# Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

Φυλλο 1, 28 Οκτωβριου 2009

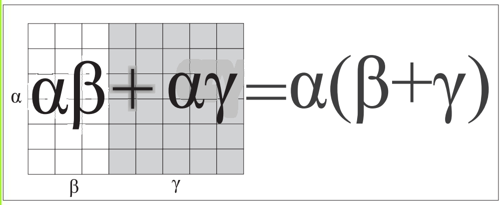
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX $2_\varepsilon$
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com


## Η συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy


Ν.Σ. Μαυρογιάννης


### 1 $\alpha\left(\beta+\gamma\right)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

Από τα πρώτα πράγματα που μαθαίνουμε στα παιδιά. Ακρογωνιαίος λίθος της Άλγεβρας. Υπάρχουν και εύκολα πειστικά επιχειρήματα για αυτό, τουλάχιστον στην περίπτωση που έχουμε φυσικούς αριθμούς:




Η επιμεριστική ιδιότητα ριζώνει γερά στο μυαλό των παιδιών. Τόσο που όταν έχουν να αντιμετωπίσουν συναρτήσεις, αρκετά από αυτά, είναι πρόθυμα να γράψουν

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \qquad (1)$$

Για τον απλούστατο λόγο ότι βλέπουν την συνάρτηση σαν «συντελεστή». Για μερικούς μαθητές παίρνει αρκετό καιρό μέχρις ότου να αντιληφθούν ότι αυτοματισμοί του τύπου:

$$\eta\mu\left(x+y\right)=\eta\mu\left(x\right)+\eta\mu\left(y\right)$$

ή

$$\log_{\theta}\left(x+y\right)=\log_{x}\alpha+\log_{y}\beta$$

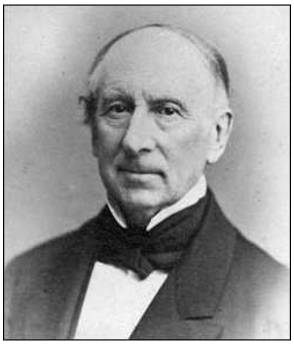
δεν είναι επιτρεπτοί. Φυσικά υπάρχουν συναρτήσεις $f$ που η (1) ισχύει για όλα τα $x,y$. Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f\left(x\right)=\lambda x$ αφού για μια τέτοια συνάρτηση φυσικά ισχύει $f\left(x+y\right)=\lambda\left(x+y\right)=\lambda x+\lambda y=f\left(x\right)+f\left(y\right)$. Το ερώτημα είναι εύλογο: Υπάρχουν άλλες;

> 1.er Problème. *Déterminer la fonction $\varphi(x)$, de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable $x$, et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables $x$ et $y$*
>
> (1) $\quad \varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y).$

Η διατύπωση του προβλήματος από τον Cauchy στο έργο του «*Μαθήματα Ανάλυσης της Πολυτεχνικής Σχολής. Μέρος Ι. Αλγεβρική Ανάλυση*» που εξεδόθη το 1821.

### 2 Η εξίσωση $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$

Το πρόβλημα της εύρεσης μίας συνάρτησης που να ικανοποιεί την σχέση (1) (δηλαδή μίας συνάρτησης για την οποία η (1) αληθεύει για για κάθε $x$, $y$) απασχόλησε για πολλούς λόγους (Θεωρία Εμβαδού, Μηχανική , Θεωρία Πιθανοτήτων) τους μαθηματικούς ήδη από τον 18ο αιώνα. Μεταξύ άλλων και τους K.F. Gauss, A.M. Legendre. Στο πρόβλημα μας ο άγνωστος δεν είναι κάποιος αριθμός αλλά μία συνάρτηση. Για αυτό εξισώσεις σαν την (1) όπου ζητείται μία συνάρτηση που να ικανοποιεί κάποια δοθείσα σχέση λέγονται **συναρτησιακές εξισώσεις**.



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Ο A.L Cauchy έλυσε την εξίσωση στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής. Για τον λόγο αυτό η συγκεκριμένη συναρτησιακή εξίσωση φέρει το όνομα του.

### 3 Μερικά βήματα για την επίλυση της εξίσωσης $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$

Ας δούμε, περίπου, τα πρώτα βήματα της προσέγγισης του Cauchy. Πρώτα απ' όλα έχουμε $f\left(0+0\right)=f\left(0\right)$ και επομένως $f\left(0\right)+f\left(0\right)=f\left(0\right)$ δηλαδή

$$f\left(0\right)=0 \qquad (2)$$

Αφού $f\left(0\right)=0$ είναι $f(x+(-x))=0$ οπότε και $f(x)+f(-x)=0$ δηλαδή:

$$f(-x)=-f(x) \text{ για κάθε } x \qquad (3)$$

Έχουμε τώρα:

$$f\left(x+x\right)=f\left(x\right)+f\left(x\right)=2f\left(x\right)$$

$f\left(x+x+x\right)=f\left(x+\left(x+x\right)\right))=f\left(x\right)+f\left(x+x\right)=f\left(x\right)+2f\left(x\right)=3f\left(x\right)$ και γενικά για $\nu=1,2,3\ldots$ είναι πάντα $f(\nu x)=\nu f(x)$. Αλλα και για $\nu=0$ ισχύει $f(\nu x)=\nu f(x)$ αφού $f(0x)=f(0)=0=0f(x)$. Αν τώρα πάρουμε τον $\nu$ να είναι όχι φυσικός αριθμός αλλά κάποιος αρνητικός ακέραιος τότε ο $-\nu$ είναι φυσικός. Άρα $f(-\nu x)=-\nu f(x)$. Όμως είναι $f(-\nu x)=f(-(\nu x))=_{(3)}-f(\nu x)$. Αυτό σημαίνει ότι $-f(\nu x)=-\nu f(x)$ δηλαδή πάλι $f(\nu x)=\nu f(x)$. Επομένως έχουμε ότι

$$f(\nu x)=\nu f(x) \text{ για κάθε ακέραιο } \nu \text{ και για κάθε } x \qquad (4)$$

Αν τώρα στη σχέση (7) θέσουμε στην θάση του $x$ το $\frac{x}{\nu}$ θα έχουμε ότι ισχύει $f\left(\nu\frac{x}{\nu}\right)=\nu f\left(\frac{x}{\nu}\right)$ που μας οδηγεί στην $f\left(x\right)=\nu f\left(\frac{x}{\nu}\right)$ και επομένως

$$f\left(\frac{x}{\nu}\right)=\frac{1}{\nu}f(x) \text{ για κάθε ακέραιο } \nu\neq0 \text{ και για κάθε } x \qquad (5)$$

Τέλος αν στην θέση του $x$ στην (5) θέσουμε όπου $x$ το $\mu x$ με το $\mu$ να είναι ένας οποιοσδήποτε ακέραιος έχουμε ότι $f\left(\frac{\mu x}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu} f(\mu x)$. Όμως $f(\mu x) = \mu f(x)$ και επομένως $f\left(\frac{\mu}{\nu} x\right) = \frac{\mu}{\nu} f(x)$. Αλλά κάθε ρητός $q$ μπορεί να γραφεί ως πηλίκο δύο ακεραίων δηλαδή να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ με τους $\mu$, $\nu$ να είναι ακέραιοι. Άρα έχουμε ότι

$$f(qx) = qf(x) \text{ για κάθε ρητό } q \text{ και για κάθε } x \tag{6}$$

Έτσι από την σχέση (6) έχουμε για παράδειγμα ότι $f\left(2\sqrt{2}\right) = 2f\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{2}{3} f(\pi)$, $f\left(2,34 \times \frac{4}{5}\right) = 2,34 \times f\left(\frac{4}{5}\right)$

## 4 Η εύκολη περίπτωση: Δουλεύουμε μόνο με ρητούς αριθμούς

Αν μας ενδιέφερε η συνάρτηση μας να «τροφοδοτείται» μόνο από ρητούς αριθμούς δηλαδή να έχει, όπως λέμε, πεδίο ορισμού τους ρητούς αριθμούς τότε η σχεση (6) μας δίνει ήδη την απάντηση για το ποια μπορεί να είναι $f$. Θέλουμε το $f(x)$ και ο $x$ είναι κάποιος ρητός. Μπορούμε στην (6) να κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις:

$$\begin{array}{lcc} \text{πριν:} & q & x \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{μετά:} & x & 1 \end{array}$$

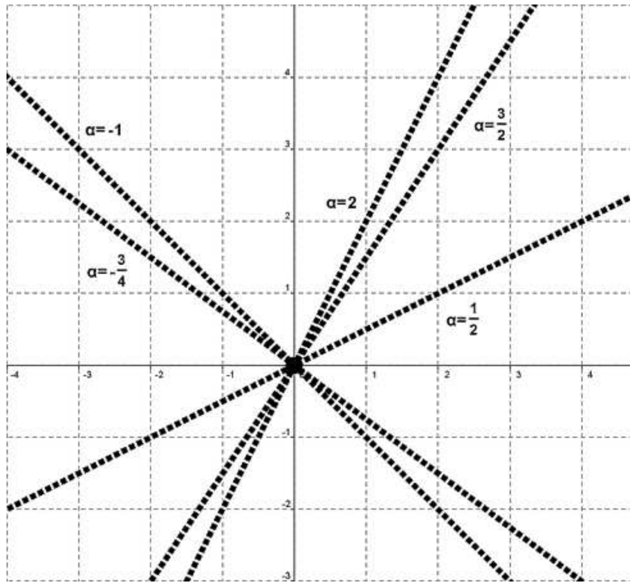
Έτσι θα έχουμε την ισότητα $f(x \cdot 1) = xf(1)$ που γράφεται και $f(x) = f(1)\,x$. Δηλαδή για να μάθουμε την $f$ όλο κι όλο που χρειαζόμαστε είναι να ξέρουμε του $\lambda = f(1)$. Και ο τύπος της $f$ θα είναι απλούστατος:

$$f(x) = \lambda f(x) \text{ για κάθε ρητό } x \tag{7}$$

Δηλαδή έχει αποδειχθεί η πρόταση:

