Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

Φυλλο 5, 27 Ιουλιου 2010

Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το $\LaTeX 2_\varepsilon$
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Το θεώρημα των εφαπτόμενων χορδών

Σπύρος Παναγιωτόπουλος
Ροδόλφος Μπόρης

Περίληψη

Η παρακάτω δουλειά έρχεται να αναδείξει μια άγνωστη μέχρι τώρα συνέπεια (τουλάχιστον σ' εμάς) του θεωρήματος Flett. Θα δείξουμε ότι αν το θεώρημα Flett ισχύει τουλάχιστον μια φορά σε κάποιο διάστημα $[a,b]$ τότε ισχύει άπειρες φορές και οι τετμημένες των «ξ» σχηματίζουν μια ακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in (a,b)$ ώστε το $K(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο που αντιστοιχεί σε ακρότατο της f' και επομένως για μια κλάση συναρτήσεων (που περιλαμβάνει όλες τις ρητές συναρτήσεις) να είναι σημείο καμπής της C_f.

Υπενθυμίζουμε το θεώρημα Flett (βλ. [1]).

Πρόταση 1 *Αν f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και $f'(a) = f'(b)$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:*

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

Αποδειξη Θέτω

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a < x \le b \\ f'(a), & x = a \end{cases}$$

Εύκολα δείχνουμε ότι g συνεχής στο $[a,b]$ με όρια και παραγωγίσιμη στο $(a,b]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2}, \text{ για κάθε } x \in (a,b]$$

I) Αν $g(a) = g(b)$ τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για την g στο $[a,b]$ άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$ άρα $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$

II) Έχουμε:

$$g(b) > g(a) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} > f'(a) = f'(b)$$

άρα:

$$g'(b) = \frac{f'(b)(b-a) - (f(b) - f(a))}{(b-a)^2} < 0$$

λόγω της προηγούμενης οπότε

$$g'(b) = \lim_{x \to b-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} < 0 \Rightarrow$$

άρα υπάρχει $x_1 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{g(x_1) - g(b)}{x_1 - b} < 0$$

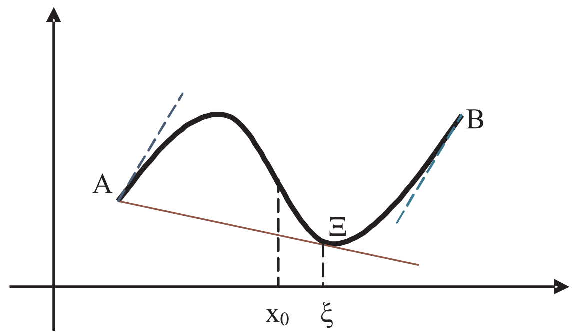
και επομένως $g(x_1) > g(b)$. Επειδή g συνεχής στο $[a, x_1] \subset [a,b]$ και $g(x_1) > g(b) > g(a)$ από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $c \in (a, x_1)$ άρα $c \neq b : g(c) = g(b)$. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την g στο $[c,b] \subset [a,b]$ άρα υπάρχει $\xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

III) Αν $g(b) < g(a)$ η απόδειξη είναι παρόμοια. ■

Παρατηρηση 1

Αξίζει να δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία στο θεώρημα Flett: Αν υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες στην ομαλή και λεία C_f στα A και B τότε από το σημείο A μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη στην C_f σε κάποιο σημείο Ξ ανάμεσα στα A, B



Παρατηρηση 2

Για να αποφύγουμε τις περιπτώσεις όπου το συμπέρασμα του θεωρήματος Flett γίνεται τετριμμένο και για να αποφύγουμε λεπτομέρειες οι οποίες τελικά δεν θα έχουν να κάνουν με την ουσία του θεωρήματος στα επόμενα υποθέτουμε ότι:

- f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,b]$
- $f'(a) = f'(b)$
- η $f'(x)$ είναι συνεχής
- η $f'(x)$ δεν είναι σταθερή σε κανένα υποδιάστημα του $[a,b]$.

