Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

Φυλλο 9, 16 Ιανουαριου 2011

Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2ε
Επιμέλεια:

Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

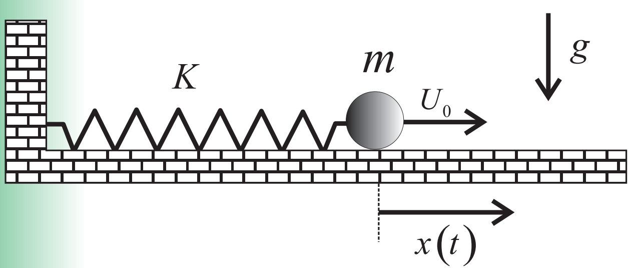
Οι συναρτήσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

Ροδόλφος Μπόρης

Περίληψη

Για να περιγράψουμε την χρονική εξέλιξη ενός φυσικού φαινόμενου με μαθηματική γλώσσα απαιτούνται κάποιες συναρτήσεις. Τι γίνεται όμως αν αυτές δεν είναι «γνωστές» στην μαθηματική βιβλιογραφία; Στα επόμενα θα αντιμετωπίσουμε λοιπόν το παρακάτω πρόβλημα υπενθυμίζοντας ότι οι διαφορικές εξισώσεις είναι πηγή νέων συναρτήσεων ακόμη και στο επίπεδο της Γ′ Λυκείου κάνοντας μαθηματικά μέσα από την φυσική!

Ένα σώμα μάζας m συνδέεται με ελατήριο σταθεράς K. Στο σώμα δίνεται αρχική ταχύτητα U_0. Το δάπεδο θεωρείται λείο.



Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες που έχει η συνάρτηση $x(t)$, της οριζόντιας μετατόπισης x σε συνάρτηση με τον χρόνο t. Στην μαθηματική μας διερεύνηση, ΔΕΝ θεωρούμε γνωστές τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Έτσι με την βοήθεια και της φυσικής θα προσπαθήσουμε να τις ξαναανακαλύψουμε!! Είναι μια θαυμάσια ευκαιρία για τους μαθητές της Γ′ Λυκείου να διαπιστώσουν την χρησιμότητα του διαφορικού λογισμού σε φυσικά προβλήματα, χωρίς να δεχτούν παθητικά την έκφραση «αποδεικνύεται ότι...». Ακόμη το μαθηματικό περιεχόμενο, που βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στην ύλη τους, είναι πλούσιο σε ιδέες που μπορεί να φανούν χρήσιμες και στις εξετάσεις. Εντυπωσιακό είναι ακόμη το γεγονός ότι ΟΛΕΣ οι ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορεί να προκύψουν από το προηγούμενο πρόβλημα. Έτσι:

1. Εφαρμόστε τον νόμο του Νεύτωνα για να δείξετε ότι $x''(t) = -\omega^2 x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ όπου ονομάσαμε με ω το πηλίκο $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$ που έχει διαστάσεις sec^{-1}

2. Για να φέρετε την εξίσωση σας σε πιο απλή μορφή (μας χαλάει λίγο το ω^2) κάντε την αλλαγή μεταβλητής $\tau = \omega t$. Αυτό μπορείτε να το πετύχετε, μετρώντας τον χρόνο, με ένα ειδικό χρονόμετρο που θα αλλάζει την κλίμακα μέτρησης του χρόνου, γιατί θα τρέχει ή θα πηγαίνει πιο αργά, ω φορές από ένα «κανονικό» χρονόμετρο. Το ουσιαστικό όμως κέρδος είναι, ότι το τ είναι αδιάστατο μέγεθος και έτσι μπορεί να εμφανιστεί σε οποιαδήποτε θέση μέσα σε κάθε μαθηματική συνάρτηση π.χ στον εκθέτη. Δείξτε τότε ότι η εξίσωση γράφεται : $z''(\tau) = -z(\tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ όπου θέσαμε $z(\tau) = x(\tau/\omega)$. (Μια αισθητική παρέμβαση μερικές φορές είναι ακριβώς αυτό που χρειάζεται για να υπάρξει συνέχεια σε ένα κατ′ εξοχήν λογικό πρόβλημα.)