**Πρόταση 4.1** *Οι μόνες συναρτήσεις $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ για τις οποίες ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ ειναι οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \lambda x$ όπου $\lambda \in \mathbb{Q}$ σταθερός.*

Κάθε επιλογή του $\lambda$ οδηγεί και σε μία λύση της συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy πάντα βέβαια με την υπόθεση ότι δουλεύουμε στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών δηλαδή είναι $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Αν χρησιμοποιήσουμε το συνηθισμένο σύστημα αξόνων για να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών από τις συναρτήσεις της (7) θα έχουμε το σχήμα:




Σχεδιάσαμε τις ευθείες γραμμές διακεκομένες για τον απλό λόγο ότι *λείπουν σημεία*. Αφού δουλεύουμε με ρητούς αριθμούς θα λείπουν όσα σημεία ανήκουν στις ευθείες και δεν έχουν συντεταγμένες ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{3}{2}x$ περιέχεται ολόκληρη στην ευθεία με εξίσωση $y = \frac{3}{2}x$ αλλά το σημείο $A\left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ που ανήκει στην ευθεία δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης. Χρησιμοποιήσαμε διακεκομμένες γραμμές σαν μία προειδοποίηση ότι λείπουν σημεία. Τα σημεία που λείπουν δεν λείπουν με τον τρόπο που διακόπτονται οι γραμμές. Δεν υπάρχει κανένας τρόπος να σχεδιάσουμε μόνο τα σημεία που υπάρχουν στην γραφική παράσταση. Ο λόγος είναι απλός: Οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί είναι πολύ «μπλεγμένοι» μεταξύ τους. Αν και οι δεύτεροι είναι περισσότεροι από τους πρώτους[1] εντούτοις οι ρητοί ανακατεύονται αδιάλλειπτα με τους άρρητους. Όπως λέμε το σύνολο των ρητών είναι *πυκνό μέσα στο σύνολο των πραγματικών*. Αυτό σημαίναι ότι ισχύει:

**Πρόταση 4.2** *Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε πραγματικών αριθμών $\alpha < \beta$ υπάρχει πάντοτε ένας ρητός αριθμός.*

Δεν θα δώσουμε απόδειξη αυτής της πρότασης. Χρειαζόμαστε κάποιες βασικές γνώσεις για το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ που δεν είναι πρόσφορες. Μπορούμε όμως να δώσουμε ένα λογικό επιχείρημα υπέρ της ισχύος της πρότασης. Μοιάζει με απόδειξη αλλά δεν είναι διότι κατα κάποιο τρόπο υπεκφεύγει ρίχνοντας το βάρος στα δεκαδικά αναπτύγματα. Άς δούμε μόνο την περίπτωση όπου οι αριθμοί $\alpha, \beta$ είναι θετικοί. Μετά οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται εύκολα. Οι αριθμοί $\alpha, \beta$ στην δεκαδική τους παράσταση θα έχουν την μορφή

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ...$$

$$\beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 ..$$

όπου

[1]Με αυτό το θέμα θα ασχοληθούμε σε επόμενο φύλλο του «Έκθέτη»

[2]Υπενθυμίζουμε ότι ένα συγκεκριμένο είδος επανάληψης είναι εκείνο που ξεχωρίζει τους ρητούς από τους άρρητους: Αν στην γραφή κάποιου αριθμού υπάρχει μία σειρά ψηφίων που από ένα σημείο και μετά επαναλαμβάνεται (περίοδος) τότε ο αριθμός αυτός θα είναι ρητός. Αν δεν υπάρχει είναι άρρητος. Ο αριθμός $23,4556023\underbrace{789}\underbrace{789}\underbrace{789}\underbrace{789}...$ είναι ρητός. Ο $56,123\underbrace{0}\underbrace{0}\underbrace{0}\underbrace{0}\underbrace{0}...$ επίσης. Ο αριθμός $12,10100100010000100001...$ είναι άρρητος.

[3]Πάντως αν θέλαμε να αντιστοιχίσουμε και σε αυτή την γραφή κάποιο αριθμό αυτός θα ήταν ο $5,235000...$

- οι $\alpha_0, \beta_0$ είναι φυσικοί αριθμοί και δηλώνουν τις ακέραιες μονάδες που έχουν οι $\alpha, \beta$ (λέγονται και *ακέραια μέρη* τους αλλά αυτό δεν θα μας χρειασθεί)

- οι $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... και $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$.. είναι αριθμοί από το 0 έως το 9 και υποδηλώνουν τα δεκαδικά ψηφία. Μπορεί τα δεκαδικά ψηφία να τελειώνουν. Τότε θα θεωρούμε ότι τα υπόλοιπα δεκαδικά ψηφία είναι 0. Δεχόμαστε ότι τα δεκάδικά ψηφία θα είναι πάντα άπειρα επαναλαμβανόμενα ή μη[2] αλλά αποκλείουμε μία συγκεκριμένη εμφάνιση: Δεν δεχόμαστε από κάποιο σημείο και μετά να υπάρχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία που να είναι όλα 9. Έτσι $\frac{5}{4} = 1,2500000...$, $2 = 2,0000...$, $\frac{2}{3} = 0,6666....$ Απεναντίας δεν δεχόμαστε την γραφή $5,23499999....$ [3].

Τώρα αφού είναι

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3... < \beta = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3..$$

κάπου οι δύο αριθμοι θα διαφοροποιούνται με τρόπο ώστε να είναι ο $\beta$ μεγαλύτερος του $\alpha$. Αυτό μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Ας μπούμε στον κόπο να γράψουμε μερικούς:

- Να είναι $\alpha_0 < \beta_0$ και τα υπόλοιπα ψηφία που ακολουθούν να είναι οποιαδήποτε.

- Να είναι $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 < \beta_1$ και τα υπόλοιπα ψηφία που ακολουθούν να είναι οποιαδήποτε.

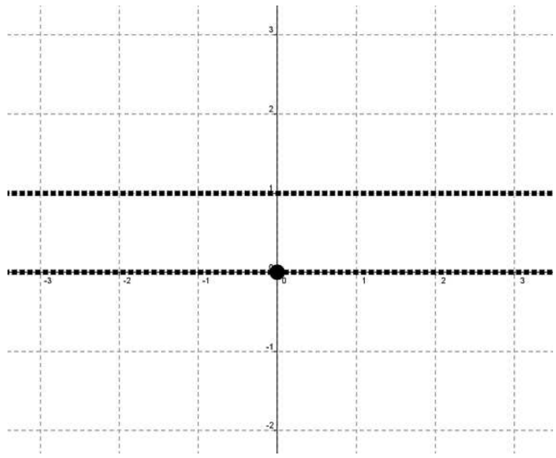
- Να είναι $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$ , $\alpha_2 < \beta_2$ και τα υπόλοιπα ψηφία που ακολουθούν να είναι οποιαδήποτε.

- Να είναι $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$ , $\alpha_2 = \beta_2$ , $\alpha_3 < \beta_3$ και τα υπόλοιπα ψηφία που ακολουθούν να είναι οποιαδήποτε.

Ας δούμε τώρα στην πρώτη περίπτωση γιατί υπάρχει ρητός μεταξύ των $\alpha, \beta$. Είναι $\alpha_0 < \beta_0$. Πάμε στα δεκαδικά ψηφία του $\alpha$. Έχουμε συμφωνήσει ότι δεν θα είναι από κάποιο σημείο και μετά όλα τα ψηφία 9. Άρα ο $\alpha$ θα έχει κάποιο δεκαδικό ψηφίο που δεν είναι 9. Παίρνουμε το «πρώτο όχι εννιά» δεκαδικό ψηφίο του $\alpha$ και το αλλάζουμε κάνοντας το 9. Τα υπόλοιπα ψηφία τα αλλάζουμε σε 0. Σχηματίζεται ένας νέος αριθμός ας τον πούμε $q$. Είναι τερματιζόμενος άρα ρητός, είναι μεγαλύτερος του $\alpha$ και είναι μικρότερος του $\beta$.
Ας περάσουμε στην δεύτερη περίπτωση. Τώρα οι $\alpha, \beta$ έχουν τις ίδιες ακέραιες μονάδες και διαφέρουν στα δέκατα. Εργαζόμαστε όπως πριν. Κάποιο από τα ψηφία $\alpha_2\alpha_3...$ δεν είναι 9. Παίρνουμε το πρώτο που συναντάμε. Το αλλάζουμε σε 9 και τα ψηφία του $\alpha$ που ακολουθούν τα γυρίζουμε σε 0. Πάλι έχουμε ένα ρητό $q$ μεγαλύτερο του $\alpha$ αλλά μικρότερο του $\beta$.
Είναι φανερό ότι αυτή η δουλειά μπορεί να γίνει σε όλες τις περιπτώσεις. Πάντα λοιπόν θα υπάρχει ρητός $q$ μεταξύ των $\alpha$ και $\beta$.
Το γεγονός ότι μεταξύ δύο πραγματικών βρίσκεται πάντα ένας ρητός μερικές φορές μας βάζει σε μπελάδες (πάντως πρόκειται για μπελάδες που είναι αγαπητοί στους μαθηματικούς). Πως θα ηταν η γραφική παράσταση της παρακάτω συνάρτησης (που λέγεται και συνάρτηση του Dirichlet);

$$f\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & , & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , & x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

Ένα μέρος της γραφικής παράστασης θα βρίσκεται στην ευθεία $y = 1$ και ένα μέρος στον άξονα $x'x$. Είναι ως εάν όσα σημεία του $x'x$ έχουν τετμημένη ρητό αριθμό να ανυψώνονται κατα 1 μονάδα και τα άλλα σημεία να παραμένουν στην θέση τους:



Αν στη συνάρτηση του Dirichlet δουλεύαμε μόνο με ρητούς θα είχαμε σαν γραφική παράσταση ένα μέρος της ευθείας $y = 1$. Συγκεκριμένα θα είχαμε εκείνα τα σημεία της ευθείας που έχουν τετμημένη ρητό αριθμό.

