Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

ΦΥΛΛΟ 4, 27 ΜΑΙΟΥ 2010

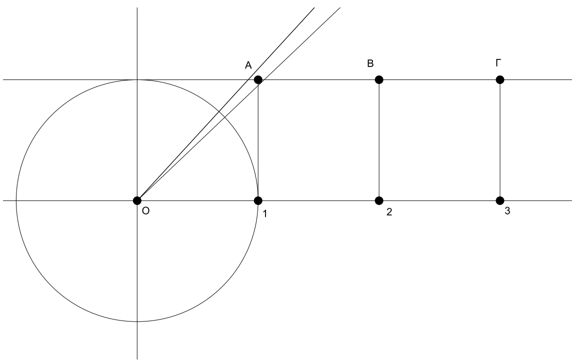
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το $\LaTeX 2_\varepsilon$
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Ρητές Εφαπτομένες

Στράτος Μάκρας, Δρ Μαθηματικών
Ευρωπαϊκό Σχολείο Βρυξέλλες ΙΙΙ

1 Πως «μου προέκυψε» το πρόβλημα.

Παίζοντας με τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σχήμα



αναρωτήθηκα αν, εκτός από την ΟΑ, υπάρχει κάποια άλλη από τις ΟΒ, ΟΓ κ.τ.λ. η οποία τέμνει το κύκλο σε ρητό πολλαπλάσιο του π.

Διατύπωσα τελικά το πρόβλημα ως εξής.

- *Εκτός από την $\varepsilon\phi\frac{2\pi}{8}$ που ισούται με 1, υπάρχει άλλη της μορφής $\varepsilon\phi\frac{2\pi}{\nu}$, $\nu > 8$ ακέραιος η οποία να είναι ρητός αριθμός;*

2 Η απάντηση

Κάθε ακέραιος $\nu > 8$ γράφεται στη μορφή $\nu = 2^m \cdot q$ όπου και q περιττός
Π.χ. $10 = 2\cdot 5$, $11 = 2^0 \cdot 11$, $16 = 2^4 \cdot\cdot$, ...
Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα σε τρία βήματα, αφού πρώτα παρατηρήσουμε τα εξής:
Γνωρίζουμε ότι αν $\varepsilon\phi\alpha \neq \pm 1$, τότε

$$\varepsilon\phi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha}$$

άρα

$$\varepsilon\phi\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \varepsilon\phi 2\alpha \in \mathbb{Q}$$

Επομένως

$$\varepsilon\phi 2\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \varepsilon\phi\alpha \notin \mathbb{Q}$$

2.1 1ο βήμα: $\nu = 2^m$, $m > 3$

Εδώ λοιπόν $q = 1$. Έχουμε:

$$\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = \frac{2\varepsilon\phi\frac{\pi}{8}}{1-\varepsilon\phi^2\frac{\pi}{8}}$$

(θέτουμε $\varepsilon\phi\frac{\pi}{8} = \omega$)

$$1 = \frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

ή

$$\omega^2 + 2\omega - 1 = 0$$

ή

$$\omega = -1 \pm \sqrt{2}$$

που δεν είναι ρητός άρα

$$\varepsilon\phi\frac{\pi}{8} \notin \mathbb{Q}$$

και κατά συνέπεια

$$\varepsilon\phi\frac{2\pi}{16} \notin \mathbb{Q}$$

οπότε επαγωγικά για $m \geqslant 4$

$$\varepsilon\phi\frac{2\pi}{2^m} \notin \mathbb{Q}$$

2.2 2ο βήμα: $\nu = 2^0 \cdot q$ με q περιττό

Δηλαδή $\nu = 2m+1$, $m \geq 2$
(για $m = 1$, έχουμε $\varepsilon\phi\frac{2\pi}{\nu} = \varepsilon\phi\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$)
Έστω ότι και $\varepsilon\phi\frac{2\pi}{\nu} = \frac{1}{k}$ έχουμε διαδοχικά

$$k \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{\nu} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}$$

ή

$$(k+i)\eta\mu\frac{2\pi}{\nu} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}$$

και υψώνοντας στην ν :

$$(k+i)^\nu \cdot (\eta\mu\frac{2\pi}{\nu})^\nu = 1$$

ή

$$(k+i)^\nu = \frac{1}{(\eta\mu\frac{2\pi}{\nu})^\nu}$$

οπότε

$$\mathrm{Im}(k+i)^\nu = 0$$

Έχουμε τώρα

$$(k+i)^\nu = (k+i)^{2m+1} = k^{2m+1} + \binom{2m+1}{1} k^{2m} \cdot 1 - \binom{2m+1}{2} k^{2m-1} + \ldots + \binom{2m+1}{1} k(-1)^m + (-1)^m i$$

Άρα

$$\binom{2m+1}{1} k^{2m} + \ldots + (-1)^m = 0$$

και κατά συνέπεια k διαιρεί το 1 δηλαδή $\varepsilon\phi\frac{2\pi}{\nu} = 1$ με $\nu \geq 5$ περιττό (άτοπο).

2.3 3ο βήμα

Εδώ τελειώνει, σχεδόν, η απόδειξη. Θυμίζουμε ότι $\nu = 2^m \cdot q$, q περιττός. Για $m = 0$, έχουμε απαντήσει στο 2ο βήμα. Για $m \geq 3$ και $q = 1$, έχουμε απαντήσει στο 1ο βήμα. Αν τώρα $m \neq 0$ και $q > 1$, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την αρχική παρατήρηση ($\varepsilon\phi\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \varepsilon\phi 2\alpha \in \mathbb{Q}$) και το βήμα 2, φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\varepsilon\phi\frac{2\pi}{\nu} \notin \mathbb{Q}$$

Π.χ.

$$\varepsilon\phi\frac{2\pi}{2^5 \cdot 7} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ \varepsilon\phi\frac{2\pi}{2^4 \cdot 7} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ ...\varepsilon\phi\frac{2\pi}{7} \in \mathbb{Q}$$

άτοπο (βήμα 2)

Τελικη παρατηρηση

Για την

$$\varepsilon\phi\frac{2\pi}{\nu} = \frac{l}{k}$$

$(l, k) = 1$ ενεργούμε ανάλογα ...

$$\mathrm{Im}(k + il)^{\nu} = 0$$

η οποία καταλήγει στην $k = l = 1$.

Βιβλιογραφια

1. Li Zhou , Lubomir Markov, *Recurrent Proofs of the Irrationality of Certain Trigonometric Values. The American Mathematical Monthly 117 (4): 360-362. (2010).*

2. I. Niven, *Irrational Numbers, Mathematical Association of America. (1956)*

3. J. M. H. Olmsted, *Rational Values of Trigonometric Functions. The American Mathematical Monthly, 52, (9): 507-508 (1945)*