης)

Λόγω ομογένειας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$a+b+c=1 \text{ με } a,b,c \in (0,1)$$

Επίσης είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} \ge 2x \ (1) \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

με ισότητα μόνο στο $\frac{1}{2}$.

Έτσι έχουμε

$$LHS = \sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}} \overset{(1)}{\ge} 2(a+b+c) = 2$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a=b=c=\frac{1}{2}$ το

οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει.

ΛΥΣΗ 2

(Θάνος Μάγκος)

Ουσιαστικά η απόδειξη του Αλέξανδρου, αλλιώς

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}}+\frac{2b}{2\sqrt{b(c+a)}}+\frac{2c}{2\sqrt{c(a+b)}}\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\geq\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2.$$

Η ισότητα θα ίσχυε αν

$$a=b+c, b=c+a, c=a+b,$$

το οποίο σημαίνει $a=b=c=0$ που δε μπορεί να συμβαίνει. Άρα είναι αυστηρή.

ΑΣΚΗΣΗ 9.

Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $ab+bc+ca=3$.

Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{2a^3+1}+\frac{1}{2b^3+1}+\frac{1}{2c^3+1}\geq 1.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=53065

ΛΥΣΗ

(Γιάννης Σημαντήρης)

Είναι

$$\frac{1}{2a^3+1}+\frac{1}{2b^3+1}+\frac{1}{2c^3+1}=\sum\frac{\frac{1}{a^2}}{2a+\frac{1}{a^2}}\geq$$

$$\frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{2(a+b+c)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

από τη γνωστή ανισότητα Andreescu.

Οπότε αρκεί

$$\frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{2(a+b+c)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\geq 1\Leftrightarrow$$

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2\geq 2(a+b+c)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\geq a+b+c\Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b+c}{abc}\geq a+b+c\Leftrightarrow abc\leq 1$$

Από την αρχική όμως με ΑΜ-ΓΜ παίρνουμε

$$3=ab+bc+ac\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow abc\leq 1$$

και τελειώσαμε.

ΑΣΚΗΣΗ 10.

Έστω a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί με

$$a^2+b^2+c^2=48.$$

Να δείξετε ότι

$$a^2\sqrt{2b^3+16}+b^2\sqrt{2c^3+16}+c^2\sqrt{2a^3+16}\leq 24^2$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=49546

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

ΛΥΣΗ

(Σωτήρης Λοϊζιάς)

Από $AM-GM$, είναι:

$$a^2\sqrt{2b^3+16}=a^2\sqrt{(2b+4)(b^2-2b+4)}\le$$

$$a^2\cdot\frac{2b+4+b^2-2b+4}{2}=a^2\cdot\frac{b^2+8}{2} \qquad (1)$$

Ομοίως,

$$b^2\sqrt{2c^3+16}=b^2\sqrt{(2c+4)(c^2-2c+4)}\le$$

$$b^2\cdot\frac{2c+4+c^2-2c+4}{2}=b^2\cdot\frac{c^2+8}{2} \qquad (2)$$

$$c^2\sqrt{2a^3+16}=c^2\sqrt{(2a+4)(a^2-2a+4)}\le$$

$$c^2\cdot\frac{2a+4+a^2-2a+4}{2}=c^2\cdot\frac{a^2+8}{2} \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις $(1),(2),(3)$ κατά μέλη, είναι

αρκετό να δείξουμε ότι:

$$a^2b^2+8a^2+b^2c^2+8b^2+c^2a^2+8c^2\le 2\cdot 24^2$$

Τώρα, αφού

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3} \text{ και}$$

$$a^2+b^2+c^2=48,$$

έχουμε:

$$a^2b^2+8a^2+b^2c^2+8b^2+c^2a^2+8c^2\le$$

$$\le\frac{48^2}{3}+8\cdot 48=2\cdot 24^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 11.

Αν a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι,

ώστε $a+b+c=abc$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{abc}{3\sqrt{2}\sqrt[4]{27}}\left(\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1}\right)\ge\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+1}$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=49587

ΛΥΣΗ

(Χρήστος Στραγάλης)

Ισοδύναμα θα αποδείξουμε ότι:

$$3\sqrt{2}\sqrt[4]{27}\sum\frac{1}{bc(a^2+1)}\le\sum\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1}$$

Όμως:

$$\sum\frac{1}{bc(a^2+1)}\overset{(a+b+c=abc)}{=}\sum\frac{1}{(a+b+c)a+bc}=$$

$$\sum\frac{1}{(a+b)(a+c)}=\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε πως:

$$\sum\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1}\ge\frac{6\sqrt{2}\sqrt[4]{27}abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Είναι:

$$LHS = \sum \frac{\sqrt{(a+b)(a^2-ab+b^2)}}{ab+1} \geq$$

$$\sum \frac{\sqrt{ab(a+b)}}{ab+1} \overset{AM-GM}{\geq} \frac{3\sqrt[6]{a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a)}}{\sqrt[3]{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}$$

$$= \frac{3\sqrt[6]{a^4b^4c^4\prod(a+b)}}{\sqrt[3]{\prod(abc+c)}} \overset{AM-GM,(*)}{\geq}$$

$$\frac{3\sqrt[6]{\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)a^4b^4c^4}}{\frac{3abc+a+b+c}{3}} =$$

$$\frac{9\sqrt[6]{8a^5b^5c^5(ab+bc+ac)}}{4\sqrt[3]{3abc}}$$

Όμως λόγω της βασικής

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz)$$

ισχύει

$$ab+bc+ac \geq \sqrt{3abc(a+b+c)} = \sqrt{3abc}$$

και έτσι:

$$LHS \geq \frac{3\sqrt{2}\sqrt[4]{27}}{4}$$

Επομένως απομένει να αποδείξουμε πως:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$$

το οποίο είναι προφανές.

(*): Στον αριθμητή έγινε χρήση της

$$9(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ac)$$

και στον παρανομαστή της AM-ΓΜ για τους 3 όρους του γινομένου.

ΑΣΚΗΣΗ 12.

Έστω a, b, c πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1. Να δείξετε ότι

$$\frac{a^3+2}{b^2-b+1} + \frac{b^3+2}{c^2-c+1} + \frac{c^3+2}{a^2-a+1} \geq 9.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=47393

ΛΥΣΗ 1

(Θάνος Μάγκος)

Από AM-ΓΜ είναι αρκετό να αποδειχθεί ότι

$$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) \geq$$

$$27(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1).$$

Αυτή ισχύει, αφού ισχύει η

$$x^3+2 \geq 3(x^2-x+1),$$

ως ισοδύναμη με την $(x-1)^3 \geq 0$.

ΛΥΣΗ 2

(Αλέξ.Συγκελάκης)

Λόγω κυκλικότητας του πρώτου μέρους μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$a = \max(a,b,c)$$

κι έτσι

$$a \geq b \geq c \text{ ή } a \geq c \geq b$$

Αν $a\ge b\ge c$ τότε οι τριάδες

$$(a^3+2,b^3+2,c^3+2) \text{ και}$$

$$\left(\frac{1}{a^2-a+1},\frac{1}{b^2-b+1},\frac{1}{c^2-c+1}\right)$$

έχουν αντίθετη διάταξη κι έτσι από την ανισότητα της αναδιάταξης έχουμε ότι:

$$LHS\ge \frac{a^3+2}{a^2-a+1}+\frac{b^3+2}{b^2-b+1}+\frac{b^3+2}{b^2-b+1}$$

Όμως η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-x+1}$$

έχει παράγωγο

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x^2+2)}{(x^2-x+1)^2}$$

δηλαδή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και έχει δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\frac{6x(x-1)}{(x^2-x+1)^3}$$

άρα η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$.

Συνεπώς από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και $a,b,c\ge 1$ άρα

$$3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\ge 3f(1)=9$$

και καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Όμοια αν $a\ge c\ge b$.

ΑΣΚΗΣΗ 13.

Αν $a,b,c>0$ με $abc=1$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\le\frac{1}{2}.$$

Προτείνει ο Θάνος Μάγκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=45838

ΛΥΣΗ

(Βαγγέλης Μουρούκος)

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου προκύπτει ότι:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+2b^2+3}=\sum_{cyc}\frac{1}{\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+1\right)+2}\le$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{2ab+2b+2}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{1}{ab+b+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{abc}{bc+c+abc}+\frac{b}{abc+ab+b}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab+b+1}+\frac{b}{ab+b+1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\frac{ab+b+1}{ab+b+1}=\frac{1}{2}$$

και το συμπέρασμα έπεται.

Το ίσον ισχύει αν και μόνο αν $a=b=c=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 14.

Αν $a,b,c>0$ με

$$\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+c+a}+\frac{c}{1+a+b}\geq \frac{ab}{1+a+b}+\frac{bc}{1+b+c}+\frac{ca}{1+c+a},$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+a+b+c+2\geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}).$$

Προτείνει ο Θάνος Μάγκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=45087

ΛΥΣΗ

(Γιώργος Βασδέκης)

Από την

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq a+b+c$$

είναι αρκετό να αποδείξουμε την Ανισότητα

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq a+b+c \Leftrightarrow a+b+c\geq ab+bc+ca.$$

Η συνθήκη μας δίνει ότι

$$\sum\frac{a-bc}{1+b+c}\geq 0.$$

Αν θεωρήσουμε πως $a\geq b\geq c$ τότε θα ισχύει

$$a-bc\geq b-ca\geq c-ab \text{ και}$$

$$1+b+c\leq 1+c+a\leq 1+a+b$$

οπότε από την Ανισότητα Chebychev θα ισχύει

$$\frac{1}{3}\sum(a-bc)\cdot\sum\frac{1}{1+b+c}\geq \sum\frac{a-bc}{1+b+c}\geq 0$$

από όπου προκύπτει η ζητούμενη.