## 5 Η πιο δύσκολη περίπτωση: Δουλεύουμε με πραγματικούς αριθμούς

Είδαμε (βλ. (7) ) ότι είναι $f(x) = \lambda f(x)$ για κάθε ρητό $x$ όπου $\lambda = f\left(1\right)$. Επομένως όσα σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ αντιστοιχούν σε ρητούς αριθμούς θα ανήκουν στην ευθεία $y = \lambda x$. Τα σημεία αυτά θα έχουν τετμημένη οπωσδήποτε ρητό αριθμό. Για την τεταγμένη δεν ξέρουμε τίποτε γιατί αφού τώρα έχουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ο $\lambda = f\left(1\right)$ μπορεί να είναι ρητός αλλά μπορεί να είναι και άρρητος. Τι γίνεται όμως με τα σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ που έχουν τεταγμένη άρρητο αριθμό; Θα ανήκουν και αυτά στην $y = \lambda x$; Ο Cauchy απέδειξε ότι αν απαιτήσουμε επιπλέον η συνάρτηση μας να είναι **συνεχής** τότε και τα άλλα σημεία δηλαδή εκείνα με τετμημένη άρρητο αριθμό δεν μπορούν να ξεφύγουν από την ευθεία $y = \lambda x$: Θα ανήκουν σε αυτην. Η συνέχεια παίζει όπως θα δούμε και πιο κάτω βασικό ρόλο. Η συνάρτηση του Dirichlet δεν είναι συνεχής: Αν ήταν αφού παίρνει τις τιμές 0 και 1 θα πάρει και όλες τις ενδιάμεσες. Αυτό από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής. Δηλαδή θα πρέπει να πάρει και την τιμή $\frac{1}{2}$ και την $\frac{2}{3}$ κτλ. Αλλά όμως οι μόνες τιμές που παίρνει είναι 0 και 1. Άτοπο. Άρα δεν είναι συνεχής. Επιστρέφοντας στην συνάρτηση μας ας αποδείξουμε ότι αν η $f$ είναι συνεχής τότε θα ισχύει $f\left(x\right) = \lambda x$ για όλες τις πραγματικές τιμές του $x$ ρητές ή άρρητες. Η απόδειξη που θα δώσουμε είναι διαφορετική από εκείνη που αρχικά έδωσε ο Cauchy. Μας είναι αρκετό να εξασφαλίσουμε ότι για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι $f\left(x\right) - \lambda x = 0$. Ονομάζουμε $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \lambda x$. Η $g$ είναι συνεχής συνάρτηση αφού είναι διαφορά δύο συνεχών συναρτήσεων. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι $g\left(x\right) = 0$ για όλα τα $x$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχει κάποιος $x_0$ που το χαλάει. Δηλαδή ισχύει $g\left(x_0\right) \neq 0$. Τότε το $g\left(x_0\right)$ αφου δεν είναι μηδέν θα είναι θετικό ή αρνητικός αριθμός. Ας υποθέσουμε ότι είναι θετικός. Η επιχειρηματολογία για αρνητικό είναι η ίδια. Αφου η $g$ είναι συνεχής θα είναι

$$\lim_{x \to x_0} g\left(x\right) = g\left(x_0\right) > 0 \qquad (8)$$

Η (8) μας λέει κάτι παραπάνω από το ότι το $g\left(x_0\right)$ είναι θετικό. Μας λέει ότι το οφείλει και το $g\left(x\right)$ να είναι θετικό σε τιμές «γειτονικές» του $x_0$. Δηλαδή πρέπει και κοντά στο $x_0$ να παίρνει η $g$ θετικές τιμές. Με άλλα λόγια θα πρέπει να υπάρχει ένα διάστημα $(\alpha, \beta)$ που θα περιέχει το $x_0$ και για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ να είναι $g(x) > 0$. Μα αυτό μας οδηγεί σε άτοπο. Τόσο το διάστημα $(\alpha, x_0)$ όσο και το $(x_0, \beta)$ θα περιέχει ρητούς αριθμούς (θυμηθείτε: η πρόταση 4.2 μας εξασφαλίζει ότι μεταξύ των $\alpha, x_0$ θα υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός. Το ίδιο και μεταξύ των $x_0, \beta$). Και σε ένα τέτοιο ρητό $q$ η $g$ οφείλει να μηδενίζεται δηλαδή $g(q) = 0$. Επομένως έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 5.1** (Cauchy) *Οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ ειναι οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \lambda x$.*

# 6 Μία εντελώς σχολική αντιμετώπιση του θέματος

Θα δούμε υπό μορφή άσκησης μία πραγμάτευση του θέματος που οδηγεί στην απόδειξη της πρότασης 7.1. Χρησιμοποιούνται αποκλειστικά γνώσεις του σχολικού βιβλίου και απλώς την δύσκολη δουλειά την αναλαμβάνει, αφανώς, να φέρει σε πέρας ένα πολύ ισχυρό εργαλείο: το ολοκλήρωμα. Την συγκεκριμένη άσκηση την διδάσκω στα επαναληπτικά μαθήματα και έχω διαπιστώσει ότι αρέσει και στα παιδιά.

**Ασκηση 1** Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(1) = \lambda$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

για όλα τα $x$, $y$

1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x$, $m \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_x^{x+m} f(t)\,dt = mf(x) + \int_0^m f(t)\,dt$$

3. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη.
4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) = f'(1)$.
5. Να βρείτε την $f$.

Λυση

1. Το είδαμε και πριν: $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$

2. Α Τροπος. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\int_x^{x+m} f(t)\,dt = mf(x) + \int_0^m f(t)\,dt$ ή ισοδύναμα ότι $\int_x^{x+m} f(t)\,dt - mf(x) - \int_0^m f(t)\,dt = 0$. Ονομάζουμε

$$F(m) = \int_x^{x+m} f(t)\,dt - mf(x) - \int_0^m f(t)\,dt$$

και θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $m$ είναι $F(m) = 0$. Είναι
$F(m) = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{x+m} f(t)\,dt - mf(x) - \int_0^m f(t)\,dt =$
$= -\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{x+m} f(t)\,dt - mf(x) - \int_0^m f(t)\,dt$
από την οποία φαίνεται ότι η $F$ είναι παραγωγίσιμη (προσέξτε ότι η μεταβλητή είναι η $m$) και είναι:
$F'(m) = -\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' + \left(\int_0^{x+m} f(t)\,dt\right)' - (mf(x))' - \left(\int_0^m f(t)\,d\right)' =$
$= 0 + f(x+m) - f(x) - f(m) =$
$= f(x) + f(m) - f(x) - f(m) = 0$
Επομένως η $F$ ειναι σταθερή. Για βρούμε, την σταθερή, τιμή της δίνουμε μία «εύκολη» τιμή στο $m$: Για $m = 0$ είναι $F(0) = \int_x^x f(t)\,dt - 0 \cdot f(x) - \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. Άρα $F(m) = 0$ για όλα τα $m$.
Β Τροπος. Στο ολοκλήρωμα $\int_x^{x+m} f(t)\,dt$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = u + x$, δηλαδή η νέα μεταβλητή είναι η $u$ και έχουμε:

$$\int_x^{x+m} f(t)\,dt = \int_0^m f(u+x)\,du$$

αλλά:

$$\begin{aligned}\int_0^m f(u+x)\,du &= \int_0^m (f(u) + f(x))\,du = \\ &= \int_0^m f(u)\,du + \int_0^m f(x)\,du = \\ &= \int_0^m f(u)\,du + f(x)\int_0^m du = \\ &= \int_0^m f(u)\,du + \int_0^m f(x)\,du = \\ &= \int_0^m f(u)\,du + f(x)\int_0^m 1du = \\ &= \int_0^m f(u)\,du + mf(x) = mf(x) + \int_0^m f(t)\,dt\end{aligned}$$

3. Επιλέγουμε ένα $m$ να είναι διάφορο του 0 και από την σχέση του προηγουμένου ερωτήματος έχουμε: $f(x) = \frac{1}{m}\left(\int_x^{x+m} f(t)\,dt - \int_0^m f(t)\,dt\right)$ δηλαδή: $f(x) = \frac{1}{m}\left(-\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{x+m} f(t)\,dt - \int_0^m f(t)\,dt\right)$
Στην παραπάνω σχέση το β′ μέλος απαρτίζεται από παραγωγίσιμες, ως προς $x$, συναρτήσεις. Επομένως και το α′ μέλος δηλαδή η $f(x)$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη.