3. Μια σημαντική ερώτηση στην φυσική, είναι αν η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται σε αυτήν την κίνηση. Για να το αποδείξετε ξεκινήστε από την $z''(\tau) = -z(\tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ και δείξτε ότι η συνάρτηση $(z(\tau))^2 + (z'(\tau))^2$ είναι σταθερή, έστω ίση με C^2. Μετά μπορείτε να συμπεράνετε ότι και η ολική μηχανική ενέργεια $\frac{1}{2}K \cdot x^2(t) + \frac{1}{2}m \cdot \upsilon^2(t)$ είναι και αυτή σταθερή.

4. Για να ολοκληρωθεί η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου απαιτούνται δυο σταθερές, οι οποίες στην φυσική θα εκφράζουν την αρχική κατάστασή του, τότε δηλαδή που πατήσαμε το χρονόμετρο. Δίνονται λοιπόν οι τιμές A και B όπου $z(0) = B$, $z'(0) = A$ για $\tau = 0$. Δείξτε ότι B είναι η αρχική μετατόπιση και $A\omega$ είναι η αρχική ταχύτητα μετρώντας τις μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας. Δεν βλάπτει την γενικότητα να θεωρήσετε ότι $B \geq 0, A \geq 0$, έτσι θεωρούμε σαν θετική φορά αυτήν, της αρχικής ταχύτητας.

5. Αφού δείξετε ότι $A^2 + B^2 = C^2$, δείξτε ακόμη ότι, όταν $C = 0$, τότε $z(\tau) = 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$. Το γεγονός αυτό στην φυσική σημαίνει ότι: αν δεν δοθεί αρχική ενέργεια στο σώμα, τότε αυτό θα παραμείνει ακίνητο.

6. Έστω τώρα ότι ισχύουν $z''(\tau) = -z(\tau)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $z(0) = B$, $z'(0) = A$ και ακόμη $y''(\tau) = -y(\tau)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $y(0) = B$, $y'(0) = A$. Δείξτε ότι $z(\tau) = y(\tau)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$. Για να το πετύχετε δείξτε ότι η συνάρτηση $(z'(\tau) - y'(\tau))^2 + (z(\tau) - y(\tau))^2$ είναι σταθερή και ίση με το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια μόνο συνάρτηση που επαληθεύει το : $z''(\tau) =$

$-z(\tau)\ \forall\tau\in\mathbb{R}$, $z(0)=B$, $z'(0)=A$. Στην φυσική σημαίνει ότι το πρόβλημα έχει τεθεί καλά, είναι αιτιοκρατικό και δεν παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά, δηλαδή από μια δεδομένη αρχική κατάσταση παράγεται ένα προβλέψιμο και μοναδικό αποτέλεσμα.

7. Μια που απλοποιήσαμε την αρχική εξίσωση, εισάγοντας την αδιάστατη μεταβλητή τ, ας απλοποιήσουμε και τις αρχικές συνθήκες επιλέγοντας τους πιο απλούς αριθμούς B και A που, βέβαια, είναι το 0 και το 1. Δεν επιλέξαμε το 0 και το 0 λόγω του ερωτήματος 5. Έτσι ας ονομάσουμε με f την μοναδική (λόγω του 6) συνάρτηση που ικανοποιεί το πρόβλημα: $f''(\tau)=-f(\tau)\ \forall\tau\in\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$

   Να δείξετε ότι $z(\tau)=Af(\tau)+Bf'(\tau)$. Θα στηριχτείτε στην μοναδικότητα που σας εξασφάλισε το ερώτημα 6. Ασχοληθείτε με το Β′ μέλος.