Πρόταση 2 *Για κάθε ξ που επαληθεύει την πρόταση 1 υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε:*

- $a < x_0 < \xi < b$
- *το σημείο $K(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο που αντιστοιχεί σε ακρότατο της f'.*

Αποδειξη. Θα δείξουμε ότι η f' παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του $[a,\xi]$. Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής θα έχει μέγιστο και ελάχιστο στο $[a,\xi]$. Επειδή η f' δεν είναι σταθερή στο $[a,\xi]$ αποκλείεται το μέγιστο και το ελάχιστο της να παρουσιάζονται στο a. Άρα κάποιο από αυτά παρουσιάζεται σε κάποιο σημείο του $(a,\xi]$.

- Αν παρουσιάζεται σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του $(a,\xi]$ έχουμε τελειώσει.
- Αν παρουσιάζεται στο ξ τότε με βάση το θεώρημα του Flett

  $$f'(\xi) \overset{\text{Flett}}{=} \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a} \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} f'(x_0), x_0 \in (a,\xi)$$

  δηλαδή πάλι η f έχει ακρότατο στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $(a,\xi]$

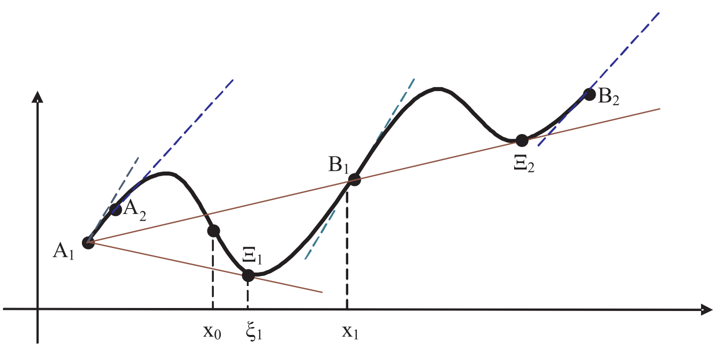
Προταση 3 *Για κάθε ξ που επαληθεύει την Πρόταση 1 και κάθε x_0 που επαληθεύει την Πρόταση υπάρχουν ακολουθίες*

$$a_n \in (a,b), \quad \xi_n \in (a,b) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

τέτοιες ώστε:

- $a_0 = a,$
- $\xi_1 = \xi$
- $f'(\xi_{n+1}) = \frac{f(\xi_{n+1})-f(a_n)}{\xi_{n+1}-a_n}$
- *Η ξ_n έχει άπειρους όρους.*
- $\xi_n \to x_0$

Αποδειξη Είναι δυνατόν να υπάρχουν πολλά ξ μετά από κάποιο x_0 που υποχρεωτικά έχει η f. (Μια τέτοια περίπτωση δείχνει το επόμενο σχήμα)



Έστω ξ_1 ένα από αυτά και $a < x_0 < \xi_1 < b$. Στο $[a,\xi_1]$ η f' παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 (πιθανώς και σε άλλα σημεία) επομένως θα υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες (βλέπε [2]) σε ένα υποσύνολο του $[a,\xi_1]$ της μορφής $[a_1,b_1]$ με $x_0 \in (a_1,b_1)$ άρα θα ισχύει το θεώρημα του Flett που σημαίνει ότι από το a_1 μπορώ να φέρω εφαπτομένη στην f έστω στο ξ_2 με $a_1 < x_0 < \xi_2 < b_1$ κοκ. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ αφού εκ κατασκευής $a_n \le a_{n+1}$, $b_n > b_{n+1}$ της οποίας όλα τα διαστήματα περιέχουν τα ξ_n και το x_0. Προφανώς λοιπόν τα ξ_n είναι διαφορετικά μεταξύ τους άρα άπειρα. Αφού τα διαστήματα $[a_n,b_n]$ είναι κιβωτισμένα αν αποδείξουμε ότι το πλάτος τους τείνει στο 0 που θα το κάνουμε στην πρόταση 7 η άπειρη τομή τους $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ είναι μονοσύνολο που δεν είναι άλλο από το $\{x_0\}$ αφού το x_0 ανήκει σε όλα τα $[a_n,b_n]$ και επειδή και το ξn ανήκει σε όλα τα $[a_n,b_n]$ για κάθε n στο $\mathbb{N}^*$ συμπεραίνουμε ότι $\xi_n \to x_0$. ■