ΑΣΚΗΣΗ 15.

Αν $a,b,c>-1$ και $ab+bc+ca+2abc=1,$

νααποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2+a+b}+\frac{1}{2+b+c}+\frac{1}{2+c+a}\leq 1.$$

Προτείνει ο Θάνος Μάγκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=44676

ΛΥΣΗ 1

(Γιώργος Βασδέκης)

Ακουλουθώντας τον μετασχηματισμό

$$(a,b,c)\mapsto\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right) \text{ έχουμε πως}$$

$$a+b+2=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+2=\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}=$$

$$(x+y+z)\cdot\frac{(x+z)+(y+z)}{(x+z)(y+z)}\geq\frac{2(x+y+z)}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}$$

σύμφωνα με την Ανισότητα AM-GM.

Οπότε ισχύει

$$\sum\frac{1}{a+b+2}\leq\frac{1}{2(x+y+z)}\cdot\sum\sqrt{(x+z)(y+z)}.$$

Τέλος, για ακόμη μια φορά από την Ανισότητα AM-GM ισχύει

$$\sum\sqrt{(x+z)(y+z)} \le \frac{1}{2}\cdot\sum[(x+z)+(y+z)] =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 4(x+y+z) = 2(x+y+z).$$

Το ζητούμενο έπεται.

ΛΥΣΗ 2

(Δημήτρης Χριστοφίδης)

Παρατηρώ ότι

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} =$$

$$\frac{(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+3}{abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1} =$$

$$\frac{(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+3}{\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+(a+b+c)+\frac{3}{2}} = 2$$

Θέτω λοιπόν

$$x = 1/(1+a),\ y = 1/(1+b),\ z = 1/(1+c).$$

Είναι

$$a+b+2 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

οπότε

$$\frac{1}{a+b+2} = \frac{xy}{x+y} \text{ κ.τ.λ.}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξω ότι $\sum\frac{xy}{x+y} \le 1$

όπου x,y,z> 0 και $x+y+z=2$

Αυτό τώρα είναι άμεσο αφού από

Cauchy-Schwarz είναι

$$\frac{xy}{x+y} \le \frac{x+y}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 16.

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \ge \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

Πότε ισχύει η παραπάνω ως ισότητα;

Προτείνει ο Βαγγέλης Μουρούκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=43873

ΛΥΣΗ 1

(Αντώνης Ζητρίδης)

Αν $ab=0$,τότε προφανώς η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτω τώρα ότι $ab \ne 0$.

Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξω ότι

$$\left(\sqrt{\frac{ab+1}{b^2+1}}\cdot a+\sqrt{\frac{ab+1}{a^2+1}}\cdot b\right)^2 \ge (a+b)^2.$$

Από την ανισότητα Holder έχω

$$\left(a\cdot\frac{b^2+1}{ab+1}+\frac{a^2+1}{ab+1}\cdot b\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{ab+1}{b^2+1}}\cdot a+\sqrt{\frac{ab+1}{a^2+1}}\cdot b\right)^2 \geq (a+b)^3$$

Όμως η πρώτη παρένθεση ισούται με $a+b$

(ενώνοντας τα κλάσματα και κάνοντας

παραγοντοποίηση κατά ομάδες),

οπότε η ανισότητα γράφεται

$$\left(\sqrt{\frac{ab+1}{b^2+1}}\cdot a+\sqrt{\frac{ab+1}{a^2+1}}\cdot b\right)^2 \geq (a+b)^2$$

που είναι το ζητούμενο.

Η ισότητα ισχύει-σύμφωνα με τη συνθήκη

ισότητας στη Holder-όταν $a=b$.

ΛΥΣΗ 2

(Δημήτρης Ιωάννου)

Αν $a=0$ ή $b=0$, το ζητούμενο έπεται αμέσως.

Έστω ότι $a,b\neq 0$

Είναι

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2}{a\sqrt{b^2+1}}+\frac{b^2}{b\sqrt{a^2+1}}\geq \frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}}\geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}},$$

ή αρκεί να δείξουμε ότι:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\leq (a+b)\sqrt{ab+1},$$

ή αρκεί:

$$a^2(b^2+1)+b^2(a^2+1)+2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\leq$$

$$(a+b)^2(ab+1)$$

ή αρκεί:

$$2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\leq ab(a^2+b^2+2),$$

ή αρκεί

$$4a^2b^2(a^2b^2+a^2+b^2+1)\leq a^2b^2(a^2+b^2+2)^2,$$

ή:

$$a^4+b^4-2a^2b^2\geq 0, \text{ ή } (a^2-b^2)^2\geq 0,$$

το οποίο είναι αληθές.

ΑΣΚΗΣΗ 17.

Αν οι αριθμοί α,β,γ είναι θετικοί και όχι

μεγαλύτεροι του 2 και επιπλέον ισχύει ότι

$$\alpha+\beta+\gamma=1$$

αποδείξτε ότι

$$\frac{\alpha}{2-\alpha}+\frac{\beta}{2-\beta}+\frac{\gamma}{2-\gamma}\geq\frac{3}{5}$$

Προτείνει ο Γιάννης Σημαντήρης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=43293

ΛΥΣΗ 1

(Θάνος Μάγκος)

Από Cauchy-Schwarz

$$\sum\frac{a}{2-a}=\sum\frac{a^2}{2a-a^2}\geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)}=$$

$$\frac{1}{2-(a^2+b^2+c^2)}=\frac{3}{6-3(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{3}{5},$$

αφού

$$3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2=1.$$

ΛΥΣΗ 2

(Γιάννης Σημαντήρης)

Ισχύει ότι

$$\frac{\alpha}{2-\alpha}=\frac{-\left(2-\alpha\right)+2}{2-\alpha}=-1+\frac{2}{2-\alpha}$$

Επομένως η ανισότητα γίνεται

$$\frac{2}{2-\alpha}+\frac{2}{2-\beta}+\frac{2}{2-\gamma}-3\geq\frac{3}{5}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{2-\alpha}+\frac{2}{2-\beta}+\frac{2}{2-\gamma}\geq\frac{18}{5}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\beta}+\frac{1}{2-\gamma}\geq\frac{9}{5}$$

Αυτή όμως προκύπτει από την ανισότητα Andreescu αφού

$$\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\beta}+\frac{1}{2-\gamma}\geq\frac{\left(1+1+1\right)^2}{6-\left(\alpha+\beta+\gamma\right)}=\frac{9}{5}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$.

ΛΥΣΗ 3

(Μιχάλης Λάμπρου)

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\frac{2}{2-a}\geq\frac{18a-1}{25},\forall a\in[0,2)$$

και όμοια για τα b,c. Η ανισότητα αυτή ισχύει διότι, πολλαπλασιάζοντας χιαστί και μαζεύοντας τους όρους, ισοδυναμεί με την αληθή

$$(3a-1)^2\geq 0.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έπεται

$$\frac{2}{2-a}+\frac{2}{2-b}+\frac{2}{2-c}\geq\frac{18(a+b+c)-3}{25}=$$

$$\frac{18\cdot1-3}{25}=\frac{3}{5}$$

όπως θέλαμε.

Σχόλιο

(Θάνος Μάγκος)

Ας εξηγήσουμε πώς "μάντεψε" ο Μιχάλης την ανισότητά του. Πρόκειται για τη μέθοδο της εφαπτομένης, η οποία, εν ολίγοις, λέει το εξής: Υποψιαζόμαστε ότι η ισότητα στην αποδεικτέα ισχύει όταν τα a,b,c γίνουν ίσα, το οποίο, λόγω της $a+b+c=1$ συμβαίνει όταν

$$a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση

$\frac{x}{2-x}$ είναι κυρτή πριν το 2.

Άρα θα βρίσκεται "ψηλότερα" από την εφαπτομένη της, σε οποιοδήποτε σημείο της.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{3}$ είναι η $y=\frac{18x-1}{25}$

Άρα $\frac{2}{2-x}\geq\frac{18x-1}{25}$.

ΑΣΚΗΣΗ 18.

Να δείξετε ότι

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{a+c+2b}\leq\frac{1}{4}(a+b+c),$$

$\forall a,b,c>0$

Προτείνει η Φωτεινή Καλδή.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=43064

ΛΥΣΗ 1

(Παύλος Μαραγκουδάκης)

Για θετικούς x,y ισχύει

$$\frac{4}{x+y}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

οπότε

$$\frac{1}{a+b+2c}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

και τελικά

$$\frac{ab}{a+b+2c}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right).$$

Ομοίως

$$\frac{bc}{b+c+2a}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$$

$$\frac{ca}{a+c+2b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{ca}{a+b}+\frac{ca}{b+c}\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη οπότε

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{a+c+2b}\leq$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ac+bc}{a+b}\right)=\frac{1}{4}(a+b+c)$$

Προσθήκη (Γιώργος Βασδέκης)

Η ακόλουθη ανισότητα ισχύει επίσης!

