

Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
ΦΥΛΛΟ 7, 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010

Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το L^AT_EX 2_ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σύμυνης
mavrogiannis@gmail.com

Hardy 31¹

Μια παρατήρηση στην άσκηση 31 σελ. 37 της δέκατης έκδοσης του βιβλίου του G.H. Hardy: *A Course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press, 1975)

Μανώλης Ζαμπετάκης
Φοιτητής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Η εκφώνηση της άσκησης:

31. If $(a-b^3)b > 0$, then

$$\sqrt[3]{a + \frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}} + \sqrt[3]{a - \frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$
 is rational. [Each of the numbers under a cube root is of the form $\{\alpha + \beta\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\}^3$, where α and β are rational.]

Θεωρώ τους αριθμούς:

$$\varepsilon = \sqrt[3]{a + \frac{9b^3+a}{2b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

$$\zeta = \sqrt[3]{a - \frac{9b^3+a}{2b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

Πρόταση 1 Αν ο αριθμός $\varepsilon + \zeta$ είναι ρητός τότε και ο αριθμός τότε και ο αριθμός $\varepsilon\zeta$ είναι ρητός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω λοιπόν ότι:

$$\varepsilon + \zeta \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

Τότε

$$(\varepsilon + \zeta)^3 \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

επίσης από την αρχική μορφή των ε, ζ έχω ότι

$$\varepsilon^3 + \zeta^3 = a + \frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}} + a - \frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}} = 2a$$

άρα

$$\varepsilon^3 + \zeta^3 \in \mathbb{Q} \quad (3)$$

Από την (2) με την βοήθεια της (3) βρίσκουμε $3\varepsilon^2\zeta + 3\varepsilon\zeta^2 \in \mathbb{Q}$ και $\varepsilon\zeta (\varepsilon + \zeta) \in \mathbb{Q}$. Άρα: $\varepsilon\zeta \in \mathbb{Q}$. ■

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου είναι ότι

$$\bullet \varepsilon\zeta \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \varepsilon + \zeta \notin \mathbb{Q} \quad (*)$$

¹Τα Χριστούγεννα του 2008 ο Μανώλης Ζαμπετάκης, πρώην μαθητής μου στην Ευαγγελική, και τότε πρωτοετής φοιτητής, μου επεσήμανε ότι η συγκεκριμένη άσκηση μάλλον έχει πρόβλημα. Η επισήμανση φάνοταν σωστή αλλά από την άλλη μεριά το βιβλίο αυτό δεν είναι τυχαίο: Κυκλοφορεί από το 1908 και θεωρείται κλασικό στο είδος του. Έχει μορφώσει χιλιάδες σπουδαστές ανά τον κόσμο και έχει υποστεί αλλεπάλληλες εκδόσεις με τελευταία την επετειακή έκδοση (Centenary) εκατονταετηρίδος το 2008. Η πιθανότητα παροράματος θεωρείται πολύ μικρή. Εντατικός έλεγχος στο διαδικτυο δεν έδειξε ότι υπήρχε καταγεγραμμένο κάτι για την άσκηση 31. Το θέμα, μαζί με την αιτιολόγηση του λάθους ετέθη τον Οκτώβριο του 2009 στον δικτυακό τόπο mathematica και από την συζήτηση <http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&p=18295#p18295> προέκυψε άλλη μία επιβεβαίωση της επισήμανσης του Μανώλη. (ΣΤΕ)

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν a, b για τα οποία $\varepsilon\zeta \notin \mathbb{Q}$. Έχουμε:

$$\varepsilon\zeta = \sqrt[3]{\left(a + \frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right)\left(a - \frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right)}$$

Προφανώς για να είναι ο $\varepsilon\zeta$ ρητός θα πρέπει να είναι ο $(\varepsilon\zeta)^3$ κύβος ρητού. Είναι:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\zeta)^3 &= \left(a + \frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right)\left(a - \frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right) = \\ &= a^2 - \left(\frac{9b^3+a}{3b}\right)^2 \frac{a-b^3}{3b} = a^2 - \frac{(81b^6 + 18b^3a + a^2)(a-b^3)}{27b^3} = \\ &= \frac{81b^9 + 10b^3a^2 - 63b^6a - a^3}{27b^3} \end{aligned}$$

Προφανώς αφού ο $(\varepsilon\zeta)^3$ είναι κύβος ρητού και ο $(\varepsilon\zeta)^3 (27b^3)$ είναι κύβος ρητού. Άρα θα πρέπει και ο:

$$81b^9 + 10b^3a^2 - 63b^6a - a^3 \quad (4)$$

να είναι κύβος ρητού. Ισχύει το ακόλουθο:

Λήμμα 1 Αν ένας ακέραιος αριθμός γράφεται σαν κύβος ρητού, τότε αυτός ο ρητός είναι ακέραιος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι ο m είναι ένας ακέραιος αριθμός και έστω ότι:

$$m = \frac{p^3}{q^3}, \quad p, q \in \mathbb{Z}^*, \quad (p, q) = 1$$

τότε

$$mq^3 = p^3$$

και αφού τα p, q δεν έχουν κοινούς διαιρέτες

$$m = kp^3, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

οπότε

$$kp^3q^3 = p^3$$

δηλαδή $kq^3 = 1$ και αφού οι k, q^3 είναι ακέραιοι θα είναι $k = \pm 1, q = \pm 1$ οπότε $m = (\pm p)^3$. ■

Αν τώρα υποθεθεί ότι για κάποιο ζεύγος a, b είναι $\varepsilon + \zeta \in \mathbb{Q}$ θα πρέπει και ο αριθμός

$$81b^9 + 10b^3a^2 - 63b^6a - a^3$$

να είναι κύβος ακεραίου. Αλλά $a = 9$ και $b = 2$ είναι

$$81b^9 + 10b^3a^2 - 63b^6a - a^3 = 10935$$

και ο αριθμός 10935 δεν είναι τέλειος κύβος.

Από τα προηγούμενα συνάγουμε ότι η άσκηση είναι λάθος.