4. Α Τροπος Ξέρουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη. Επιστρέφουμε στην σχέση $\int_x^{x+m} f(t)\,dt = mf(x) + \int_0^m f(t)\,dt$ και παραγωγίζουμε ως προς $x$. Θα βρούμε (ενδιαμέσως γράψαμε $\int_x^{x+m} f(t)\,dt = -\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{x+m} f(t)\,d)$ $-f(x) + f(x+m) = mf'(x)$ και επομένως $mf'(x) = f(m)$. Θέτοντας $m = 1$ βρίσκουμε ότι $f'(x) = f(1)$
Β Τροπος Ξέρουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη. Επομένως η παράγωγος της $f$ στο τυχόν $x_0$ υπάρχει. Ας εκφράσουμε την $f'(x_0)$ με την βοήθεια του ορισμού. Είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Για την περίπτωση μας όπου έχουμε πληροφορίες για το $f(... + ..)$ (στη θέση των αποσιωπητικών φαναθείτε οποιουσδήποτε αριθμούς) η δεύτερη έκφραση της παραγώγου μπορεί να μας πει περισσότερα πράγματα. Και αυτό διότι:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)+f(h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{f(0+h)-0}{h}$$

και επομένως:

$$f'(x_0) = f'(0)$$

Άρα όλες οι τιμές της παραγώγου της $f$ είναι μεταξύ τους ίσες αφού όλες είναι ίσες με $f'(0)$. Φυσικά θα ισχύει και $f'(x) = f'(1)$ για κάθε $x$.

5. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f'(x) = \lambda$ όπου $\lambda = f'(0)$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη βρίσκουμε πως $f(x) = \lambda x + \kappa$. Το $\kappa$ μπορούμε να το βρούμε από την τιμή της $f$ στο 0 που είναι, όπως είδαμε, 0. Οπότε $f(0) = \lambda \cdot 0 + \kappa$ δηλαδή $\kappa = 0$. Τελικά έχουμε ότι

$$f(x) = \lambda x$$

# 7 Χωρίς τη συνέχεια τι γίνεται;

Μέχρι στιγμής έχουμε μάθει ότι αν έχουμε μία συνάρτηση που να ικανοποιεί την (1) τότε αν

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{Q}$ ή
- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής

τότε θα είναι της μορφής $f(x) = \lambda x$ με το σταθερό $\lambda$ να είναι ρητός στην πρώτη περίπτωση και πραγματικός στην δεύτερη.

Το ερώτημα που προκύπτει είνα εύλογο: Είναι απαραίτητη η υπόθεση της συνεχείας. Μήπως δηλαδή με άλλο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f(x) = \lambda x$ χωρίς να υποθέσουμε ότι η $f$ συνεχής; Μήπως η ιδιότητα (1) είναι αρκετή για να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα $f(x) = \lambda x$; Δηλαδή μήπως η η ισχύς της (1) αυτόματα εξασφαλίζει και την συνέχεια; Μήπως στο τέλος - τέλος δεν υπάρχουν ασυνεχείς συναρτήσεις που να ικανοποιούν την (1); Αυτό το ερώτημα αν και απασχόλησε τους μαθηματικούς άργησε να απαντηθεί. Από το 1821 που είδε το φως της δημοσιότητας η απόδειξη του Cauchy πέρασαν αρκετά χρόνια έως ότου η μαθηματική κοινότητα να δώσει απάντηση. Για την ακρίβεια 83! Πριν προχωρήσουμε ας διατυπώσουμε κάπως αλλιώς την πρόταση 7.1.

**Πρόταση 7.1** *Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ θα είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι της μορφής μορφής $f(x) = \lambda x$.*

Μία συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0$. Δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Είναι ακριβώς το ίδιο να πούμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Όπως επίσης το ίδιο είναι να πούμε και $\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$. Αυτό κάνοντας την αλλαγή $x = x_0 + h$. Μα $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0) + f(h) - f(x_0) = f(h)$. Επομένως θα είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ αν και μόνο αν είναι $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$. Όμως $0 = f(0)$. Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \tag{9}$$

Η σχέση (9) φαινομενικά απλή μας λέει μια μεγάλη αλήθεια. Η $f$ θα είναι συνεχής σε κάποιο σημείο αν και μόνο αν είναι συνεχής στο 0. Που σημαίνει ότι θα είναι συνεχής στο $x_1$ αν και μόνο αν είναι συνεχής στο 0 που θα ισχύει αν και μόνο αν είναι συνεχής στο σημείο $x_2$. Με άλλα λόγια αρκεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο για να είναι συνεχής παντού. Και αν αποτύχει να είναι συνεχής σε ένα σημείο θα αποτύχει και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο. Ή όλα ή τίποτα λοιπόν και αξίζει να τα επαναδιατυπώσουμε σε μία πρόταση:

**Πρόταση 7.2** *Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ θα είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι συνεχής σε ένα σημείο.*

Δεν ξέρουμε ακόμη αν υπάρχει ασυνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που να ικανοποιεί την (1) αλλά αν υπάρχει θα πρέπει να είναι παντού ασυνεχής: Οποιοδήποτε διάστημα και να φαντασθούμε θα πρέπει η γραφική της παράσταση σε αυτό να μην είναι συνεχής γραμμή. Θα πρέπει να διακόπτεται παντού. Κάτι σαν την συνάρτηση του Dirichlet; Θα δούμε! Ας υποθέσουμε ότι μία υπάρχει μία ασυνεχής συνάρτηση $f$ στο $\mathbb{R}$ που να ικανοποιεί την (1). Κάποια σημεία της γραφικής της παράστασης $\mathcal{C}_f$, *σίγουρα όσα έχουν τετμημένη ρητό*, θα ανήκουν στην ευθεία $y = \lambda x$ με $\lambda = f(1)$. Αλλά θα υπάρχουν και σημεία της $\mathcal{C}_f$ που δεν ανήκουν. Παίρνουμε το σημείο $A(1, \lambda)$ που σίγουρα ανήκει στην $y = \lambda x$ και κάποιο από τα σημεία της $\mathcal{C}_f$ που δεν ανήκουν ας πούμε το $B(t, f(t))$. Ας θεωρήσουμε τώρα τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Επειδή τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ δεν είναι συγραμμικά μπορούμε χρησιμοποιώντας γραμμικούς συνδυασμούς τους να σχηματίσουμε κάθε διάνυσμα του επιπέδου. Δηλαδή να φθάσουμε, ξεκινώντας από το $O$ σε κάθε σημείο του επιπέδου διανύοντας μία απόσταση κατά την διεύθυνση του $\vec{u}$ και μετά κατά την διεύθυνση του $\vec{v}$. Ας ασχοληθούμε με γραμμικούς συνδυασμού που έχουν «καλούς» συντελεστές: κλάσματα ακεραίων δηλαδή ρητούς. Με $p, q \in \mathbb{Q}$ έχουμε:

$$p\vec{u} + q\vec{v} = p(1, \lambda) + q(t, f(t)) =$$

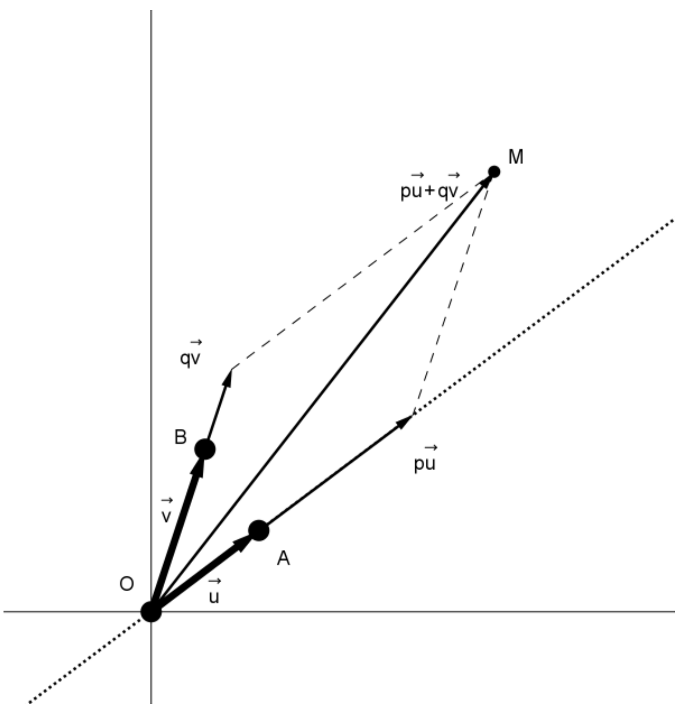
$$= p(1, f(1)) + q(t, f(t)) =$$

$$= (p \cdot 1 + qt, pf(1) + qf(t)) =_{\text{λόγω της (6)}}$$

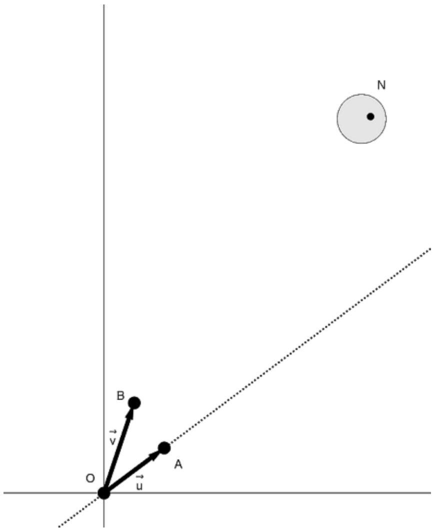
$$= (p \cdot 1 + qt, f(p \cdot 1) + f(qt)) =$$

$$= (p + qt, f(p + qt))$$

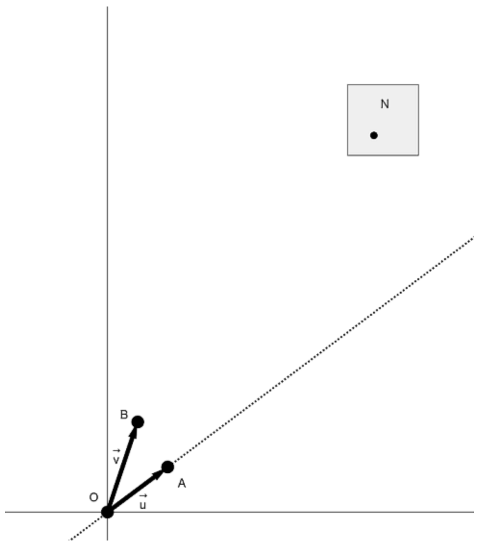
Επομένως το πέρας του $p\vec{u} + q\vec{v}$ είναι το σημείο $M(p + qt, f(p + qt))$ που ανήκει στην $\mathcal{C}_f$.