Αν a,b,c>0 τότε να αποδείξετε ότι

$$\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2}+\frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2}\leq$$

$$\frac{a+b+c}{4}.$$

ΛΥΣΗ 1

(Παύλος Μαραγκουδάκης)

Η ανισότητα είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες:

$$a-\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}+b-\frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2}+$$

$$+c-\frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2}\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{c^2+2a^2+b^2}\right)\geq$$

$$\frac{3}{4}\left(a+b+c\right)$$

Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι

$$a^2+b^2+c^2=3.$$

Τότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{a}{b^2+3}+\frac{b}{c^2+3}+\frac{c}{a^2+3}\geq\frac{1}{4}\left(a+b+c\right)$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει

$$\left(\frac{a}{b^2+3}+\frac{b}{c^2+3}+\frac{c}{a^2+3}\right)\left[a\left(b^2+3\right)+b\left(c^2+3\right)+c\left(a^2+3)\right)\right]\geq\left(a+b+c\right)^2$$

Αρκείναδείξουμεότι

$$\frac{\left(a+b+c\right)^2}{ab^2+bc^2+ca^2+3(a+b+c)}\geq\frac{1}{4}\left(a+b+c\right)$$

η οποία μετά από απλές πράξεις γίνεται

$$a+b+c\geq ab^2+bc^2+ca^2$$

καιομογενοποιώντας

$$\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right).$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$a\left(a-c\right)^2+b\left(b-a\right)^2+c\left(c-b\right)^2\geq 0$$

ΛΥΣΗ 2

(Δημήτρης Ιωάννου)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$a-\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}+b-\frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2}+$$

$$+c-\frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2}\geq\frac{3}{4}\left(a+b+c\right)$$

ή

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{c^2+2a^2+b^2}\right)$$

$$\geq\frac{3}{4}\left(a+b+c\right)$$

ήαρκεί:

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{a^2}{a^3+2ab^2+ac^2}+\frac{b^2}{b^3+2bc^2+ba^2}+\frac{c^2}{c^3+2ca^2+cb^2}\right)$$

$$\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$$

Όμως:

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{a^2}{a^3+2ab^2+ac^2}+\frac{b^2}{b^3+2bc^2+ba^2}+\frac{c^2}{c^3+2ca^2+cb^2}\right)\geq$$

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+2ab^2+2bc^2+2ca^2+ac^2+ba^2+cb^2}$$

Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(a^2+b^2+c^2).\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+2ab^2+2bc^2+2ca^2+ac^2+ba^2+cb^2}$$

$$\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$$

ή ότι:

$$4(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq$$
$$3(a^3+b^3+c^3+2ab^2+2bc^2+2ca^2+ac^2+ba^2+cb^2)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a-2a^2c-2b^2a-2c^2b\geq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a(a^2-2ac+c^2)+b(b^2-2ba+a^2)+c(c^2-2cb+b^2)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a(a-c)^2+b(b-a)^2+c(c-b)^2\geq 0\text{'}$$

το οποίο είναι αληθές.

ΑΣΚΗΣΗ 19.

Έστω a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $abc=1$. Να αποδειχθεί ότι

$$1+ab+bc+ca\geq \min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab},\frac{(b+c)^2}{bc},\frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=38966

ΛΥΣΗ 1

(Θάνος Μάγκος)

Ας είναι

$$\frac{(a+b)^2}{ab}=\min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab},\frac{(b+c)^2}{bc},\frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

Τότε,

$$c(a^2+b^2)\leq a(b^2+c^2)\wedge c(a^2+b^2)\leq b(c^2+a^2).$$

Απόαυτέςπροκύπτει

$$c\leq a\leq \frac{b^2}{c}\wedge c\leq b\leq \frac{a^2}{c}.$$

Αφού $abc=1$, από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι $c\leq 1, a\geq 1, b\geq 1$.

Ηαποδεικτέαγράφεται

$$1+ab+bc+ca\geq c(a^2+b^2+2ab)\Leftrightarrow$$
$$ab-1\geq c(a^2+b^2-a-b)\Leftrightarrow$$
$$(ab)^2-ab\geq a^2-a+b^2-b.$$

Επειδή $a,b\geq 1$ είναι $ab\geq a+b-1$ και επειδή η συνάρτηση x^2-x είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ είναι

$$(ab)^2-ab\geq (a+b-1)^2-a-b+1=$$

$$a^2+b^2+1-2a-2b+2ab-a-b+1\geq$$

$$a^2+b^2+1-2a-2b+2a+2b-2-a-b+1=$$

$$a^2+b^2-a-b.$$

ΛΥΣΗ 2

(Παύλος Μαραγκουδάκης)

Μια απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $abc=1$ με

$$1+ab+bc+ca<\min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab},\frac{(b+c)^2}{bc},\frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

Τότε

$$1+ab+bc+ca<\frac{(a+b)^2}{ab}$$

$$(ab)^2+ab<(a+b)^2-(a+b)$$

$$\left(ab+\frac{1}{2}\right)^2<\left(a+b-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$ab+\frac{1}{2}<\left|a+b-\frac{1}{2}\right|$$

$$ab+\frac{1}{2}<a+b-\frac{1}{2} \text{ ή } ab+\frac{1}{2}<-a-b+\frac{1}{2}$$

(απορρίπτεται)

$$(a-1)(b-1)<0$$

και ομοίως

$$(b-1)(c-1)<0,\ (c-1)(a-1)<0.$$

Άρα

$$(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2<0,\ \text{άτοπο.}$$

Η ισότητα ισχύει όταν κάποιος από τους a,b,c

είναι ίσος με τη μονάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 20.

Αν a,b,c πλευρές τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\frac{(a+c-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(a+c-b)}\geq$$

$$\geq ab+bc+ca$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=45578

ΛΥΣΗ

(raf16)

Θέτοντας

$$a+c-b=x, a+b-c=y, b+c-a=z$$

θα πάρουμε

$$a=\frac{x+y}{2}, b=\frac{y+z}{2}, c=\frac{z+x}{2}.$$

Είναι x, y, z> 0 λόγω της τριγωνικής ανισότητας.

Επομένως, αρκεί:

$$2\sum\frac{x^4}{xy+y^2}\geq\sum\frac{(x+y)(y+z)}{4}.$$

Το δεξί μέλος γίνεται:

$$\sum\frac{(x+y)(y+z)}{2}=$$
$$\frac{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}{4}\leq x^2+y^2+z^2$$

Στην τελευταία χρησιμοποιήσαμε τη θεμελιώδη

$$xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2.$$

Επομένως, αρκεί να δειχθεί:

$$\sum\frac{x^4}{xy+y^2}\geq\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Από την Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\sum\frac{x^4}{xy+y^2}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}\geq$$
.
$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

Έτσι, το ζητούμενο εδείχθη.

ΑΣΚΗΣΗ 21.

Έστω a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $abc \geq 1$.

Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{a^4-1}{ab^3+abc+ac^3}+\frac{b^4-1}{bc^3+abc+ba^3}+$$

$$+\frac{c^4-1}{ca^3+abc+cb^3}\geq 0$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=38965

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Η αποδεικτέα γράφεται

$$\sum\frac{a^3}{b^3+bc+c^3}\geq\sum\frac{1}{a(b^3+bc+c^3)}.$$

Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a \geq b \geq c$.

Τότε,

$$\frac{1}{b^3+bc+c^3}\geq\frac{1}{c^3+ca+a^3}\geq\frac{1}{a^3+ab+b^3}$$

$$\text{και } \frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}.$$

Από την ανισότητα Chebyshev έχουμε

$$\sum\frac{a^3}{b^3+bc+c^3}\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\sum\frac{1}{b^3+bc+c^3}$$

και

$$\sum\frac{1}{a(b^3+bc+c^3)}\leq\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)\sum\frac{1}{b^3+bc+c^3}.$$

Πλέον αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Πράγματι, είναι

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{a+b+c}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

και

$$\frac{a+b+c}{3}\geq 1 \text{ (AM-GM και } abc\geq 1\text{)},$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

αφού $abc \geq 1$.

ΛΥΣΗ

(Χρήστος Στραγάλης)

Εναλλακτικά έχουμε:

$LHS =$

$$\sum\left(\frac{a^4+ab^3+abc+ac^3-1}{ab^3+abc+ac^3}-1\right)\overset{(1)}{\geq}$$

$$\sum\left(\frac{a^4+ab^3+1+ac^3-1}{ab^3+abc+ac^3}-1\right)=\sum\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+bc+c^3}-1\right)\overset{(2)}{\geq}$$

$$\sum\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+\frac{b^3+c^3+1}{3}+c^3}-1\right)=$$

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\sum\frac{1}{4b^3+4c^3+1}-3\overset{(3)}{\geq}$$

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\cdot\frac{9}{8\left(a^3+b^3+c^3\right)+3}-3\geq 0$$

Στα ανισοτικά βήματα χρησιμοποιήθηκαν διαδοχικά:

(1): Η δοθείσα ανισότητα

(2): HAM-GM

(3): HB.C.S

Η τελευταία είναι προφανής καθώς είναι ισοδύναμη με την: $a^3+b^3+c^3\geq 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 22.

Αν για τους θετικούς αριθμούς a,b, ισχύει $a\neq c$ και

$$a+\sqrt{b+\sqrt{c}}=c+\sqrt{b+\sqrt{a}},$$

να δείξετε ότι 40ac<1.

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=35301

ΛΥΣΗ

(Νίκος Ζανταρίδης)

$$a+\sqrt{b+\sqrt{c}}=c+\sqrt{b+\sqrt{a}}\Rightarrow$$

$$a-c=\sqrt{b+\sqrt{a}}-\sqrt{b+\sqrt{c}}\Rightarrow$$

$$a-c=\frac{\left(b+\sqrt{a}\right)-\left(b+\sqrt{c}\right)}{\sqrt{b+\sqrt{a}}+\sqrt{b+\sqrt{c}}}\Rightarrow$$

$$a-c=\frac{a-c}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b+\sqrt{a}}+\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)}\Rightarrow$$

$$\overset{a-c\neq 0}{\Longrightarrow}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b+\sqrt{a}}+\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)=1\Rightarrow$$

$$1=\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b+\sqrt{a}}+\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)>$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{0+\sqrt{a}}+\sqrt{0+\sqrt{c}}\right)=$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{c}\right)\geq$$

$$2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{c}}.2\sqrt{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{c}}=4\sqrt[8]{(ac)^3}\Rightarrow$$

$$1>4\sqrt[8]{(ac)^3}\Rightarrow$$

$$ac<\sqrt[3]{\frac{1}{2^{16}}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2^6.2^{10}}}<\sqrt[3]{\frac{1}{2^6.10^3}}=\frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow 40ac<1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 23.

Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\geq\frac{25}{1+48xy^2},\ \forall x,y>0,\ x+2y=1.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=33270

ΛΥΣΗ

(Βαγγέλης Μουρούκος)

Θα αποδείξουμε τη γενικότερη ανισότητα:

Αν $a,b,c\in(0,+\infty)$ με $a+b+c=1$, τότε ισχύει:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{25}{1+48abc}\ (\bigstar).$$

Η ανισότητα $(\bigstar)$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(1+48abc)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 25\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-9\right)+48(ab+bc+ca)\geq 16\quad (1).$$

Αλλά είναι:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-9=(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=$$
$$=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{ab}$$

οπότε η ανισότητα (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}+$$
$$+48(ab+bc+ca)\geq 16\ (2).$$

Δίχως βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $a\geq b\geq c$.

Εφόσον $b\geq c$ και

$$\frac{(a-b)^2}{b}\leq\frac{(c-a)^2}{c},$$

από την ανισότητα Chebyshev προκύπτει ότι:

$$(b+c)\left[\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(c-a)^2}{c}\right]\geq$$

$$2\left[b\frac{(a-b)^2}{b}+c\frac{(c-a)^2}{c}\right]=2\left[(a-b)^2+(c-a)^2\right]$$

και άρα

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(c-a)^2}{ca}\geq\frac{2\left[(a-b)^2+(c-a)^2\right]}{a(b+c)}\ (3).$$

Εξάλλου, είναι:

$$ab+ac\geq 2bc\Rightarrow\frac{1}{bc}\geq\frac{2}{a(b+c)}\Rightarrow$$
$$\frac{(b-c)^2}{bc}\geq\frac{2(b-c)^2}{a(b+c)}\quad (4).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4), βρίσκουμε ότι:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\geq$$
$$\frac{2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{a(b+c)}\quad (5).$$

Είναι, όμως:

$$(a-b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 4a(b+c),$$

οπότε από την (5) προκύπτει ότι:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca} \geq$$

$$\frac{8\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{(a+b+c)^2}=$$

$$=16(a+b+c)^2-48(ab+bc+ca)=$$

$$16-48(ab+bc+ca)$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

ΑΣΚΗΣΗ 24.

Να δείξετε ότι

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1} \geq 2$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a,b,c για τους οποίους

$$a+b+c+2=abc.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=31655

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}=\frac{a^2}{ab+a}+\frac{b^2}{bc+b}+\frac{c^2}{ca+c} \geq$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+a+b+c}.$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+a+b+c} \geq 2,$$

δηλαδή ότι

$$a^2+b^2+c^2 \geq 2(a+b+c) \quad (1)$$

Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ είναι

$$abc=2+a+b+c \geq 2+3\sqrt[3]{abc},$$

δηλαδήαν $x=\sqrt[3]{abc}$

$$x^3 \geq 2+3x \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow abc \geq 8,$$

οπότε, λόγω της

$abc=2+a+b+c$, είναι $a+b+c \geq 6$.

Τώρα, η (1) προκύπτει από τη γνωστή ανισότητα

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq$$

$$\frac{1}{3}6(a+b+c)=2(a+b+c).$$

ΑΣΚΗΣΗ 25.

Αν $a,b,c \in [0,1]$ να δείξετε ότι

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \leq abc\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+1.$$

Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=31489

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Θέτοντας

$$x = ab, y = bc, z = ca,$$

το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο ακόλουθο:

Αν $x, y, z \in [0,1]$, να αποδειχθεί ότι

$$1 + x^2 y + y^2 z + z^2 x \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Επειδήείναι $x, y, z \in [0,1]$ έχουμε

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x \geq (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2,$$

οπότεαρκείναααποδείξουμεότι

$$1 + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Θέτοντας τώρα

$$k = x^2, m = y^2, n = z^2,$$

έχουμε να αποδείξουμε ότι όταν $k, m, n \in [0,1]$

ισχύει

$$1 + km + mn + nk \geq k + m + n.$$

Πράγματι, επειδή $k, m, n \in [0,1]$ είναι

$$(1-k)(1-m)(1-n) \geq 0 \Rightarrow$$

$$1 + km + mn + nk \geq k + m + n + kmn \geq k + m + n.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26.

Αν $a, b, c > 0$, να αποδειχθεί ότι

$$8(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq 9(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab).$$

Προτείνει ο Θάνος Μάγκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=30182

ΛΥΣΗ 1

(spiros filippas)

Από ΑΜ-ΓΜ και την προφανή

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

έχουμε:

$$RHS = 9(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq$$

$$9\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{3}\right)^3 \leq$$

$$\leq \frac{\left(2(a^2 + b^2 + c^2)\right)^3}{3}$$

Συνεπώςαρκεί:

$$3(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3$$

Αυτή όμως είναι στην ουσία η Holder

ΛΥΣΗ 2

(Χρήστος Κυριαζής)

Είναι:

$$a^2 + bc \leq a^2 + \frac{b^2 + c^2}{2} = \frac{2a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξω ότι:

$$8\left(a^3 + b^3 + c^3\right)^2 \geq$$

$$9\frac{2a^2 + b^2 + c^2}{2}\frac{2b^2 + c^2 + a^2}{2}\frac{2c^2 + a^2 + b^2}{2}$$

ή

$$8\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^2 \geq$$

$$\frac{2a^2+b^2+c^2}{2}\frac{2b^2+c^2+a^2}{2}\frac{2c^2+a^2+b^2}{2}$$

όμως

$$\frac{2a^2+b^2+c^2}{2}\frac{2b^2+c^2+a^2}{2}\frac{2c^2+a^2+b^2}{2} \leq$$

$$\left(\frac{\frac{2a^2+b^2+c^2+2b^2+c^2+a^2+2c^2+a^2+b^2}{2}}{3}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{2c^2+2a^2+2b^2}{3}\right)^3$$

Αρκεί να δείξω λοιπόν, ότι:

$$8\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{2c^2+2a^2+2b^2}{3}\right)^3$$

ή

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3$$

που ισχύει αφού πρόκειται για την ανισότητα των δυνάμεων.

ΑΣΚΗΣΗ 27.

Αν $a,b,c,x,y,z \in (0,+\infty)$

και ισχύει

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(x+y)(y+z)(z+x)=8$$

να δείξετε ότι

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq 3.$$

Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=27820

ΛΥΣΗ 1

(Χρήστος Κυριαζής)

'Εχω:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

$$\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(b+c)^2}{y+z}$$

$$\frac{c^2}{z}+\frac{a^2}{x} \geq \frac{(a+c)^2}{z+x}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχω:

$$2\frac{a^2}{x}+2\frac{b^2}{y}+2\frac{c^2}{z} \geq$$

$$\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{(b+c)^2}{y+z}+\frac{(a+c)^2}{z+x} \overset{A.M-G.M}{\geq}$$

$$3\sqrt[3]{\frac{[(a+b)(b+c)(a+c)]^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

Επομένως:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq 3$$

Η ισότητα αληθεύει για

$$a=b=c=x=y=z=1$$

ΑΣΚΗΣΗ 28.

Δείξτε ότι

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{a+\sqrt{b}}}\le$$

$$3\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}},$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς

a,b,c, όπου $m=\dfrac{a+b+c}{3}$.

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=34671

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Είναι άμεση, από τριπλή εφαρμογή της

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3(x+y+z)}$$

Πράγματι, είναι

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{a+\sqrt{b}}}\le$$

$$\sqrt{3(a+b+c+\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{b+\sqrt{c}}+\sqrt{c+\sqrt{a}})}\le$$

$$\le\sqrt{3(a+b+c+\sqrt{3(a+b+c+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})})}\le$$

$$\sqrt{3(a+b+c)+3\sqrt{3(a+b+c)+3\sqrt{3(a+b+c)}}}=$$

$$=\sqrt{9m+3\sqrt{9m+3\sqrt{9m}}}=3\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 29.

Αν x, y, z>0 με $x+y=1$ τότε

$$\frac{2x^2+y+2}{yz+1}+\frac{2y^2+x+2}{xz+1}\ge\frac{12}{z+2}.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=33826

ΛΥΣΗ 1

(Θάνος Μάγκος)

Από Cauchy-Schwarz είναι

$$\frac{2x^2+y+2}{yz+1}+\frac{2y^2+x+2}{xz+1}\ge$$

$$\frac{(\sqrt{2x^2+y+2}+\sqrt{2y^2+x+2})^2}{z(x+y)+2}=.$$

$$\frac{(\sqrt{2x^2-x+3}+\sqrt{2y^2-y+3})^2}{z+2}$$

Αρκεί πλέον, να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{2x^2-x+3}+\sqrt{2y^2-y+3}\ge\sqrt{12},$$

το οποίο είναι άμεσο από την Jensen στην κυρτή

$$\sqrt{2x^2-x+3}.$$

ΛΥΣΗ 2

(Θάνος Μάγκος)

Και χωρίς Jensen, αλλά με Minkowski:

Είναι

$$\sqrt{2x^2-x+3}+\sqrt{2y^2-y+3}=$$

$$\sqrt{x^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{11}{4}}^2}+\sqrt{y^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{11}{4}}^2}\geq$$

$$\sqrt{(x+y)^2+(x+y-1)^2+\left(2\sqrt{\frac{11}{4}}\right)^2}=\sqrt{12}$$

ΑΣΚΗΣΗ 30.