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι το θεώρημα του Flett είναι μια ικανή συνθήκη ώστε να εξασφαλίσει την ορθότητα της πρότασης
Αν σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες στα άκρα a, b τότε από το ένα άκρο $(a, f(a))$ μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη προς την C_f σε κάποιο άλλο σημείο της $(\xi, f(\xi))$ με $a < \xi < b$ Αν αποφύγουμε την λέξη άκρα μπορούμε να ερευνήσουμε το γενικότερο πρόβλημα που αναφέρεται στην πρόταση:

Προταση 4 *Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε από σημείο της C_f μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη προς την C_f σε κάποιο άλλο σημείο της είναι να υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες της C_f*

Αποδειξη *Ευθύ.* Αν υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες της C_f στα a, b τότε το θεώρημα Flett εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

οπότε η εξίσωση εφαπτομένης $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ επαληθεύεται από το $(a, f(a))$.
Αντίστροφο. Έστω εφαπτομένη της C_f με εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ η οποία διέρχεται από κάποιο σημείο $(a, f(a))$ της C_f τότε θα ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής όμως θα ισχύει

$$f'(t) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

με t ανάμεσα στα a , ξ. Συνεπώς

$$f'(\xi) = f'(t) \ , \ \xi \neq t$$

που αποδεικνύει και το αντίστροφο. ■

Προταση 5 *Από το A της πρότασης 4 φέρνουμε εφαπτομένη στην C_f' Έστω B το σημείο επαφής. Από το B φέρνουμε εφαπτομένη στην C_f έστω Γ το σημείο επαφής κ.ο.κ.*
Αν

- $\xi_0 = a$
- *τα ξ_n να ορίζονται από την σχέση* $f(\xi_{n+1}) = \frac{f(\xi_{n+1})-f(\xi_n)}{\xi_{n+1}-\xi_n}$ *(που είναι η αλγεβρική απόδοση της προηγούμενης γεωμετρικής διαδικασίας)*

Τότε
- $\xi_n \to x_0$ *όπου το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f'.*

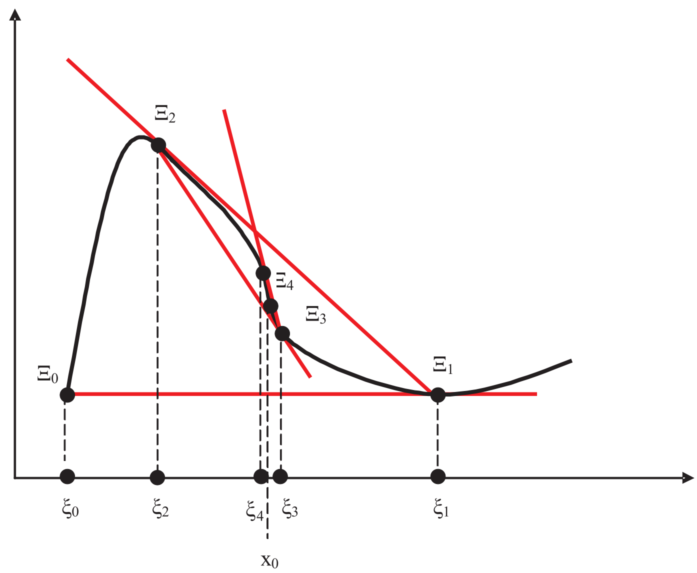
Αποδειξη Στην πρόταση 3 η απόδειξη είναι υπαρξιακή. Μπορούμε αλλάζοντας λίγο τον αναδρομικό τύπο να δώσουμε μια κατασκευαστική απόδειξη.

Α) Μπορούμε να μελετήσουμε την περίπτωση μοναδικού ακρότατου της f' αν αυτά είναι πεπερασμένου πλήθους διότι τα ξ_n θα δείξουμε ότι συγκλίνουν προς κάποιο x_0 άρα θα βρίσκονται σε οσοδήποτε θέλουμε μικρού πλάτους περιοχή του x_0 που θα περιέχει μόνον το x_0.