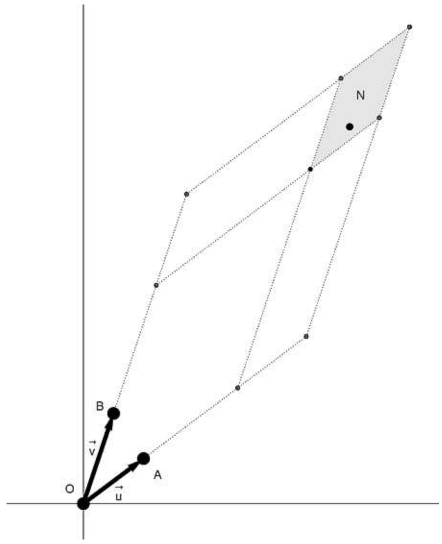
Το συμπέρασμα που καταλήξαμε έχει μία μάλλον απροσδόκητη συνέπεια: Ας διαλέξουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $N$ του επιπέδου. Ας πάμε να σταθούμε όσο κοντά θέλουμε στο $N$. Όχι πάνω στο $N$ αλλά κοντά. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να πούμε τι εννοούμε κοντα. Για παράδειγμα μέσα σε ένα κύκλο της αρεσκείας μας που περιέχει το $N$:



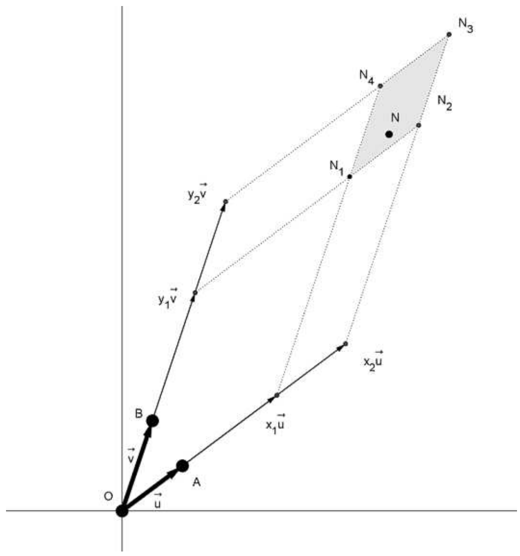

ή σε ένα μικρό τετράγωνο που να περιέχει το $N$:




ή, παρ' όλο που είναι κάπως ασυνήθιστο, σε ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές παράλληλες προς τους φορείς των $\vec{u}$ και $\vec{v}$:




Οπως είδαμε οι διανυσματικές ακτίνες των κορυφών του παραλληλογράμμου μπορούν να προκύψουν ως γραμμικοί συνδυασμοί των των $\vec{u}$ και $\vec{v}$.




Στο σχήμα μας θα είναι:

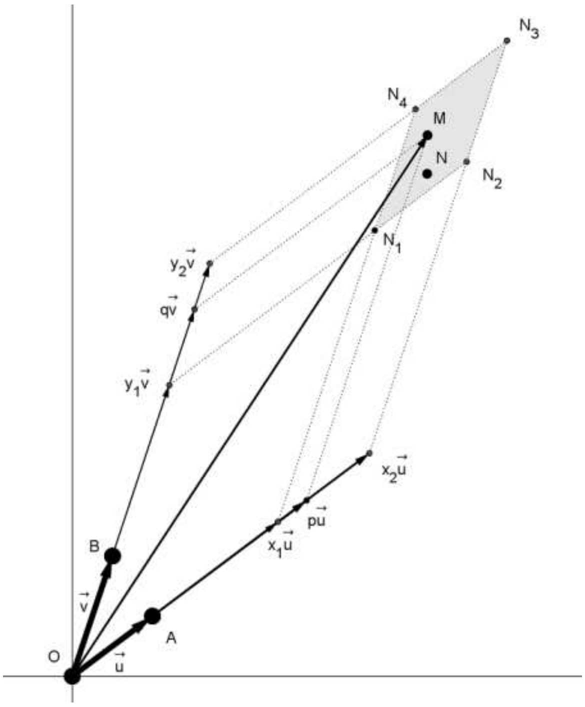
$$\overrightarrow{ON_1} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}$$

$$\overrightarrow{ON_2} = x_2\vec{u} + y_1\vec{v}$$

$$\overrightarrow{ON_3} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v}$$

$$\overrightarrow{ON_1} = x_1\vec{u} + y_2\vec{v}$$

όπου οι $x_1, x_2, y_1, y_2$ είναι κατάλληλοι συντελεστές. Οι $x_1, x_2, y_1, y_2$ μπορεί να είναι ρητοί ή άρρητοι. Ότι όμως και αν είναι το βέβαιο είναι ότι μεταξύ των $x_1$, $x_2$ υπάρχει κάποιος ρητός $p$ και μεταξύ των $y_1$, $y_2$ υπάρχει κάποιος ρητός $q$. Αυτά ως συνέπεια της πρότασης 4.2.



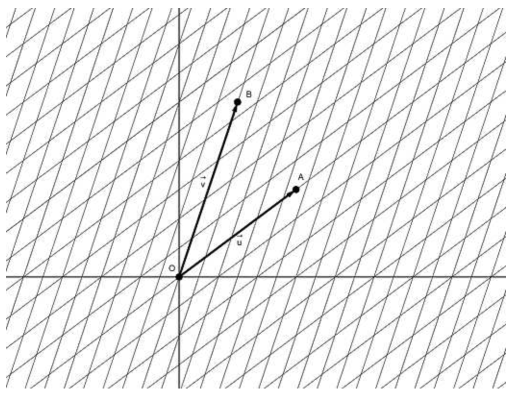

Για το πέρας του $M$ του διανύσματος $\overrightarrow{OM} = p\vec{u}+q\vec{v}$ θα ισχύουν δύο πράγματα:

- Θα περιέχεται στο παραλληλόγραμμο $N_1N_2N_3N_4$
- Θα ανήκει στην γραφική παράσταση $\mathcal{C}_f$ της $f$.

Το $N$ το διαλέξαμε εμείς. Το παραλληλόγραμμο $N_1N_2N_3N_4$ επίσης. Που σημαίνει ότι όσο κοντά θέλουμε σε οποιοδήποτε σημείο θα υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της $f$. Λέμε ότι η $\mathcal{C}_f$ είναι σύνολο **πυκνό στο επίπεδο**. Δηλαδή, σε πιό τεχνική γλώσσα, έχουμε την πρόταση:

**Πρόταση 7.3** *Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για όλα τα $x,y\in\mathbb{R}$ Αν η $f$ δεν είναι συνεχής τότε η γραφική της παράσταση $\mathcal{C}_f$ είναι σύνολο πυκνό στο επίπεδο.*

Πως θα μοιάζει η γραφική παράσταση μίας τέτοιας συνάρτησης; Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται πολλά παραλληλόγραμμα όπως το $N_1N_2N_3N_4$. Μέσα σε κάθε ένα από αυτά οφείλει η $\mathcal{C}_f$ να έχει τουλάχιστον ένα σημείο. Και αν γίνουν πιό μικρά η υποχρέωση παραμένει κ.ο.κ



Μέσα σε κάθε ένα από αυτά οφείλει η $\mathcal{C}_f$ να έχει τουλάχιστον ένα σημείο. Και αν γίνουν πιό μικρά η υποχρέωση παραμένει κ.ο.κ Δηλαδή η γραφική παράσταση μιας τέτοιας $f$, **αν βέβαια τέτοια συνάρτηση υπάρχει**, θα απλώνεται σε όλο το επίπεδο, θα μπαίνει σε κάθε κύκλο, τετράγωνο, παραλληλόγραμμο. Θα μοιάζει με μουντζούρα αλλά δεν θα γεμίζει όλο το επίπεδο. Εξ' άλλου ως γραφική παράσταση συνάρτησης σε κάθε κατακόρυφη ευθεία της μορφής $x=x_0$ οφείλει να εναποθέτει ακριβώς ένα σημείο. Πρόκειται για μια συνάρτηση πολύ διαφορετική από αυτές που ξέρουμε. Μία συνάρτηση-τέρας δηλαδή.