Αν $a,b,c>0$ και $abc=1$, τότε

$$\frac{a}{b^2(c+1)}+\frac{b}{c^2(a+1)}+\frac{c}{a^2(b+1)}\geq\frac{3}{2}.$$

Προτείνει ο Θάνος Μάγκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=33501

ΛΥΣΗ 1

(Γιώργος Βασδέκης)

Ακολουθώντας τον μετασχηματισμό

$$(a,b,c)\mapsto\left(\frac{y}{x},\frac{z}{y},\frac{x}{z}\right)$$

η Ανισότητα γίνεται

$$\sum\frac{y^3}{zx(z+x)}\geq\frac{3}{2}.$$

Αλλά, από την Ανισότητα Cauchy-Schwarz θα έχουμε

$$\sum\frac{y^3}{zx(z+x)}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2xyz(x+y+z)}\geq$$

.

$$\frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{2xyz(x+y+z)}\geq\frac{3}{2}$$

ΛΥΣΗ 2

(Δημήτρης Σκουτέρης)

Έστω

$$a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}.$$

Η ανισότητα γίνεται

$$\sum_{cyc}\frac{x^2z^2}{y^3(x+z)}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{4x^2z^2}{y^2(x^2+z^2+2y^2)}\geq 3$$

(από ΑΜ-ΓΜ).

Θέτουμε

$$p=x^2,q=y^2,r=z^2$$

και αρκεί να αποδείξουμε

$$\sum_{cyc}\frac{4ab}{c(a+b+2c)}\geq 3.$$

'Εχουμε (Cauchy)

$$\sum_{cyc}\frac{4ab}{c(a+b+2c)}\geq\frac{4(ab+bc+ac)^2}{4abc(a+b+c)}=$$

$$=\frac{(ab+bc+ac)^2}{abc(a+b+c)}\geq 3$$

από ανισότητα Newton.

ΑΣΚΗΣΗ 31.

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a,b,c είναι τέτοιοι ώστε

$$ab+bc+ca=3.$$

Να δείξετε ότι

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\geq 8.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=50079

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Είναι

$$a+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{a+1}$$

και οι ανάλογες, οπότε αρκεί

$$[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq 8(a+1)(b+1)(c+1),$$

δηλαδή

$$(3(a+b+c)-abc)^2 \geq 8(abc+a+b+c+4),$$

αφού

$$ab+bc+ca=3.$$

Αν

$$x:=a+b+c\geq 3 \text{ και } y:=abc\leq 1$$

έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$(3x-y)^2 \geq 8(x+y+4).$$

Επειδή $y\leq 1$αρκεί

$$(3x-1)^2 \geq 8(x+5) \Leftrightarrow (x-3)(9x+13)\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 32.

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a,b,c είναι τέτοιοι ώστε

$$a+b+c=1.$$

Να δείξετε ότι

$$\frac{bc+a+1}{a^2+1}+\frac{ca+b+1}{b^2+1}+\frac{ab+c+1}{c^2+1}\leq \frac{39}{10}.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=50079

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Το πρώτο κλάσμα γράφεται

$$\frac{bc+a+1}{a^2+1}=\frac{bc+a(a+b+c)+1}{a^2+1}=$$

$$\frac{bc+a^2+ab+ac+1}{a^2+1}=1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+1}$$

Ομοίως

$$\frac{ca+b+1}{b^2+1}=1+\frac{ab+bc+ca}{b^2+1}$$

$$\frac{ab+c+1}{c^2+1}=1+\frac{ab+bc+ca}{c^2+1}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\leq \frac{9}{10}.$$

Όμως

$$3(ab+bc+ca)\leq (a+b+c)^2=1$$

Τελικά θα αρκούσε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\leq \frac{27}{10}.$$

Εξετάζουμε αν υπάρχουν σταθερές k,m ώστε

$$\frac{1}{x^2+1}\le kx+m \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

ή ισοδύναμα

$$kx^3+mx^2+kx+m-1\ge 0$$

$$\text{για κάθε } x\in[0,1]$$

ώστε το $\frac{1}{3}$ να είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου

$$kx^3+mx^2+kx+m-1.$$

Προκύπτει

$$k=-\frac{27}{50} \text{ και } m=\frac{54}{50}.$$

Τώρα θα πρέπει

$$\frac{1}{x^2+1}\le\frac{27}{50}(2-x) \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

που ισχύει γιατί ισοδύναμα γράφεται

$$(4-3x)(3x-1)^2\ge 0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{27}{50}(6-a-b-c)=\frac{27}{10}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 33.

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a,b,c είναι τέτοιοι ώστε

$$ab+bc+ca=3.$$

Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4+(a+b)^2}+\frac{1}{4+(b+c)^2}+\frac{1}{4+(c+a)^2}\le\frac{3}{8}.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=50079

ΛΥΣΗ

(Παύλος Μαραγκουδάκης)

Πολλαπλασιάζουμε με -4 και προσθέτουμε σε όλα τα κλάσματα από μία μονάδα.

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{(a+b)^2}{4+(a+b)^2}+\frac{(b+c)^2}{4+(b+c)^2}+\frac{(c+a)^2}{4+(c+a)^2}\ge\frac{3}{2}.$$

Όμως

$$\frac{(a+b)^2}{4+(a+b)^2}+\frac{(b+c)^2}{4+(b+c)^2}+\frac{(c+a)^2}{4+(c+a)^2}\ge$$

$$\frac{4(a+b+c)^2}{12+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}$$

Αρκεί

$$\frac{4(a+b+c)^2}{12+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}\ge\frac{3}{2}$$

ή ισοδύναμα λόγω της συνθήκης

$$ab+bc+ca=3,$$

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca,$$

που ισχύει

ΑΣΚΗΣΗ 34.

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y,z είναι τέτοιοι ώστε

$$xyz=3(x+y+z).$$

Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{x^2(y+1)}+\frac{1}{y^2(z+1)}+\frac{1}{z^2(x+1)}\geq\frac{3}{4(x+y+z)}.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=50079

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Είναι

$$\frac{1}{x^2(y+1)}+\frac{1}{y^2(z+1)}+\frac{1}{z^2(x+1)}=$$

$$\sum\frac{(\frac{1}{x})^2}{y+1}\geq\frac{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})^2}{x+y+z+3}\geq$$

$$\geq\frac{3(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx})}{x+y+z+3}\overset{xyz=3(x+y+z)}{=}\frac{1}{x+y+z+3}.$$

Αρκεί τώρα

$$\frac{1}{x+y+z+3}\geq\frac{3}{4(x+y+z)}$$

δηλαδή

$$x+y+z\geq 9.$$

Αυτή όμως ισχύει, αφού από ΑΜ-ΓΜ ισχύει

$$(\frac{x+y+z}{3})^3\geq xyz\Rightarrow$$

$$\frac{(x+y+z)^3}{27}\geq 3(x+y+z)\Rightarrow$$

$$x+y+z\geq 9.$$

ΑΣΚΗΣΗ 35.

Αν $a,b,c>0$ με $ab+bc+ca=3$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{4+(a+b)^2}+\frac{1}{4+(b+c)^2}+\frac{1}{4+(c+a)^2}\leq\frac{3}{8}.$$

Προτείνει ο Θάνος Μάγκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=50413

ΛΥΣΗ

(Χρήστος Στραγάλης)

Η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την:

$$\frac{(a+b)^2}{4+(a+b)^2}+\frac{(b+c)^2}{4+(b+c)^2}+\frac{(c+a)^2}{4+(c+a)^2}\geq\frac{3}{2}$$

Από $C-S$ λαμβάνουμε:

$$\frac{(a+b)^2}{4+(a+b)^2}+\frac{(b+c)^2}{4+(b+c)^2}+\frac{(c+a)^2}{4+(c+a)^2}\geq$$

$$\frac{4(a+b+c)^2}{12+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}=$$

$$\frac{4(a^2+b^2+c^2)+24}{18+2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{2x+12}{9+x},\ x=a^2+b^2+c^2$$

Αρκείναδείξουμεότι:

$$\frac{2x+12}{9+x}\geq\frac{3}{2}\Leftarrow x\geq 3=ab+bc+ac$$

που είναι προφανές.

ΑΣΚΗΣΗ 36.

Σε κάθε τρίγωνο αποδείξτε ότι

$$cot\frac{A}{2}+cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2}-2\left(cotA+cotB+cotC\right)\geq\sqrt{3}.$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=14652

ΛΥΣΗ

(Βαγγέλης Μουρούκος)

Θέτουμε

$$x=\cot\frac{A}{2},\ y=\cot\frac{B}{2}\ \text{και}\ \ z=\cot\frac{C}{2},$$

οπότε

$$\cot A=\frac{x^2-1}{2x},\ \cot B=\frac{y^2-1}{2y}\ \text{και}\ \cot C=\frac{z^2-1}{2z}.$$

Η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$x+y+z-2\left(\frac{x^2-1}{2x}+\frac{y^2-1}{2y}+\frac{z^2-1}{2z}\right)\geq\sqrt{3},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\sqrt{3},$$

δηλαδή

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}.\ (1)$$

Η ανισότητα (1) είναι γνωστή και προκύπτει άμεσα από εφαρμογή της ανισότητας Jensen στην κυρτή συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\tan x\ ,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Πράγματι, είναι

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)\geq$$
$$3f\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right)=3\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ 37.

Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$\left(sinA+sinB+sinC\right)^2\leq6\left(1+cosAcosBcosC\right)$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=50&t=14292

ΛΥΣΗ

(Φωτεινή Καλδή)

Από την:

$$(a+b+c)^2\leq3(a^2+b^2+c^2)$$

$$(\sin A+\sin B+\sin C)^2\leq3(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C),\ (1)$$

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=$$
$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2(A+B)=$$
$$=\sin^2A+\sin^2B+(\sin A\cos B+\sin B\cos A)^2=$$

$$=\sin^2A+\sin^2B+\sin^2A\cos^2B+\sin^2B\cos^2A+$$
$$2\sin A\sin B\cos A\cos B=$$

$$=(1-\cos^2A)+(1-\cos^2B)+(1-\cos^2A)\cos^2B+$$
$$(1-\cos^2B)\cos^2A+2\sin A\sin B\cos A\cos B=$$

$$= 2 - 2\cos A\cos B(\cos A\cos B - \sin A\sin B) =$$

$$= 2 - 2\cos A\cos B\cos(A+B) =$$

$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C =$$

$$= 2(1+\cos A\cos B\cos C)$$

$(1) \Rightarrow$

$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \le 6(1+\cos A\cos B\cos C)$

ΑΣΚΗΣΗ 38.