Θεωρούμε λοιπόν $a = \xi_0$ και ότι από το σημείο $\Xi_0(\xi_0, f(\xi_0))$ μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη προς το $\Xi_1(\xi_1, f(\xi_1))$ με $\xi_0 < x_0 < \xi_1 < b$ όπως αποδείξαμε στην πρόταση 3. Από το Ξ_1 θέλουμε πάλι να φέρουμε εφαπτομένη προς την C_f Αυτό είναι δυνατόν διότι από το βήμα 1 έχουμε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi_1) - f(\xi_0)}{\xi_1 - \xi_0} \overset{\Theta MT}{=} f'(q)$$

με $q < x_0 < \xi_1$ Χρησιμοποιώντας ίδια επιχειρηματολογία με αυτήν της πρότασης δείχνουμε τελικά ότι $\xi_0 < \xi_2 < x_0 < \xi_1 < b$ ολοκληρώσαμε λοιπόν και το 2ο βήμα της διαδικασίας κοκ που σχηματικά αποδίδεται με το επόμενο:



Η πρόταση μας εξασφαλίζει ότι η ακολουθία (ξ_n) χωρίζεται σε δυο υπακολουθίες αρτίων , περιττών δεικτών, αύξουσα και άνω φραγμένη από το x_0 η μια ενώ η άλλη φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το x_0 και τελικά με την βοήθεια του επόμενου ισχυρισμού συγκλίνουσα προς το x_0.

Ισχυρισμος $\xi_n \to x_0$

Αποδειξη του Ισχυρισμου Από τον τρόπο κατασκευής των ξ έχουμε

$$a = \xi_0 < \xi_2 < \ldots < x_0 < \ldots < \xi_3 < \xi_1 < b$$

Αρα

$$\xi_{2n} \to A = (\sup \xi_{2n}), \;\; \xi_{2n+1} \to B = (\inf \xi_{2n+1})$$

Αν $A \neq B$ τότε $\xi_{2n} < A < B < \xi_{2n+1}$. Όμως

$$\frac{f(\xi_{2n+1}) - f(\xi_{2n})}{\xi_{2n+1} - \xi_{2n}} = f'(\xi_{2n+1})$$

παίρνοντας όρια όταν $n \to \infty$ έχουμε θεωρώντας την f συνεχή όπως έχουμε πει στην αρχή ότι:

$$\frac{f(B) - f(A)}{B - A} = f'(B)$$

Από το Θεώτημα Μέσης Τιμής όμως συμπεραίνουμε ότι σε ένα υποσύνολο του $(A, B]$ θα ισχύουν πάλι οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Flett οπότε θα υπάρχει ξ_{2n+2} τέτοιο ώστε

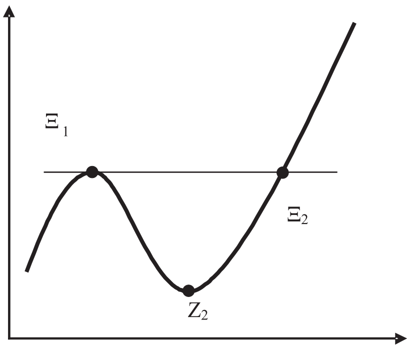
$$\frac{f(\xi_{2n+2}) - f(\xi_{2n+1})}{\xi_{2n+2} - \xi_{2n+1}} = f'(\xi_{2n+2})$$

με $A < \xi_{2n+2}$ που αναιρεί το ρόλο του A ως sup και οδηγεί στην επιθυμητή κατάσταση $A = B$ οπότε τελικά $\xi_n \to x_0$ που ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Β) Αν τα ακρότατα της f' ήταν απείρου πλήθους και σχημάτιζαν μια ακολουθία (x_n) τότε πάλι λόγω της πρότασης 3 θα υπήρχε ένα τουλάχιστον σε κάθε διάστημα που ορίζουν τα ξ_n, ξ_{n+1} και επειδή ξ_n συγκλίνουσα θα συνέκλιναν πάλι προς κάποιο x που θα ήταν θέση ακρότατου της f'. ■