8. Στο προηγούμενο ερώτημα πετύχαμε κάτι σημαντικό! Εκφράσαμε την συνάρτηση που περιγράφει την χρονική εξέλιξη του φαινομένου για όλες τις αρχικές συνθήκες, σαν γραμμικό συνδυασμό δυο μόνον συναρτήσεων, των f και f'. Αξίζει λοιπόν τον κόπο να ανακαλύψουμε! τις ιδιότητες που παρουσιάζει η f και η παράγωγός της. Αρχικά μπορείτε να δείξετε ότι $f(a+b)=f(a)f'(b)+f(b)f'(a)$ και $f'(a+b)=f'(a)f'(b)-f(a)f(b)$. Για την απόδειξη της πρώτης σχέσης θεωρείστε το $f(a+b)$ ως συνάρτηση του a, ομοίως και το δεύτερο μέλος και αποδείξτε ότι ικανοποιούν το ίδιο πρόβλημα με αυτό του ερωτήματος 6. Η απόδειξη της δεύτερης σχέσης χρησιμοποιεί την πρώτη. Το $f(a+b)$ εκφράζει μια «χρονική μετατόπιση» ή με πιο φυσικό τρόπο, αλλαγή θέσης ισορροπίας ή ακόμη το 0 της κλίμακας μέτρησης των διαστημάτων να είναι διαφορετικό από την θέση ισορροπίας.

9. Δείξτε ότι $(f(\tau))^2+(f'(\tau))^2=1$, $f'(\tau)\le 1=f'(0)\ \forall\tau\in\mathbb{R}$. Η παράσταση με τα τέλεια τετράγωνα είναι αντίστοιχη του ερωτήματος 3 και εκφράζει μια «ενεργειακή» άποψη του φαινομένου.

10. Για να συμπεράνετε ότι υπάρχει $\xi\neq 0$, $f(\xi)=0$, δεχθείτε ότι $f\neq 0$ στο $(0,+\infty)$. Αφού η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$, έστω θετικό, δείξτε ότι είναι κοίλη. Συζητώντας για την εφαπτομένη της δείξτε ότι $f'(\tau)>0$ στο $(0,+\infty)$. Λάβετε υπ′ όψει σας ότι η f' έχει μέγιστο στο 0 και ότι είναι κοίλη και με τρόπο αντίστοιχο με τον προηγούμενο οδηγηθείτε σε άτοπο. Μπορείτε πια να θεωρήσετε το ξ σαν την μικρότερη θετική ρίζα της $f(\tau)$. Η παραπάνω αναζήτηση είναι μάλλον μαθηματική, παρά φυσική και αφορούσε λεπτομέρειες της σχεδίασης της γραφικής παράστασης της C_f.

11. Τώρα δείξτε ότι : $f(\tau+2\xi)=f(\tau)$ χρησιμοποιείστε το 8 και το γεγονός ότι $f^2(\xi)=1$. Στη συνέχεια δείξτε ότι η $f(\tau)$ είναι περιοδική, με περίοδο το 2ξ που είναι μια άμεση και σπουδαία παρατήρηση του φυσικού φαινόμενου. Έτσι η απάντηση στην ερώτηση «πότε θα σταματήσει να κινείται το σώμα;» είναι «ποτέ». Το συμπέρασμα είναι εύλογο αν αναλογιστείτε ότι δεν υπάρχουν τριβές και έτσι το αρχικό ποσό ενέργειας που δόθηκε στο σώμα δεν χάνεται στο περιβάλλον. Έπρεπε όμως να προηγηθεί όλη η προηγούμενη μαθηματική δουλειά για να αποδειχθεί η περιοδικότητα της f.

12. Δείξτε ότι $f'(\xi/2)=0$, f κοίλη στο $[0,\xi]$ και μελετήστε την μονοτονία και το πρόσημό της στο ίδιο διάστημα. Βρείτε το σύνολο τιμών της. Πρέπει να έχετε καταλάβει πόσο σπουδαίο ρόλο παίζει το ξ στη μελέτη της συνάρτησης.

13. Δείξτε ότι η $f(\tau)+f(-\tau)$ είναι σταθερή με την βοήθεια του 5. Συμπεράνατε ότι η f είναι περιττή και η παράγωγός της άρτια. Αυτές είναι ιδιότητες συμμετρίας που μπορεί να παρατηρήσει κάποιος εκτελώντας το φυσικό πείραμα.

14. Δείξτε ότι : $\lim_{\tau\to 0}\frac{f(\tau)}{\tau}=1$, $\lim_{\tau\to+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau}=0$ Τα ερωτήματα αυτά δείχνουν την συμπεριφορά της συνάρτησης στην «αρχή» και το «τέλος» του χρόνου.