Έστω τρίγωνο ABC στο οποίο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά BC είναι ίση με την πλευρά AB.

Αποδείξτεότι

$$tanB = 3tanC$$

και

$$sinA = 2sin(B-C).$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=38566

ΛΥΣΗ

(Βαγγέλης .Μουρούκος)

Έχουμε ότι $m_a = c$ και άρα,

από το πρώτο Θεώρημα Διαμέσων,

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow b^2 + c^2 = 2c^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$b^2 = c^2 + \frac{a^2}{2} < c^2 + a^2,$$

οπότε $\angle B < 90^\circ$.

Επίσης, από τη σχέση

$$b^2 = c^2 + \frac{a^2}{2}$$

προκύπτει ότι $c < b$,άρα και $\angle C < \angle B < 90^\circ$.

Φέρουμε το ύψος AK και τη διάμεσο AM του τριγώνου ABC. Από την υπόθεση, έχουμε ότι $AB = AM$, οπότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με βάση BM. Άρα, το K θα είναι το μέσο του τμήματος BM, οπότε

$$\tan B = \frac{AK}{BK} = \frac{AK}{\frac{1}{3}KC} = 3\frac{AK}{KC} = 3\tan C.$$

Η δεύτερη σχέση είναι ισοδύναμη με την πρώτη, αφού

$$\sin A = 2\sin(B-C) \Leftrightarrow$$
$$\sin(B+C) = 2\sin(B-C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin B\cos C + \sin C\cos B =$$
$$2\sin B\cos C - 2\sin C\cos B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin B\cos C = 3\sin C\cos B$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B} = 3\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \tan B = 3\tan C$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

ΑΣΚΗΣΗ 39.

Έστω το τρίγωνο ABC και ας είναι R_m η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου που ορίζεται από τις διαμέσους του τριγώνου ABC.

Αποδείξτε ότι

$$R_m \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)}$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=185&t=56366

ΛΥΣΗ

(Βαγγέλης Μουρούκος)

Ισχυρισμός 1:

Σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει η ανισότητα:

$$4Rm_a \geq b^2+c^2.$$

Απόδειξη:

Έστω h_a το ύψος και s_a η συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ABC που άγεται από την κορυφή A.

Από γνωστό τύπο για το μήκος της συμμετροδιαμέσου (που προκύπτει π.χ. με το Θεώρημα του Stewart), είναι:

$$s_a = \frac{bc\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{b^2+c^2} = \frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot m_a.$$

Επειδή $s_a \geq h_a$, είναι

$$\frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot m_a \geq h_a = \frac{2(ABC)}{a} = \frac{2\frac{abc}{4R}}{a} = \frac{bc}{2R}$$

και άρα

$$4Rm_a \geq b^2+c^2.$$

Ισχυρισμός 2:

Σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει η ανισότητα:

$$2R(m_a+m_b+m_c) \geq a^2+b^2+c^2.$$

Απόδειξη:

Από τον Ισχυρισμό 1, με κυκλική εναλλαγή των μεταβλητών, προκύπτουν οι ανισότητες:

$$4Rm_a \geq b^2+c^2,$$

$$4Rm_b \geq c^2+a^2 \text{ και}$$

$$4Rm_c \geq a^2+b^2.$$

Ο Ισχυρισμός 2 έπεται με πρόσθεση των παραπάνω ανισοτήτων κατά μέλη.

Θεωρούμε τώρα το τρίγωνο XYZ με πλευρές τις διαμέσους m_a, m_b, m_c του τριγώνου ABC. Τότε, οι διάμεσοι του τριγώνου XYZ έχουν μήκη

$\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b, \frac{3}{4}c.$

Εφαρμόζοντας τον Ισχυρισμό 2 στο τρίγωνο XYZ, βρίσκουμε ότι

$$2R_m\left(\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}b+\frac{3}{4}c\right) \geq m_a^2+m_b^2+m_c^2 =$$

$$= \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow R_m \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)}$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

ΛΥΣΗ 2

(Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς)

Στο περίφημο βιβλίο " Recent Advances in Geometric Inequalities " στη σελίδα 212 γράφεται χωρίς απόδειξη η ανισότητα

$$m_a m_b m_c \geq r\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right).$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμημε την ανισότητα της παρούσας δημοσίευσης.

Ας θυμηθούμε ότι το τρίγωνο με πλευρές τις διαμέσους του ABC έχει εμβαδόν τα $\frac{3}{4}$ του εμβαδού του ABC και την πασίγνωστη ισότητα

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$R_m \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4s}$$

που ισοδυναμεί με

$$\frac{m_a m_b m_c}{3E} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4s}$$

που ισοδυναμεί με

$$\frac{m_a m_b m_c}{3sr} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4s}$$

που ισοδυναμεί με

$$m_a m_b m_c \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)r$$

που είναι η

$$m_a m_b m_c \geq r\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 40.

Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο με πλευρές a,b,c για τις οποίες $abc = 1$ ισχύει:

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{a} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{b} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{c} \geq a+b+c.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=32418

ΛΥΣΗ

(Θάνος Μάγκος)

Εκτελώντας το μετασχηματισμό

$$b+c-a = x > 0, c+a-b = y > 0,$$

$$a+b-c = z > 0,$$

η προς απόδειξη ανισότητα μετασχηματίζεται στην

$$\sum_{cyclic} \sqrt{\frac{x(x+y)(x+z)}{y+z}} \geq \sqrt{2}(x+y+z)$$

ή αλλιώς στην

$$\sum_{cyclic} \frac{x}{x+y+z} f\left(\frac{x(y+z)}{(x+y)(x+z)}\right) \geq \sqrt{2},$$

όπου

$$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(t) = t^{-\frac{1}{2}}.$$

Η προαναφερθείσα συνάρτηση είναι κυρτή, οπότε από τη σταθμισμένη Jensen έχουμε

$$\sum_{cyclic}\frac{x}{x+y+z}f\left(\frac{x(y+z)}{(x+y)(x+z)}\right)\geq$$

$$f\left(\sum_{cyclic}\frac{x^2(y+z)}{(x+y+z)(x+y)(x+z)}\right)=$$

$$\sqrt{\frac{(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)}{x^2(y+z)^2+y^2(z+x)^2+z^2(x+y)^2}}$$

Αρκεί τώρα να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{\frac{(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)}{x^2(y+z)^2+y^2(z+x)^2+z^2(x+y)^2}}\geq\sqrt{2},$$

η οποία, μετά τις πράξεις, γράφεται

$$xy(x-y)^2+yz(y-z)^2+zx(z-x)^2\geq 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 41.

Αν a,b,c πλευρές τριγώνου και

$$A=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b},$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}$$

να δείξετε ότι

$$AB\geq 9.$$

Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=31372

ΛΥΣΗ

(Νίκος Ζανταρίδης)

Είναι

$$\frac{a^2+bc}{b+c}=\left(\frac{a^2+bc}{b+c}+a\right)-a=$$

$$\frac{a^2+bc+ab+ac}{b+c}-a=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}-a$$

$$\frac{b^2+ca}{c+a}=\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}-b,$$

$$\frac{c^2+ab}{a+b}=\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}-c$$

Οπότε έχουμε

$$A=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}=$$

$$\Sigma\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}-\Sigma a\geq$$

$$\Sigma\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}\cdot\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}}-\Sigma a=$$

$$\Sigma(a+b)-\Sigma a=a+b+c$$

Άρα είναι

$$A\geq a+b+c,\quad (1).$$

Ακόμη ισχύει

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq\frac{2}{x+y},\forall x,y\in(0,+\infty),$$

οπότε έχουμε

$$B=\Sigma\frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}}\geq$$

$$\Sigma\frac{2}{(a+b-c)+(b+c-a)}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},(2)$$

(είναι $a+b-c,b+c-a,c+a-b>0$,

λόγω της τριγωνικής ανισότητας).

Από (1) και (2) προκύπτει ότι

$$AB\geq(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Είναι όμως

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9,\forall a,b,c\in(0,+\infty),$$

οπότε είναι

$$AB\geq 9$$

ΑΣΚΗΣΗ 42.

Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$2R(m_a+m_b+m_c)\geq a^2+b^2+c^2$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=34696

ΛΥΣΗ

(Χρήστος Κυριαζής)

Για την επίλυση της άσκησης χρησιμοποιώ ως λήμμα την άσκηση $3ii)$ των αποδεικτικών ασκήσεων σελ 204 του σχολικού βιβλίου η οποία λέει πως αν AB,AC οι πλευρές που περιέχουν τη διάμεσο $m_a=AM$ τότε ισχύει:

$$AB^2+AC^2=2AM\cdot AE$$

όπου E το σημείο που η διάμεσος AM προεκτεινόμενη τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

Επειδή

$$AE\leq 2R$$

προκύπτει:

$$AB^2+AC^2\leq 4R\cdot AM \quad (1).$$

Εργαζόμενος κυκλικά λοιπόν έχω:

$$AC^2+BC^2\leq 4R\cdot CN \quad (2),$$

$$BC^2+AB^2\leq 4R\cdot BL \quad (3)$$

όπου CN,BL οι άλλες δύο διάμεσοι.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $(1),(2),(3)$ έχουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 43.

Το κυρτό τετράπλευρο ABCD είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1 και ισχύει

$$AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA\geq 4.$$

Αποδείξτε ότι είναι τετράγωνο.