Παρατηρηση 3

Αν $f'(\xi_1) = 0$ τότε πρέπει να υπάρχει και κάποιο άλλο $b > \xi 2$ τέτοιο ώστε $f'(b) = 0$ αλλιώς η ακολουθία μπορεί να εκφυλιζόταν σε μια παλινδρομική κίνηση μεταξύ ξ_1, $\xi 2$ όπως στο επόμενο σχήμα



Αλλά όπως είπαμε κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ισχύει γιατί η f' δεν έχει ρίζα και όχι μια τουλάχιστον ως όφειλε μετά το ξ_2. Αν όμως αντί του Ξ_2 παίρναμε το Z_2 τότε θα ίσχυαν όλα τα προηγούμενα Ακόμη για να έχει νόημα ο τύπος του ισχυρισμού στην πρόταση πρέπει $\xi_{n+1} \neq \xi_n$ πράγμα που εξασφαλίζει η πρόταση 4

Παρατηρηση 4

Στην περίπτωση κατά την οποία η γραφική παράσταση της f περιέχει ευθύγραμμο τμήμα MN με $M(m, f(m))$, $N(n, f(n))$, τότε η παράγωγος της f είναι σταθερή στο $[m, n]$κατά συνέπεια το οποιοδήποτε σημείο Ξ του MN είναι σημείο τοπικού ακρότατου για την f και η MN είναι και εφαπτομένη της C_f αλλά και τμήμα της C_f . Άρα από κάθε σημείο του MN μπορώ να φέρω εφαπτομένη προς την C_f , τον εαυτό του (τετριμμένη περίπτωση)

Παρατηρηση 5

Στην περίπτωση κατά την οποία τα ακρότατα της f' είναι πεπερασμένου πλήθους στο $[a, b]$ τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε την μοναδικότητα των ξ_n και του x_0. Εκλέγουμε $\xi_0 = a$ και από τα υποψήφια ξ_1 εκείνο για το οποίο η $|\xi_1 - a| = min$, για ξ_2 εκείνο για το οποίο η $|\xi_2 - \xi_1| = min$ κοκ. Η μοναδικότητα των ξ προκύπτει από το γεγονός ότι δεν μπορεί να υπάρχουν δύο σημεία επαφής Ξ με την ίδια τετμημένη αφού η f είναι συνάρτηση και αφού $a < x_0 < \xi_1$ ουσιαστικά επιλέγουμε για ΣΚ το ¨πλησιέστερο' προς το $A(a, f(a))$ (MIN πάντα υπάρχει σε πεπερασμένο σύνολο αριθμών)

Παραδειγμα 1

Εδώ μπορούμε να δώσουμε και ένα παράδειγμα με την βοήθεια του προγράμματος Mathematica και αριθμητικές μεθόδους Εστω

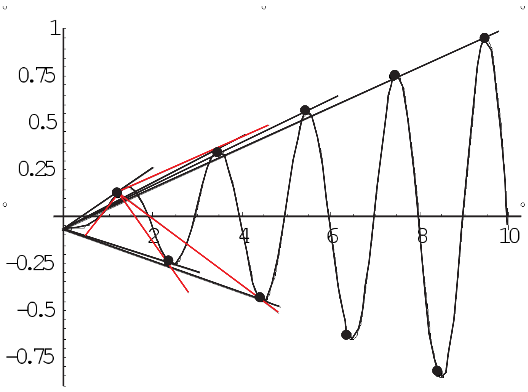
$$f(x) = -\frac{\pi x \sin(\pi x) + 2\cos(\pi x)}{\pi^3}$$

οπότε

$$f'(x) = \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^2}$$

και

$$f''(x) = x \sin(\pi x)$$



Αν $a = 0$ τότε $f'(a) = 0$ και $b = 9.489326$ τότε $f'(b) = 0$. Επειδή $f''(x) = x\sin(\pi x)$ εύκολα βρίσκουμε τα x_0 που περιέχονται στο (a,b) και είναι τα