# 8 Υπάρχουν τέρατα;

## 8.1 Μεγαλώνοντας λίγο το $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Είδαμε ότι μία λύση της συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy στο σύνολο των ρητών έχει μία εξαιρετικά καλή συμπεριφορά. Δεν ξέρουμε όμως αν θα συμβαίνει το ίδιο όταν περάσουμε από τους ρητούς στους πραγματικούς αριθμούς. Επειδή ο δρόμος από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ είναι μεγάλος (η ανθρωπότητα χρειάσθηκε αιώνες για να ξεκαθαρίσει ορισμένα βασικά πράγματα για την δομή του $\mathbb{R}$) ας κάνουμε πρώτα ένα μικρό βήμα. Βήμα που υπήρξε μάλλον δυσάρεστο για την σχολή των Πυθαγορείων όταν επινοήθηκε ο πρώτος γνωστός στην ιστορία ασύμμετρος δηλαδή ο $\sqrt{2}$: Ας ενσωματώσουμε στους ρητούς αριθμούς τον $\sqrt{2}$. Η ενσωμάτωση γίνεται με παρόμοιο τρόπο με εκείνον της φανταστικής μονάδας $i$ που οδηγεί στους μιγαδικούς αριθμούς. Γίνεται πολύ απλά: Αποφασίζουμε να συμφιλιωθούμε με την ιδέα ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ένας αριθμός όπως οι άλλοι και του επιτρέπουμε να συναναστραφεί με τους υπόλοιπους ρητούς. Μπορεί να μετέχει στην εκτέλεση πράξεων οι οποίες όμως θα εξακολουθούν να έχουν τις γνωστές μας ιδιότητες. Μπορεί να πολλαπλασιάζεται με ρητούς, και να προστίθεται με ρητούς. Γρήγορα-γρήγορα βλέπουμε ότι σχηματίζονται παραστάσεις της μορφής

$$\alpha+\beta\sqrt{2} \text{ με } \alpha,\ \beta \text{ ρητούς} \tag{10}$$

Οι παραστάσεις (10) είναι προϊόντα αλληλεπίδρασης του $\sqrt{2}$ με τους ρητους. Μπορούμενα έχουμε ένα απλό κριτήριο για το πότε δύο παραστάσεις της μορφής (10) μας δίνουν τον ίδιο αριθμό: Θα είναι

$$\alpha+\beta\sqrt{2}=\alpha'+\beta'\sqrt{2}\Leftrightarrow \alpha-\alpha'=(\beta'-\beta)\sqrt{2}$$

Αν συμβεί $\beta'-\beta\neq 0$ θα είναι

$$\sqrt{2}=\frac{\alpha-\alpha'}{\beta'-\beta}=\text{πηλίκο δύο ρητών}=\text{ρητός}$$

και επειδή αυτό είναι αδύνατο θα είναι αναγκαστικά $\beta'-\beta=0$ που μας δίνει και $\alpha-\alpha'=0$. Επομένως:

$$\alpha+\beta\sqrt{2}=\alpha'+\beta'\sqrt{2}\Leftrightarrow \alpha=\alpha' \text{ και } \beta=\beta' \tag{11}$$

Ένας αριθμός της μορφής (10) θα είναι ίσος με το μηδέν δηλαδη με τον $0+0\sqrt{2}$ μόνο αν $\alpha=\beta=0$. Στους αριθμούς (10) οι 4 πράξεις διεκπεραιώνονται εύκολα:

1. $\left(\alpha+\beta\sqrt{2}\right)\pm\left(\alpha'+\beta'\sqrt{2}\right)=(\alpha+\alpha')\pm(\beta+\beta')\sqrt{2}$
2. $\left(\alpha+\beta\sqrt{2}\right)\cdot\left(\alpha'+\beta'\sqrt{2}\right)=(\alpha\alpha'+2\beta\beta')+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\sqrt{2}$
3. $\frac{\alpha+\beta\sqrt{2}}{\alpha'+\beta'\sqrt{2}}=\frac{\left(\alpha+\beta\sqrt{2}\right)\left(\alpha'-\beta'\sqrt{2}\right)}{\left(\alpha'+\beta'\sqrt{2}\right)\left(\alpha'-\beta'\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\alpha\alpha'-2\beta\beta'\right)+\left(\beta\alpha'-\alpha\beta'\right)\sqrt{2}}{(\alpha')^2-2(\beta')^2}=\frac{\alpha\alpha'-2\beta\beta'}{(\alpha')^2-2(\beta')^2}+\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{(\alpha')^2-2(\beta')^2}\sqrt{2}$

Στην τελευταία σχέση σημειώστε ότι παρονομαστής $\alpha' + \beta'\sqrt{2}$ του κλάσματος $\frac{\alpha+\beta\sqrt{2}}{\alpha'+\beta'\sqrt{2}}$ πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός που σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας από τους $\alpha'$, $\beta'$ πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. Όταν πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με $\alpha' - \beta'\sqrt{2}$ διαιρούμε με ένα μη μηδενικό αριθμό αφού τουλάχιστον ένας από τους $\alpha'$, $-\beta'$ είναι διάφορος του μηδενός. Στο τέλος μένει ως παρονομαστής ο $(\alpha')^2 - 2(\beta')^2$ που αναγκαστικά πρέπει να είναι διάφορος του μεηδενός. Και είναι! Διότι αν ήταν μηδέν ο $\sqrt{2}$ θα έπρεπε να είναι ρητός. Υπάρχει ένα παραδεδεγμένο σύμβολο για το σύνολο των αριθμών (10): είναι το $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. Το $\mathbb{Q}$ δηλώνει που επισυνάπτουμε, το $\sqrt{2}$ τι επισυνάπτουμε και η παρένθεση ( ) δηλώνει τον τρόπο επισύναψης: γίνονται οι 4 πράξεις. Το σύνολο $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ είναι μία αριθμητική όπως το $\mathbb{Q}$ ή το $\mathbb{R}$ όπου μπορούν να εκτελεσθούν οι 4 πράξεις χωρίς να χρειασθεί να «βγούμε έξω» (στο $\mathbb{Z}$ υπάρχουν διαιρέσεις που μας «πετάνε» έξω). Είναι μία από τις πιό απλές αριθμητικές που περιέχουν άρρητους αριθμούς. Μάλιστα αν προσέξουμε την (10) βλέπουμε ότι τα στοιχεία του $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ παρασκευάζονται με μία απλή συνταγή: ένας ρητος και ένα ρητό πολλαπλάσιο του $\sqrt{2}$. Απλώς η δοσολογία είναι εκείνη που διαφέρει από αριθμό σε αριθμό. Στην ουσία τα δομικά υλικά είναι το 1 και το $\sqrt{2}$. Για να έχουμε το $\alpha + \beta\sqrt{2}$ ακολουθούμε την δοσολογία: $\alpha$ από το 1 και $\beta$ από το $\sqrt{2}$. Μάλιστα η σχέση (11) μας λέει ότι ίδιες δοσολογίες οδηγούν σε ίσους αριθμούς και ίσοι αριθμοί έχουν, απαραιτήτως, τις ίδιες δοσολογίες.

## 8.2 Η εξίσωση του Cauchy στο $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

Τι θα σήμαινε να έχουμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \to \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα $x, y$;. Ας κάνουμε μερικούς υπολογισμούς. Έχουμε: $f\left(\alpha + \beta\sqrt{2}\right) = f(\alpha) + f\left(\beta\sqrt{2}\right) = f(\alpha \cdot 1) + f\left(\beta\sqrt{2}\right) = \alpha f(1) + \beta f\left(\sqrt{2}\right)$. Που σημαίνει ότι από την στιγμή που ξέρουμε τις τιμές $f(1)$ και $f\left(\sqrt{2}\right)$ ξέρουμε και την $f$. Πράγματι ας αποφασίσουμε αυθαίρετα σε τι τιμές θα αντιστοιχίσουμε τα 1 και $\sqrt{2}$ μπορούμε να φτιάξουμε την $f$. Ας πούμε πως αποφασίζουμε να έχουμε $f(1) = r$ και $f\left(\sqrt{2}\right) = s$ όπου οι αριθμοί $r, s$ είναι στοιχεία του $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την $f$ και στα λοιπά στοιχεία του $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ ως εξής:

$$f\left(\alpha + \beta\sqrt{2}\right) = \alpha r + \beta s$$

Αυτό για κάθε $\alpha, \beta$. Από την στιγμή που έχουμε πάρει τις αποφάσεις

$$1 \to r \quad \sqrt{2} \ \to s$$

τότε η τιμή της $f$ στο $\alpha + \beta\sqrt{2}$ εξαρτάται αποκλειστικά από τα $\alpha, \beta$ που σημαίνει ότι τελικά εξαρτάται από τον αριθμό $\alpha + \beta\sqrt{2}$. Αν τώρα έχουμε δύο αριθμούς $x = \alpha + \beta\sqrt{2}$ και $y = \alpha' + \beta'\sqrt{2}$ τότε

$f(x+y) = f\left(\left(\alpha + \beta\sqrt{2}\right) + \left(\alpha' + \beta'\sqrt{2}\right)\right) =$
$= f\left((\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')\sqrt{2}\right) = (\alpha + \alpha')r + (\beta + \beta')s =$
$= (\alpha r + \beta s) + (\alpha' r + \beta' s) = f\left(\alpha + \beta\sqrt{2}\right) + f\left(\alpha' + \beta'\sqrt{2}\right) =$
$= f(x) + f(y)$