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=44524

ΛΥΣΗ

(Χρήστος Κυριαζής)

Έχω, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου (για ζεύγη δύο αριθμών) και το πρώτο θεώρημα του Πτολεμαίου πως:

$$4 \le AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \le \frac{(AB \cdot CD + BC \cdot DA)^2}{4} =$$

$$\frac{(AC+BD)^2}{4} \le \frac{16R^2}{4} = 4$$

αφού

$$AC \le 2R, BD \le 2R.$$

Επομένως έχουμε ισότητα, η οποία ισχύει στην περίπτωση που:

$$AC = BD = 2R$$

δηλαδή το $ABCD$ είναι ορθογώνιο και επιπλέον

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD \Rightarrow \underset{BC=AD}{\overset{AB=CD}{\Longrightarrow}}$$

$$AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = BC$$

δηλαδή το ABCD είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ 44.

Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABCισχύει

$$ab(s-c)^2 + bc(s-a)^2 + ca(s-b)^2 \ge \frac{sabc}{2}$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=18306

ΛΥΣΗ

(Βαγγέλης Μουρούκος)

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$\frac{(s-a)^2}{a} + \frac{(s-b)^2}{b} + \frac{(s-c)^2}{c} \ge$$

$$\ge \frac{(s-a+s-b+s-c)^2}{a+b+c} =$$

$$= \frac{(3s-2s)^2}{2s} = \frac{s^2}{2s} = \frac{s}{2},$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την αποδεικτέα ανισότητα.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\frac{s-a}{a} = \frac{s-b}{b} = \frac{s-c}{c},$$

δηλαδή αν και μόνο αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ 45.

Αν ABC τρίγωνο, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\frac{sinAsinB}{sin^2\frac{C}{2}} + \frac{sinBsinC}{sin^2\frac{A}{2}} + \frac{sinCsinA}{sin^2\frac{B}{2}}$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=38202

ΛΥΣΗ

(Παύλος Μαραγκουδάκης)

Ισχυρισμός

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin B\sin C}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin C\sin A}{\sin^2\frac{B}{2}}=$$
$$\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2}+\frac{(a+b)^2}{c^2}-3$$

Απόδειξη

Αρκεί

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{(a+b)^2}{c^2}-1$$

Είναι

$$\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos C}{2}=\frac{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}=$$
$$=\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{4ab}$$

Από το νόμο των ημιτόνων

$$\sin A=\frac{a}{2R} \text{ και } \sin B=\frac{b}{2R}.$$

Από τον τύπο του Ήρωνα και τον τύπο

$$E=\frac{abc}{4R}$$

βρίσκουμε

$$R^2=\left(\frac{abc}{4E}\right)^2=$$

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}$$

οπότε

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{\frac{ab}{4R^2}}{\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{4ab}}=$$
$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{c^2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{c^2}$$

Με τον ισχυρισμό, την

$$(x+y)^2\geq 4xy$$

και κατόπιν την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου βρίσκουμε

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin B\sin C}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin C\sin A}{\sin^2\frac{B}{2}}\geq$$
$$\frac{4bc}{a^2}+\frac{4ca}{b^2}+\frac{4ab}{c^2}-3\geq 12\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}\frac{ca}{b^2}\frac{ab}{c^2}}-3=9$$

Το ζητούμενο ελάχιστο είναι το 9 και πιάνεται μόνο από το ισόπλευρο τρίγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ 46.

Αν a,b,c>0, αποδείξτε ότι

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9(ab+bc+ca)$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=43914

ΛΥΣΗ 1

(Βαγγέλης .Μουρούκος)

Η παραπάνω ανισότητα προτάθηκε στην APMO (Asian Pacific Math Olympiad) το 2004 και μπορεί να αποδειχθεί με πολλούς τρόπους.

Ένας από αυτούς είναι ο εξής:

Η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+$$

$$+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\geq 9\left(ab+bc+ca\right)\ (\bigstar).$$

Από την ανισότητα

$$\left(ab-1\right)^2+\left(bc-1\right)^2+\left(ca-1\right)^2\geq 0$$

προκύπτει ότι

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+6\geq 4\left(ab+bc+ca\right)\ (\mathbf{1}).$$

Επίσης, έχουμε τη (γνωστή και απλή) ανισότητα

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 3\left(ab+bc+ca\right)\ (\mathbf{2}).$$

Αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι

$$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2\geq 2\left(ab+bc+ca\right)\ (\mathbf{3}),$$

τότε η $(\bigstar)$ θα προκύψει με πρόσθεση των $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{2})$ και $(\mathbf{3})$ κατά μέλη.

Για την απόδειξη της $(\mathbf{3})$ θέτουμε

$$x=a^{\frac{2}{3}},\ y=b^{\frac{2}{3}}\ \text{και}\ z=c^{\frac{2}{3}}.$$

Από την ανισότητα Schur και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε ότι

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq$$
$$\left(x^2y+y^2x\right)+\left(z^2y+y^2z\right)+\left(x^2z+z^2x\right)\geq$$
$$\geq 2\left[\left(xy\right)^{\frac{3}{2}}+\left(yz\right)^{\frac{3}{2}}+\left(zx\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

δηλαδή

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}\geq 2\left(ab+bc+ca\right).$$

Επομένως, η $(\mathbf{3})$ θα προκύψει από την $(\mathbf{4})$ αν αποδείξουμε ότι

$$\left(abc\right)^2+2\geq 3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}\ (\mathbf{5}).$$

Αλλά, η $(\mathbf{5})$ έπεται άμεσα από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, οπότε η απόδειξη ολοκληρώνεται.

ΛΥΣΗ 2

(Βαγγλελης Μουρούκος)

Η παραπάνω ανισότητα έχει και την ακόλουθη λύση, που στηρίζεται αποκλειστικά στην ανισότητα Cauchy-Schwarz:

Είναι

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)=\left(a^2+1\right)\left(1+b^2\right)+a^2+b^2+3\geq$$
$$\left(a+b\right)^2+\frac{1}{2}\left(a+b\right)^2+3=\frac{3}{2}\left(\left(a+b\right)^2+2\right)$$

και άρα

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq$$

$$\geq\frac{3}{2}\left(\left(a+b\right)^2+2\right)\left(2+c^2\right)\geq$$

$$\geq \frac{3}{2}\left(\sqrt{2}(a+b)+\sqrt{2}c\right)^2 = 3(a+b+c)^2 \geq$$

$$\geq 9(ab+bc+ca)$$

και το συμπέρασμα έπεται.

ΛΥΣΗ 3

(Γιώργος Βασδέκης)

Ισχύει

$$9(ab+bc+ca) \leq 3(a+b+c)^2 \leq$$
$$3[(a^2+2)]\left[1+\frac{(b+c)^2}{2}\right].$$

Οπότε μένει να αποδείξουμε ότι

$$3\left[1+\frac{(b+c)^2}{2}\right] \leq (b^2+2)(c^2+2)$$

η οποία μετά από πράξεις καταλήγει στην

$$b^2+c^2+2(b^2c^2+1) \geq 6bc$$

η οποία με τη σειρά της είναι προφανής λόγω της Ανισότητας AM-GM.

ΑΣΚΗΣΗ 47.

Αν $a,b,c \succ 0$ με $abc=1$, αποδείξτε ότι

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geq ab+bc+ca$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=43024

ΛΥΣΗ

(Βαγγέλης Μουρούκος)

Θέτουμε

$$a=\frac{x}{y},\ b=\frac{y}{z} \text{ και } c=\frac{z}{x},$$

όπου

$$x, y, z > 0.$$

Η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x}{y}\left(\frac{y}{z}\right)^2+\frac{y}{z}\left(\frac{z}{x}\right)^2+\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^2 \geq \frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2} \geq \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\ (1).$$

Από την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου προκύπτει ότι

$$2\frac{xy}{z^2}+\frac{zx}{y^2}=\frac{xy}{z^2}+\frac{xy}{z^2}+\frac{zx}{y^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}\cdot\frac{xy}{z^2}\cdot\frac{zx}{y^2}}=3\frac{x}{z}.$$

Αθροίζοντας κυκλικά έχουμε ότι

$$\sum_{cyc}\left(2\frac{xy}{z^2}+\frac{zx}{y^2}\right) \geq \sum_{cyc} 3\frac{x}{z} \Rightarrow$$
$$3\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}\right) \geq 3\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right),$$

οπότε η (1) δείχθηκε.

Το ίσον ισχύει αν και μόνο αν $a=b=c=1$.

Σημείωση:

Η ίδια τεχνική εφαρμόστηκε

http://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=43022

και

http://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=43023

ΑΣΚΗΣΗ 48.

Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)\geq\frac{2r}{R}$$

Ενδιαφέρον έχει το πότε ισχύει η ισότητα.

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=36877

ΛΥΣΗ 1

(Χρήστος Στραγάλης)

Γνωρίζουμε πως

$$\frac{2E}{ac}+\frac{2E}{ab}=sinB+sinC=$$
$$=2sin\left(\frac{B+C}{2}\right)cos\left(\frac{B-C}{2}\right)=$$
$$=2sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

και δεδομένου ότι:

$$cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

λαμβάνουμε

$$\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)=\frac{E^2(b+c)^2}{a^2bcs(s-a)}$$

Επομένως θέλουμε να δείξουμε πως:

$$\frac{E^2(b+c)^2}{a^2bcs(s-a)}\geq\frac{2r}{R}\Leftarrow\frac{abc}{4R}\cdot sr\cdot\frac{(b+c)^2}{a^2bcs(s-a)}\geq\frac{2r}{R}\Leftarrow$$

$$\frac{(b+c)^2}{a(s-a)}\geq 8$$

Η τελευταία καταλήγει στην:

$$4a^2+(b+c)^2\geq 4a(b+c)$$

η οποία ισχύει από AM-GM με την ισότητα όταν

$$b+c=2a$$

ΛΥΣΗ 2

(Θάνος Μάγκος)

Υπάρχουν αρκετές προσεγγίσεις αυτής της ανισότητας. Μια ακόμα, τριγωνομετρική, είναι και η ακόλουθη:

Είναι γνωστό ότι

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$$

Επομένως, η αποδεικτέα γράφεται

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\cos^2\frac{B-C}{2}$$

Είναι

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=$$

$$4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-4\sin^2\frac{A}{2}$$

το οποίο είναι

$$\le \cos^2\frac{B\text{-}C}{2},$$

ως συνέπεια της

$$\left(\cos\frac{B\text{-}C}{2}\text{-}2\sin\frac{A}{2}\right)^2 \ge 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 49.