15. Για $\tau>0$ η f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της που έχει εξίσωση $y=\tau$ και αντίστροφα για $\tau<0$. Τα συμπεράσματα αυτά προκύπτουν από την κυρτότητα εύκολα και αποτελούν χρήσιμες ανισότητες μέσω των οποίων μπορούμε να «προσεγγίσουμε» την f κοντά στο 0. Κάνετε και μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

16. Τα δυο επόμενα ερωτήματα αφορούν γεωμετρικές αντιστοιχίες που μπορείτε να κάνετε με αυτές τις συναρτήσεις. Μια σημαντική παρατήρηση λοιπόν, που προκύπτει από το 9, είναι ότι μπορείτε να θεωρήσετε τις f και f ως σημεία ενός κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1. Πιο αναλυτικά αν θέσετε $X=f(\tau)$, $Y=f'(\tau)$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (X,Y) είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Άρα μπορείτε να αντιστοιχήσετε το (X,Y) σε ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα μήκους 1 με μόνη παράμετρο την προσανατολισμένη γωνία περιστροφής φ, αυτή που οι φυσικοί ονομάζουν φάση. Αφού το φ μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο και ορίζει μονοσήμαντα τα X,Y τίποτα δεν μας εμποδίζει να επιλέξουμε $\varphi=\tau$.

17. Τέλος ένα ακόμη σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από το 7 είναι ότι, αφού το $z(\tau)$ γράφτηκε

σαν γραμμικός συνδυασμός των f και f' μήπως μπορεί να θεωρήσουμε τα f και f' σαν «μοναδιαία διανύσματα» ενός διδιάστατου χώρου και τα A, B σαν συντεταγμένες του τυχαίου ανύσματος z · Η απάντηση είναι καταφατική και πολύ χρήσιμη σε αυτό που οι φυσικοί ονομάζουν σύνθεση ταλαντώσεων. Η απόδειξη όμως είναι δυστυχώς εκτός λυκειακής ύλης, παρά το γεγονός ότι είναι αρκετά εύκολη. Έτσι θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι «διάνυσμα δεν είναι μόνον το βελάκι» αλλά κάτι πολύ γενικότερο και σαφώς πιο όμορφο!

18. Μετά από όλα αυτά αξίζει οι f και f να έχουν ιδιαίτερο όνομα. Τις ονομάζουμε λοιπόν αντίστοιχα ημίτονο και συνημίτονο και τις συμβολίζουμε με : $f(\tau) = \eta\mu\tau$, $f'(\tau) = \sigma\upsilon\nu\tau$, ενώ στην διεθνή βιβλιογραφία σύμβολα είναι $f(\tau) = \sin\tau$, $f'(\tau) = \cos\tau$

ΣΧΟΛΙΑ

- Αν στο ερώτημα 16 ταυτίσετε το μέτρο της γωνίας παραμέτρου φ με το τ, τότε μπορείτε να αναγνωρίσετε την τιμή του ξ, συγκρίνοντας τις περιόδους. Θα πρέπει $2\xi = 2\pi$ άρα $\xi = \pi$!!. Βέβαια το π μπορεί να οριστεί και διαφορετικά πιο αναλυτικά, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση της f σε κατάλληλο διάστημα και την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, αλλά αυτός ο τρόπος μάλλον δεν διδάσκεται στο λύκειο όπου θεωρούμε το π σαν το λόγο της περιφέρειας προς την διάμετρο. Στο τέλος όμως δίνεται μια απόδειξη για την μέθοδο αυτή χρησιμοποιώντας μόνον λυκειακή ύλη.

- Ο τρόπος που αναπτύξαμε το θέμα ταιριάζει μάλλον με την άποψη ενός μαθηματικού, παρά ενός φυσικού που θα μελετούσε το πείραμα. Ακριβέστερα τέθηκε σαν πρόβλημα που καλείται να λύσει ένας μαθητής, ώστε να υπάρχει και μια σύνδεση με τις εξετάσεις της Γ' Λυκείου. Βέβαια σχεδόν σε κάθε ερώτημα παρατέθηκε και μια φυσική αναγκαιότητα, που προσπαθούσε να εξηγήσει έναν τρόπο ανακάλυψης αυτού του ερωτήματος με φυσικό και όχι μαθηματικό τρόπο. Για κάποιον που έχει ξανακούσει την θεωρία της Α.Α.Τ τα πράγματα σίγουρα θα φαίνονται πιο απλά και εύκολα.