Επομένως η $f$ που ορίσαμε με αυτό τον τρόπο έχει την ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Ας γίνουμε πιό συγκεκριμένοι στις επιλογές μας. Ας αποφασίσουμε:

$$1 \to 1 \quad \sqrt{2} \ \to -\sqrt{2}$$

Ας πάρουμε μία ιδέα από την συμπεριφορά της $f$ με αυτή την επιλογή. Ο τύπος της είναι

$$f\left(\alpha + \beta\sqrt{2}\right) = \alpha - \beta\sqrt{2}$$

- Αν $x = \alpha \in \mathbb{Q}$ τότε $f(x) = \alpha = x$. Δηλαδή όταν η $f$ τοφοδοτείται από ρητούς δίνει σημεία πάνω στην ευθεία $y = x$
- Αν $x = \beta\sqrt{2}$ με $\beta \in \mathbb{Q}$ τότε $f(x) = -\beta\sqrt{2} = -x$ δηλαδή η $f$ δίναι σημεία πάνω στην $y = -x$.
- Αν $x = \alpha + a\sqrt{2}$ τότε $f(x) = \alpha - a\sqrt{2}$ που σημαίνει ότι σε αυτή την ειδική περίπτωση είναι $f(x) = \alpha - a\sqrt{2} = \alpha\left(1 - \sqrt{2}\right) = \frac{x}{1+\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{2}\right) = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)x}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} = \left(2\sqrt{2} - 3\right)x$ οπότε τα αντίστοιχα σημεία ανήκουν στην ευθεία $y = \left(2\sqrt{2} - 3\right)x$

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση μας η $\mathcal{C}_f$ έχει σημεία, και μάλιστα άπειρα, σε κάθε μία από τις ευθείες $y = x$, $y = -x$, $y = \left(2\sqrt{2} - 3\right)x$. [4]

## 8.3 Από το $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ στο $\mathbb{R}$.

Επομένως στο $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ υπάρχουν λύσεις της συναρτησιακής εξίσωσης του Caychy που η γραφική τους παράσταση δεν απαρτίζεται από συνευθειακά σημεία. Το $\mathbb{R}$ είναι πολύ πιο πλούσιο από το $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. Και μπορεί αυτό που συμβαίνει στο $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ να μην συμβαίνει και στο $\mathbb{R}$. Ας δούμε πάλι πως κατασκευάσαμε τις λύσεις $f$ της συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy στο $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$: Χρησιμοποιήσαμε τα 1, $\sqrt{2}$ και δώσαμε τιμές μόνο σε αυτά. Όλα τα άλλα ήλθαν αυτόματα. Τα 1, $\sqrt{2}$ έχουν μία σημαντική ιδιότητα: Κάθε στοιχείο του $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός τους με ρητούς συντελεστές κατά μοναδικό τρόπο $\alpha \cdot 1 + \beta\sqrt{2}$. Αν ήταν δυνατό να ξέρουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο πραγματικών αριθμών $\mathcal{B}$ που να λειτουργεί όπως το $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ δηλαδή κάθε πραγματικός αριθμός να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένων το πλήθος στοιχείων του $\mathcal{B}$ κατά μοναδικό τρόπο τότε θα μπορούσαμε να μιμηθούμε την κατασκευή της $f$:

- Θα ορίζαμε την $f$ όπως θέλουμε στα στοιχεία του $\mathcal{B}$ δηλαδή θα αποφασίζαμε ποια θα ήταν τα $f(b)$ για $b \in \mathcal{B}$
- Μετά σε κάθε πραγματικό αριθμό $x = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i$ όπου $c_i \in \mathbb{Q}$ και $b_i \in \mathcal{B}$ θα αντιστοιχίσουμε τον αριθμό $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i b'_i$ όπου $b'_i$ είναι ο αριθμός στον οποίο έχουμε αντιστιχοίσει το $b_i$ προηγουμένως.
- Για να επιβεβαιώσουμε ότι όντως ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ συγκεντρώνουμε όλα τα $b$ που απαιτούνται για να εκφρασθεί το $x$ ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\mathcal{B}$ και όλα τα $b$ που χρειάζονται για το $y$. Τα συγκεντρώνουμε σε ένα σύνολο και τα αριθμούμε. Ας πούμε ότι όλα μαζί είναι $n$ το πλήθος. Οπότε έχουμε τα

[4] Γενικά μπορει να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{C}_f$ έχει άπειρα σημεία σε κάθε μία από τις άπειρες το πλήθος ευθείες της μορφής $y = \left(p + q\sqrt{2}\right)x$ όπου οι $p$, $q$ είναι ρητοί που ικανοποιούν την σχέση $p^2 - 2q^2 = 1$.

$b_1, b_2, ..., b_n$. Ας πούμε ότι $x = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i$ και $y = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_i b_i$. Ενδέχεται στην έκφραση του $x$ να μην απαιτούνται όλα τα $b_i$. Δεν πειράζει. Τα εμφανίζουμε απλώς με συντελεστή μηδέν. Για λόγους ομοιομορφίας. Φυσικά το ίδιο ισχύει και με το $y$. Έχουμε και λέμε:

$$f(x+y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_i b_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (c_i + \widetilde{c}_i) b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (c_i + \widetilde{c}_i) b_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i' + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_i b_i' = f(x) + f(y)$$

Αν έχουμε ένα σύνολο σαν το $\mathcal{B}$ τότε είναι βέβαιον ότι το τέρας υπάρχει: Διαλέγουμε δύο ατοιχεία της $\mathcal{B}$ ας τα πούμε $b_1, b_2$ (Η $\mathcal{B}$ θα έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Απόδειξη: Άσκηση). Ορίζουμε την $f$ στα υπόλοιπα στοιχεία της $\mathcal{B}$ όπως θέλουμε. Όμως το $b_1$ το αντιστοιχίσουμε στον εαυτό του ενώ το $b_2$ το αντιστοιχίζουμε στο $2b_2$. Φυσικά η $f$ αντιστοιχεί το 0 στο 0. Συνεπώς έχουμε τρία σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ τα $(0,0)$, $(b_1, b_1)$, $(b_2, 2b_2)$ που δεν είναι συνευθειακά. Τέρας λοιπόν.

# 9 Υπάρχει η $\mathcal{B}$;

## 9.1 Βάσεις

Σύνολα όπως η $\mathcal{B}$ λέγονται βάσεις του $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{Q}$. Αν και η συζήτηση μπορεί να γίνει σε ένα πολύ πιό γενικό πλαίσιο (εκείνο των διανυσματικών χώρων) ας περιορισθούμε στα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$. **Βάση** λοιπόν του $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{Q}$ λέγεται όπως είπαμε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών $\mathcal{B}$ τέτοιο ώστε κάθε παραγματικός αριθμός να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του $\mathcal{B}$ κατά μοναδικό τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία βάση του $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{Q}$ (και για να μην επαναλαμβάνουμε το ίδιο θα λέμε απλώς μία βάση του $\mathbb{R}$). Μία εύκολη παρατήρηση είναι ότι δε μπορεί ο 0 να ανήκει στην $\mathcal{B}$. Αν ανήκε και $b$ ήταν ένα άλλο στοιχείο της $\mathcal{B}$ τότε $2b = 1 \cdot 0 + 2b$ και $2b = 3 \cdot 0 + 2b$ δηλαδή θα έχουμε δύο γραφές του ίδιου στοιχείου ως γραμμικού συνδυασμού στοιχείων της $\mathcal{B}$. Αν τώρα πάρουμε ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του $\mathcal{B}$ τότε κανένα από αυτά δε μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμό των υπολοίπων με ρητούς συντελεστές. Εξήγηση: Αν υποτεθεί ότι $b, b_1, b_2, , , b_m$ είναι στοιχεία της $\mathcal{B}$ και συμβαίνει $b = c_1 b_1 + c_2 b_2 + ... + c_m b_m$ τότε

$$b = 0b + c_1 b_1 + c_2 b_2 + ... + c_m b_m$$

αλλά και

$$b = 1 \cdot b + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + ... + 0 \cdot b_m$$

Επομένως το ίδιο στοιχείο γράφεται με δύο τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $\mathcal{B}$ (άτοπο).

## 9.2 Η ύπαρξη βάσεων

Ας περάσουμε τώρα στο ερώτημα του τίτλου αυτής της παραγράφου: Υπάρχει μία βάση του $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{Q}$; Την απάντηση την έδωσε ο Georg Hamel το 1904 σε μια εργασία του που δημοσιεύθηκε το 1905. Ναι υπάρχουν και επομένως υπάρχει και το τέρας. Ο Hamel στην απόδειξη του χρησιμοποίησε το ακόλουθο θεώρημα του Ernst Zermelo:

**Πρόταση 9.1** ***(Θεώρημα Καλής Διάταξης)*** *Κάθε σύνολο έχει μία καλή διάταξη.*

Το θεώρημα μας λέει ότι για κάθε σύνολο $X$ υπάρχει μία σχέση ολικής (γραμμικής) διάταξης $\prec$ στο $X$ (δηλαδή μία ανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική σχέση ως προς την οποία δύο οποιαδήποτε στοιχεία του $X$ είναι συγκρίσιμα) με την επιπλέον ιδιότητα ότι κάθε μη κενό υποσύνολο $Y$ του $X$ έχει πρώτο στοιχείο (δηλαδή υπάρχει ένα $y \in Y$ τέτοιο ώστε για κάθε άλλο στοιχείο $y'$ του $Y$ να ισχύει $y \prec y'$) Πίσω από την απλή διατύπωση του θεωρήματος (του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί σχεδόν σε οποιοδήποτε βιβλίο θεωρίας συνόλων) κρύβεται το αξίωμα της επιλογής με το οποίο μάλιστα είναι ισοδύναμο. Το αξίωμα της επιλογής έχει και αυτο μία απλή διατύπωση: Αν έχουμε μία οικογένεια συνόλων μπορούμε να διαλέξουμε από κάθε μέλος της οικογένειας ένα στοιχείο. Πιό τυπικά:

**Αξίωμα της Επιλογής** Αν $\{A_i\}_{i \in I}$ είναι μία μη κενή οικογένεια συνόλων τότε υπάρχει σύνολο $X$ και μία απεικόνιση $f : \{A_i\}_{i \in I} \to X$ τέτοια ώστε $f(A_i) = A_i$.