Έστω τρίγωνο ABC. Αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{a}{m_a}\right)^2+\left(\frac{b}{m_b}\right)^2+\left(\frac{c}{m_c}\right)^2 \ge 4$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=31309

ΛΥΣΗ 1

(Θάνος Μάγκος)

Υπάρχουν αρκετές αποδείξεις. Ξεκινάω με μια, νομίζω, ενδιαφέρουσα και ας δούμε και άλλες.

Από την ανισότητα $3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$ είναι

$$\sum_{cyclic}\left(\frac{a}{m_a}\right)^2 \ge \frac{1}{3}\left(\sum_{cyclic}\frac{a}{m_a}\right)^2$$

οπότε είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{m_a}\ge 2\sqrt{3}$$

Είναι

$$2(a^2+b^2+c^2)=4m_a^2+3a^2\ge 4\sqrt{3}am_a \Rightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2\ge 2\sqrt{3}am_a$$

άρα

$$\frac{1}{m_a}\ge\frac{2\sqrt{3}a}{a^2+b^2+c^2}$$

δηλαδή

$$\frac{a}{m_a}\ge\frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Τώρα, η ζητούμενη είναι προφανής.

ΛΥΣΗ 2

(Βαγγέλης Μουρούκος)

Μια άλλη προσέγγιση:

Χρησιμοποιώντας τους τύπους των διαμέσων, η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}\ge 1\ (\mathbf{1}).$$

Επειδή η ανισότητα $(\mathbf{1})$ είναι ομογενής, μπορούμε, δίχως βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $a^2+b^2+c^2=1$.

Τότε, η $(\mathbf{1})$ γράφεται:

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{2-3a^2}\ge 1\ (\mathbf{2}).$$

Με τη "μέθοδο της εφαπτομένης" βρίσκουμε ότι για κάθε $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{x}{2-3x}\ge 2x-\frac{1}{3}\ (\mathbf{3}),$$

με το ίσον μόνο αν $x=\dfrac{1}{3}$.

[Πράγματι, για $x\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ είναι

$$\frac{x}{2-3x}\ge 2x-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2(3x-1)^2\ge 0\,.]$$

Επειδή $2-3a^2>0$ (όμοια και για τα b,c),

εφαρμόζοντας την (3) για

$$x=a^2, x=b^2, x=c^2$$

και αθροίζοντας κυκλικά, έχουμε ότι:

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{2-3a^2}\ge\sum_{cyc}\left(2a^2-\frac{1}{3}\right)=2\sum_{cyc}a^2-1=2\cdot1-1=1$$

και η (2) αποδείχθηκε. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΛΥΣΗ 3

(Θάνος Μάγκος)

Ας δούμε ακόμα μια προσέγγιση.

Είναι γνωστό ότι ισχύει (βλ.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=52630#p52630

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\ge\sqrt{3}\quad(\bigstar)$$

για κάθε σημείο P του επιπέδου του τριγώνου ABC.

Για $P\equiv G$, η ($\bigstar$) γίνεται

$$\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Σε αυτήν εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό της διαμέσου, οπότε λαμβάνουμε

$$\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\ge 2\sqrt{3}.$$

Από αυτήν και την

$$3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$$

προκύπτει η ζητούμενη.

ΛΥΣΗ 4

(Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς)

Μια άλλη λύση, αυτή που σκέφτηκα μόλις είδα την ανισότητα.

Θα αποδειχθεί ότι

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\ge\frac{9}{4}$$

$$\frac{m_a^2}{a^2}=\frac{4m_a^2}{4a^2}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4a^2}=\frac{1}{2}\frac{b^2+c^2}{a^2}-\frac{1}{4}$$

Συνεπώς

$$\sum\frac{m_a^2}{a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)-\frac{3}{4}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]-\frac{3}{4}\ge$$

$$\frac{1}{2}(2+2+2)-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν

$$a^2=b^2=c^2\Leftrightarrow a=b=c$$

Μια ακόμα απόδειξη είναι η ακόλουθη.

$$m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} \geq \frac{4bc-a^2}{4}$$

Συνεπώς

$$\frac{m_a^2}{a^2} \geq \frac{bc}{a^2} - \frac{1}{4}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $b=c$.

Όμοια

$$\frac{m_b^2}{b^2} \geq \frac{ac}{b^2} - \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \frac{m_c^2}{c^2} \geq \frac{ab}{c^2} - \frac{1}{4}$$

με τις ισότητες να ισχύουν αντίστοιχα αν και μόνον αν $a=c$ και $a=b$

Επομένως

$$\sum \frac{m_a^2}{a^2} \geq \sum \frac{bc}{a^2} - \frac{3}{4} \geq 3 - \frac{3}{4},$$

όπου η ανισότητα

$$\sum \frac{bc}{a^2} \geq 3$$

προκύπτει από την A.M-G.M.

Αν στην ανισότητα αυτή εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός της διαμέσου, προκύπτει η ζητουμένη ανισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 50.

Σε τρίγωνο ABC, αποδείξτε ότι

$$\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{3s}{2}$$

Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=24247

ΛΥΣΗ 1

(Δημήτρης Χριστοφίδης)

Θα θεωρήσω γνωστό ότι

$$m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα με θεώρημα Stewart.

Έτσι η ζητούμενη ανισότητα γίνεται

$$\frac{2b^2}{a} + \frac{2c^2}{a} + \frac{2c^2}{b} + \frac{2a^2}{b} + \frac{2a^2}{c} + \frac{2b^2}{c} - (a+b+c)$$

$$= 6s$$

Ή ισοδύναμα

$$a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b \geq 2abc(a+b+c)$$

Παίρνουμε τους τέσσερις όρους που περιέχουν το a και εφαρμόζουμε την ΑΜ-ΓΜ για να πάρουμε

$$a^3b + a^3c + ab^3 + ac^3 \geq 4a^2bc.$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο κυκλικά και προσθέτοντας παίρνουμε την ζητούμενη ανισότητα.

Διαφορετικά, εφαρμόζουμε απευθείας την Muirhead αφού η ζητούμενη ανισότητα είναι η

$$[3,1,0] \geq [2,1,1].$$

ΛΥΣΗ 2

(Θάνος Μάγκος)

Αλλιώς:

Οι τριάδες

$$m_a^2, m_b^2, m_c^2 \text{ και } \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$$

είναι ομοίως διατεταγμένες, οπότε από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε

$$\frac{m_a^2}{a}+\frac{m_b^2}{b}+\frac{m_c^2}{c} \geq \frac{\sum m_a^2}{3}\sum\frac{1}{a}=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\sum\frac{1}{a} \geq$$

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\frac{9}{a+b+c} \geq \frac{3(a+b+c)}{4}=\frac{3s}{2},$$

όπου έγινε χρήση και της ανισότητας Cauchy-Schwarz, της σχέσης

$$\sum m_a^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

και της ανισότητας

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

ΛΥΣΗ 3

(Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς)

Ισχύει ότι

$$m_a^2 = s(s-a)+\frac{(b-c)^2}{4}.$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί πανεύκολα σε όποιο τμήμα της Β' Λυκείου έχει διδαχθεί το πρώτο θεώρημα της διαμέσου.

Άρα

$$m_a^2 \geq s(s-a) \Rightarrow \frac{m_a^2}{a} \geq \frac{s(s-a)}{a} \Rightarrow \frac{m_a^2}{a} \geq s\left(\frac{s}{a}-1\right),$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $b=c$.

Με παρόμοιες σκέψεις προκύπτει ότι

$$\frac{m_b^2}{b} \geq s\left(\frac{s}{b}-1\right)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $a=c$,

$$\frac{m_c^2}{c} \geq s\left(\frac{s}{c}-1\right)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $a=b$.

Αν προστεθούν κατά μέλη οι τρεις παραπάνω ανισότητες προκύπτει:

$$\frac{m_a^2}{a}+\frac{m_b^2}{b}+\frac{m_c^2}{c} \geq s\left(\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\frac{s}{c}-3\right)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν

$$a=b=c$$

Όμως

$$\left(\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\frac{s}{c}\right)\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right) \geq 9 \Rightarrow \left(\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\frac{s}{c}\right)\frac{2s}{s} \geq 9 \Rightarrow$$

$$\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\frac{s}{c} \geq \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\frac{s}{c}-3 \geq \frac{3}{2} \Rightarrow s\left(\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\frac{s}{c}-3\right) \geq \frac{3s}{2}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν

$$\frac{s}{a}=\frac{s}{b}=\frac{s}{c} \Leftrightarrow a=b=c$$

Εύκολα προκύπτει πλέον η ανισότητα που θέλουμε, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

$$\frac{x^3}{z^3+x^2y}+\frac{y^3}{x^3+y^2z}+\frac{z^3}{y^3+z^2x}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{a^3+2}{b^2-b+1}+\frac{b^3+2}{c^2-c+1}+\frac{c^3+2}{a^2-a+1}\geq 9$$

mathematica.gr