ΛΥΣΗ

1. Η αντίδραση από το δάπεδο αναιρείται από το βάρος, άρα η μόνη δύναμη που απομένει ασκείται από το ελατήριο και είναι της μορφής $F = -Kx$ όπου x η συσπείρωση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Εδώ όμως στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και αφού ξεκινάμε να μετράμε τις απομακρύνσεις από την θέση ισορροπίας, x θα είναι και η απομάκρυνση του σώματος, η οποία βέβαια είναι συνάρτηση του χρόνου $x = x(t)$. Τότε: $\Sigma F = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Leftrightarrow a = -\frac{k}{m}x$ Θέτουμε $\frac{k}{m} = \omega^2$, έχουμε το δικαίωμα αφού το $\frac{k}{m}$ είναι θετική σταθερά, άρα $a = -\omega^2 x \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Leftrightarrow x''(t) = -\omega^2 x(t)$ Λίγο αυθαίρετα θεωρήσαμε το x δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση του χρόνου. Μια φορά παραγωγίσιμη σίγουρα είναι, γιατί στην κλασσική μηχανική η ταχύτητα δεν μπορεί να παρουσιάζει απότομα άλματα (ασυνέχειες), αφού θα χρειαζόταν άπειρη επιτάχυνση και έτσι δεν θα ίσχυε ο νόμος της αδράνειας. Όμως δεν ισχύει το ίδιο για την επιτάχυνση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η επιτάχυνση οφείλεται σε εξωτερικό αίτιο, την ΣF, και δεν είναι κάποια ιδιότητα του σώματος. Θεωρητικά λοιπόν θα μπορούσαμε να επιβάλουμε δυνάμεις που να αλλάζουν απότομα, οπότε και η επιτάχυνση θα παρουσίαζε ασυνέχειες. Εδώ όμως το α είναι ανάλογο του x το οποίο αλλάζει ομαλά και δεν παρουσιάζει ασυνέχειες.

2. Θέτουμε $\tau = \omega t \Leftrightarrow t = \frac{\tau}{\omega}$. Τότε για να βρούμε την δεύτερη παράγωγο του z ως προς τ έχουμε: $z(\tau) = x\left(\frac{\tau}{\omega}\right) \Rightarrow z'(\tau) = \frac{1}{\omega}x'\left(\frac{\tau}{\omega}\right) \Rightarrow z''(\tau) = \frac{1}{\omega^2}x''\left(\frac{\tau}{\omega}\right)$ όπου οι τόνοι σημαίνουν παραγώγιση ως προς τ και όχι ως προς t. Αν τώρα στην αρχική εξίσωση θέσουμε όπου t το τ/ω παίρνουμε : $x''(\frac{\tau}{\omega}) = -\omega^2 \cdot x(\frac{\tau}{\omega}) \Leftrightarrow \frac{1}{\omega^2}x''(\frac{\tau}{\omega}) = -x(\frac{\tau}{\omega}) \Leftrightarrow z''(\tau) = -z(\tau)$ Ο βασικός λόγος που μας οδήγησε στην αλλαγή μεταβλητής δεν οφείλεται στην παρατήρηση του φυσικού φαινόμενου, αλλά στην επεξεργασία της μαθηματικής εξίσωσης, για αισθητικούς μάλλον λόγους. Αν θέλουμε να δουλέψουμε με το σύμβολο του Leibniz, που χρησιμοποιείται πιο συχνά στα φυσικά προβλήματα, τότε θα πρέπει να προσέξουμε το εξής σημείο. Όταν γράφουμε π.χ $\frac{dx}{d\tau}$ η συνάρτηση x πρέπει να έχει μεταβλητή το τ και όχι το t. Άρα δεν είναι η $x(t)$, αλλά η $x(\frac{\tau}{\omega})$ την οποία ονομάσαμε $z(\tau)$. Οπότε $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau}$ $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \omega \Leftrightarrow \upsilon = \frac{dx}{d\tau} \cdot \omega \Leftrightarrow \upsilon(\tau) = \omega \cdot z'(\tau)$ και $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dv}{d\tau} \cdot \omega = \omega \cdot \frac{dv}{d\tau} = \omega \cdot \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau} \cdot \omega\right) = \omega^2 \cdot \frac{d^2x}{d\tau^2} = \omega^2 \cdot z''(\tau)$ όπου και πάλι οι τόνοι σημαίνουν παραγώγιση ως προς τ και όχι ως προς t.

3. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $(z(\tau))^2 + (z'(\tau))^2$ είναι σταθερή, αρκεί η παράγωγός της να προκύψει ίση με το μηδέν για κάθε τιμή του τ. Έτσι έχουμε $\left((z(\tau))^2 + (z'(\tau))^2\right)' = 2z(\tau)z'(\tau) + 2z'(\tau)z''(\tau) = 2z'(\tau)\left(z''(\tau) + z(\tau)\right) = 0$ όπου λάβαμε υπ' όψη μας το ερώτημα 2 Άρα $(z(\tau))^2 + (z'(\tau))^2 = C^2$ (μη αρνητική σταθερά). Τώρα στη συνέχεια με παραγώγιση ως προς t και λόγω του ερωτήματος 1 προκύπτει το

άλλο ζητούμενο

4. Τώρα αφού η συνάρτηση $(z(\tau))^2 + (z'(\tau))^2$ είναι σταθερή θα είναι ίση με την τιμή της στο 0. Οπότε $C^2 = (z(0))^2 + (z'(0))^2 = B^2 + A^2$. Επειδή $B = x(0) = z(0)$ το B παριστάνει την αρχική μετατόπιση. Ακόμη $\frac{\upsilon(t)}{\omega} = z'(\tau) \Rightarrow \frac{\upsilon(0)}{\omega} = z'(0) \Rightarrow \frac{\upsilon(0)}{\omega} = A \Rightarrow \upsilon(0) = A\omega$ προκύπτει ότι είναι η αρχική ταχύτητα. Μάλιστα
$$\frac{1}{2}KC^2 = E_{\text{Αρχική}}$$
Αν θεωρήσουμε $A \geq 0, B \geq 0$ σημαίνει ότι επιλέξαμε το σύστημα αξόνων στο οποίο θα μετράμε τις απομακρύνσεις, έτσι ώστε ο θετικός ημιάξονας των x να είναι ομόρροπος προς την αρχική μας ταχύτητα. Το γεγονός αυτό είναι ένα φυσικό επιχείρημα που εξηγεί γιατί δεν βλάπτεται η γενικότητα στην μελέτη του προβλήματος.

5. Στο ερώτημα 4 δείξαμε ότι
$$(z(\tau))^2 + \left(z'(\tau)\right)^2 = B^2 + A^2 = C^2$$
Αν $C = 0$ τότε για να είναι ένα άθροισμα τετραγώνων δυο πραγματικών αριθμών ίσο με το μηδέν, πρέπει και οι δυο αριθμοί να είναι ίσοι με το μηδέν. Οπότε πρέπει να ισχύουν: $z(\tau) = 0$, $z'(\tau) = 0 \; \forall \tau \in \mathbb{R}$. Προσέξτε ότι η συνθήκη αφορά και το παρελθόν του φαινόμενου.

6. Ονομάζουμε $h(\tau) = z(\tau) - y(\tau)$ τότε θα ισχύουν:
$h''(\tau) = z''(\tau) - y''(\tau) = -z(\tau) + y(\tau) =$
$-(z(\tau) - y(\tau)) = -h(\tau)$
και επιπλέον
$h(0) = z(0) - y(0) = B - B = 0$
$h'(0) = z'(0) - y'(0) = A - A = 0$ Από το ερώτημα 3 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση$(h(\tau))^2 + (h'(\tau))^2$ είναι σταθερή και από το 5 η $h(\tau) = 0 \; \forall \tau \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι $z(\tau) = y(\tau)$ στο $\mathbb{R}$.