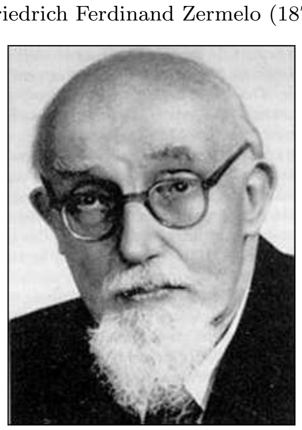
Έχουμε λοιπόν το:

**Πρόταση 9.2** (Hamel). *Υπάρχει μία βάση του $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{Q}$.*

Η απόδειξη που ακολουθεί είναι πολύ κοντά σε εκείνη του Hamel και προέρχεται από το βιβλίο Θεωρίας Συνόλων του Kamke (η πρώτη έκδοση του έγινε το 1928, χρονικά όχι πολύ μακριά από την δημοσίευση του άρθρου του Hamel). Θεωρούμε το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Έστω $\prec$ μία καλή διάταξη στο $\mathbb{R}^*$. Με $x \in \mathbb{R}^*$ θα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$S(x) = \{t \in \mathbb{R}^* | t \prec x\}$$

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953)



Georg Karl Wilhelm Hamel (1877-1954)

Θα ορίσουμε μία βάση $\mathcal{B}$ καθορίζοντας ποιά στοιχεία του $\mathbb{R}^*$ ανήκουν στην $\mathcal{B}$. Το $\mathbb{R}^*$ έχει πρώτο στοιχείο. Ας το πούμε $a$. Το $a$ να ανήκει στην $\mathcal{B}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε καθορίσει ποια από τα στοιχεία του συνόλου $S(x)$ ανήκουν στην

$\mathcal{B}$. Τότε είμαστε σε θέση να καθορίσουμε πότα θα ανήκει στην $\mathcal{B}$ και το $x$: Ορίζουμε το $x$ να ανήκει στην $\mathcal{B}$ αν δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της $\mathcal{B}$ ανήκουν στο $S(x)$. Με αυτή την διαδικασία έχουμε «σαρώσει» όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^*$ καθορίζοντας ποιά θα ανήκουν $\mathcal{B}$· Ή μήπως όχι; Δηλαδή υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{R}^*$ που έχουν «ξεφύγει» και δεν έχουμε καθορίσει γιαυτά αν ανήκουν στην στην $\mathcal{B}$ ή όξι; Ας υποθέσουμε πως τέτοια στοιχεία υπάρχουν. Ας ονομάσουμε $Y$ το σύνολο τους. Αυτό θα έχει ως προς την διάταξη $\prec$ ένα πρώτο στοιχείο έστω $b$. Θα είναι βέβαια $a \prec y$ για κάθε $y \in Y$. Το $b$ είναι διαφορετικό από το $a$ διότι για το $a$ έχουμε ήδη καθορίσει ότι ανήκει στην $\mathcal{B}$. Επίσης αν συμβαίνει για κάποιο $x \in \mathbb{R}^*$ να είναι $x \prec b$ τότε δε μπορεί να είναι $x \in Y$ διότι τότε θα έπρεπε $b \preceq x$. Επομένως το σύνολο $S(b) = \{t \in \mathbb{R}^* | t \prec b\}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο του $Y$ άρα περιέχει αποκλειστικά στοιχεία για τα οποία έχουμε καθορίσει αν ανήκουν στην $\mathcal{B}$. Μα τότε μπορούμε να καθορίσουμε αν το $b$ ανήκαι ή όχι στην $\mathcal{B}$ (άτοπο).

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει το σύνολο $\mathcal{B}$ αλλά δεν έχουμε εξασφαλίσει ότι είναι βάση. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε $x \in \mathbb{R}^*$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $\mathcal{B}$ και μάλιστα κατά μοναδικό τρόπο. Ας δείξουμε πρώτα ότι όντως γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $\mathcal{B}$. Αν είναι $x = a$ τότε $x = 1 \cdot a$. Αν είναι $a \prec x$ τότε θεωρούμε το $S(x)$. Γράφεται το $x$ ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $\mathcal{B}$ που ανήκουν στο $S(x)$; Αν «ναι» έχουμε τελειώσει. Αν όχι τότε από τον τρόπο ορισμού της $\mathcal{B}$ το $x$ πρέπει να ανήκει στην $\mathcal{B}$ οπότε $x = 1 \cdot x$ και έχουμε πάλι τελειώσει.

Αποδεικνύουμε τέλος ότι ο τρόπος γραφής ενός στοιχείου του $x \in \mathbb{R}^*$ ως γραμμικού συνδυασμού στοιχείων της $\mathcal{B}$ είναι μοναδικός. Ας υποθέσουμε ότι

$$x = c_1 b_1 + .... + c_n b_n = c_1' b_1' + .... + c_m' b_m' \qquad (12)$$

είναι δύο γραφές του $x$ ως γραμμικού συνδυασμού στοιχείων της $\mathcal{B}$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $b_1 \prec b_2 \prec ... \prec b_n$ και $b_1' \prec b_2' \prec ... \prec b_m'$ με τους συντελεστές $c_1, ..., c_n$, $c_1', ..., c_m'$ να είναι διάφοροι του μηδενός. Ας υποθέσουμε ότι $b_m' \neq b_n$ λ.χ. $b_n \prec b_m'$. Λύνοντας την (12) ως προς $b_n$ βρίσκουμε ότι το $b_n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $b_1, ...., b_{n-1}$, $b_1', ...., b_m'$ τα οποία όμως ανήκουν στο $S(b_n)$. Άτοπο από τον τρόπο κατασκευής της $\mathcal{B}$. Επομένως θα είναι $b_m' = b_n$. Αναγκαστικά θα είναι $c_m' = c_n$ διαφορετικά μπορούμε πάλι να καταλήξουμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι το $b_n$ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $\mathcal{B}$ που ανήκουν στο $S(b_n)$. Αλλά με $b_m' = b_n$, $c_m' = c_n$ μπορούμε να διαγράψουμε στην (12) τα $c_n b_n, c_m' b_m'$. Επαναλαμβάνοντας τον συλλογισμό θα βρούμε $b_{m-1}' = b_{n-1}$, $c_{m-1}' = c_{n-1}$ κ.ο.κ που τελικά μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί στα δύο μέλη της (12) είναι ταυτόσημοι.

## 10 Επιλεγόμενα

Είδαμε ότι η συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy έχει λύσεις με πολύ απλό τύπο, $f(x) = ax$, όταν η $f$ είναι συνεχής. Επίσης αν στηριχθούμε στο θεώρημα καλής διάταξης του Zermelo μπορούμε να αποδείξουμε ότι έχει και μη συνεχείς λύσεις των οποίων η γραφική παράσταση είναι σύνολο πυκνό στο επίπεδο. Το θεώρημα της καλής διάταξης είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής το οποίο όταν εισήχθη αντιμετωπίστηκε με δυσπιστία από αρκετούς μαθηματικούς. Έχει αποδειχθεί ότι είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Όπως ακριβώς το Ευκλείδειο Αίτημα είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας. Κάθε γνωστή απόδειξη υπάρξης βάσης εμπλέκει με τον ένα ή τον άλλο τρόπο το αξίωμα της επιλογής και είναι υπαρξιακή και όχι κατασκευαστική. Το θεώρημα του Zermelo εγγυάται μεν την ύπαρξη μίας καλής διάταξης στο $x \in \mathbb{R}^*$ αλλά καμμία τέτοια διάταξη δεν είναι γνωστή. Το αυτό ισχύει και για τις μη συνεχείς λύσεις της συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy. Γνωρίζουμε ότι «ζουν ανάμεσα μας» αλλά δεν τις γνωρίζουμε. Απο την απόδειξη του Hamel οι μαθηματικοί προσπάθησαν να παρακάμψουν το αξίωμα της επιλογής ή εν πάση περιπτώσει να καθορίσουν «πόσο» από το αξίωμα της επιλογής απαιτείται για τήν υπαρξη βάσεων στη γενική περίπτωση.

Andreas R. Blass

Μόλις το 1984 ο Andreas R. Blass έδωσε την οριστική απάντηση: Απαιτείται όλο. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι το θεώρημα για την ύπαρξη βάσεων είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής.
Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι η τεχνική που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος του Hamelπου είναι γνωστή ως μεθοδος του μεταπεπερασμένου (tranfinite) ορισμού ή κατασκευής έχει επιδεχθεί, στη μορφή που παρουσιάσθηκε, κάποιες κριτικές και γιαυτό πιό σύγχρονα βιβλία την θέτουν σε μία ελαφρώς διαφορετική βάση.

### Παραπομπες


1. Blass, Andreas, R. *Existence of bases implies the axiom of choice*, Contemporary Mathematics 31, 1984, 31-33

2. Halmos, Paul, R. *Αφελής Συνολοθεωρία*, Μετάφραση: Γιώργος Κολέτσος, ΕΚΚΡΕΜΕΣ, 2002

3. Hamel, Georg. *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Functionalgleichung:* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Mathematische Annalen 60,1905, 459-462

4. Herrlich Horst. *Axiom of Choice*, Springer, 2006

5. Kamke, E. *Theory of Sets*, Dover, 1950

6. Πούλος, Ανδρέας. *Συναρτησιακές Εξισώσεις*, ΑΙΘΡΑ, 1996

7. Sahoo, P.K.-Riedel, T. *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific, 1998

8. Small, Christopher G. *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007

9. Stoll,Robert. *Set Theory and Logic*, Dover, 1979 (1963)