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Για $\xi_0 = a$ διάφορα υποψήφια ξ_1 είναι τα

$$1.30048,\ 2.4265,\ 3.43521,\ 4.45763,\ 5.46064,\ ...9.47789$$

που όλα τους βρίσκονται στο $[a,b]$ υπάρχει δηλαδή ένα σύνολο 9 ευθειών από τις οποίες θα εκλέξουμε μια. Επιλέγουμε $\xi_1 = 1.30048$ ώστε

$$|\xi_1 - a| = \min|\xi_k - a|\,,\ k = 1,2,...,9$$

Πάλι με δεδομένο το ξ_1 επιλέγουμε το ξ_2 μέσα από ένα σύνολο ευθειών. Επιλέγουμε $\xi_2 = 0.832974$ ώστε

$$|\xi_1 - \xi_2| = \min|\xi_k - \xi_1|, k = 1,2,...,m$$

$\xi_2 = 0.832974$, $\xi_3 = 1.0782$, $\xi_4 = 0.95976$, $\xi_5 = 1.01982$, $\xi_6 = 0.990019$, $\xi_7 = 1.00497$, $\xi_8 = 0.997509$ κοκ. Παρατηρούμε ότι πράγματι οι υπακολουθίες αρτίων περιττών δεικτών συμπεριφέρονται σύμφωνα με τα προλεγόμενα και πλησιάζουν συνεχώς το 1 = τετμημένη ΣΚ.
Η εύρεση των πιθανών ξ_1 έγινε μέσω της εντολής `FindRoot` η οποία χρησιμοποιεί την μέθοδο Newton Raphson με αρχική τιμή τα x_0 των ΣΚ (1,2,...,9) με τον ίδιο τρόπο βρέθηκαν τα ξ_2 , ξ_3,...με αρχική τιμή το 1.

Παραδειγμα 2

Ένα ακόμη παραδειγμα

$$f(x) = x^3 - 6x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

Ας διαλέξουμε $a = \xi_0 = -1$ τότε το b θα προκύψει από την

$$f'(b) = f'(a) \Leftrightarrow 3b^2 - 12b = 15$$

που δίνει $b = -1 = a$ απορρίπτεται και $b = 5$ δεκτή. Έχουμε

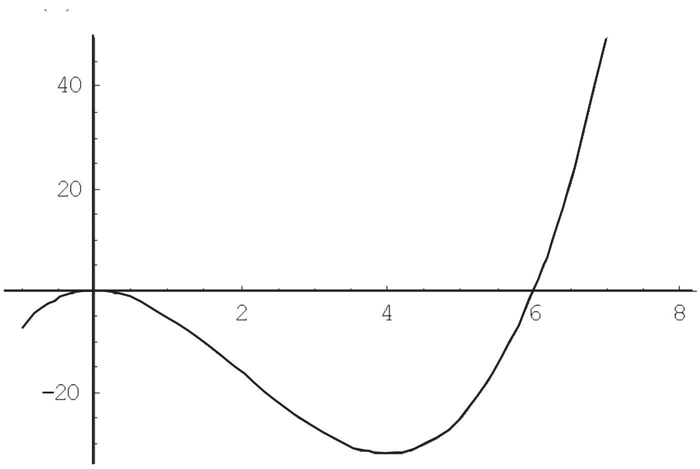
$$f'(\xi_{n+1}) = \frac{f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n)}{\xi_{n+1} - \xi_n}\ ,\ \xi_0 = -1 \Leftrightarrow ...$$

$$\Leftrightarrow (\xi_{n+1} - \xi_n)(2\xi_{n+1} + \xi_n - 6) = 0$$

Επειδή πρέπει

$$\xi_{n+1} - \xi_n \neq 0 \Rightarrow \xi_{n+1} = -\frac{1}{2}\xi_n + 3 \Rightarrow \xi_n = 2 - 3(-\frac{1}{2})^n, n = 0, 1, ...$$

Οπότε διαπιστώνουμε εύκολα ότι συγκλίνει στο 2 και γενικά οι όροι της ανήκουν στο $[-1,5]$ και ακόμη ότι $\xi_{2n}\uparrow, \xi_{2n+1}\downarrow$ με 2 μοναδική τετμημένη ΣΚ



Παραπομπες

1. Flett, Thomas Muirhead. *A mean value theorem*, Math. Gazette, 42 (1958), 38-39

2. Μπορης, Ροδόλφος. *Γεωμετρικές Συνθήκες Κυρτότητας*, Εκθέτης, 3, 2010