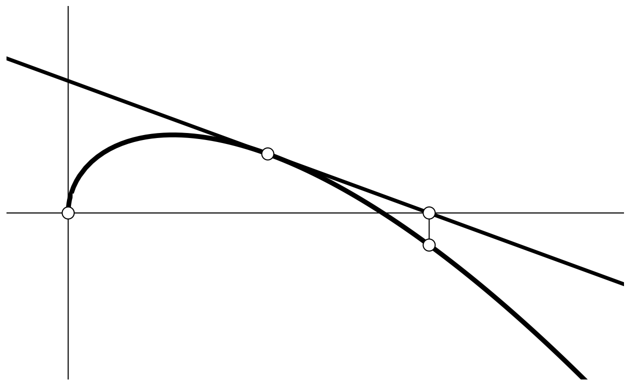
7. Θέτουμε
$g(\tau) = Af(\tau) + Bf'(\tau) \Rightarrow g'(\tau) = Af'(\tau) + Bf''(\tau)$
$= Af'(\tau) - Bf(\tau) \Rightarrow g''(\tau) = Af''(\tau) - Bf'(\tau) =$
$-Af(\tau) - Bf'(\tau) = -(Af(\tau) + Bf'(\tau)) = -g(\tau)$
Ακόμη :
$g(0) = Af(0) + Bf'(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = B$
$g'(0) = Af'(0) - Bf(0) = A \cdot 1 - B \cdot 0 = A$ Παρατηρούμε (εκτός) ότι η z και η g επαληθεύουν την ίδια «διαφορική εξίσωση» και έχουν ίδιες αρχικές συνθήκες. Τότε από το ερώτημα 6 προκύπτει ότι ταυτίζονται. Άρα $z(\tau) = Af(\tau) + Bf'(\tau)$ Η φυσική αναγκαιότητα που μας οδήγησε σ' αυτό το αποτέλεσμα προέρχεται από την επανάληψη του πειράματος, κάθε φορά με άλλες αρχικές συνθήκες, ώστε με την διερεύνηση να προκύψει μια γενική εικόνα του φαινομένου και όχι απλώς να επιλυθεί ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Εξ άλλου το φαινόμενο αυτό ονόμασαν οι φυσικοί : Απλή Αρμονική Ταλάντωση (ΑΑΤ) και κάθε διάταξη που συμπεριφέρεται με παρόμοιο τρόπο «Αρμονικό Ταλαντωτή». Έτσι μην παραξενευτείτε αν δείτε π.χ ηλεκτρικούς αρμονικούς ταλαντωτές.

8. Θέτουμε :
$w(\tau) = f(\tau + b) \Rightarrow w'(\tau) = f'(\tau + b) \Rightarrow$
$w''(\tau) = f''(\tau + b) = -f(\tau + b) = -w(\tau)$
$w(0) = f(0 + b) = f(b)$
$w'(0) = f'(0 + b) = f'(b)$ Ακόμη
$q(\tau) = f(\tau)f'(b) + f(b)f'(\tau) \Rightarrow$
$q'(\tau) = f'(\tau)f'(b) + f(b)f''(\tau) =$
$f'(\tau)f'(b) - f(b)f(\tau) \Rightarrow$
$q''(\tau) = f''(\tau)f'(b) - f(b)f'(\tau) =$
$q(\tau) = -f(\tau)f'(b) - f(b)f'(\tau) = -q(\tau)$
Και $q(0) = f(0)f'(b) + f(b)f'(0) =$
$0 \cdot f'(b) + f(b) \cdot 1 = f(b)$
$q'(0) = f'(0)f'(b) - f(b)f(0) =$
$1 \cdot f'(b) - f(b) \cdot 0 = f'(b)$
Λόγω του ερωτήματος 6 προκύπτει ότι : $w(\tau) = q(\tau) \Leftrightarrow w(a) = q(a) \Leftrightarrow f(a + b) = f(a)f'(b) + f(b)f'(a)$
Παραγωγίζοντας ως προς α έχουμε :
$f'(a + b) = f'(a)f'(b) + f(b)f''(a)$
$f'(a + b) = f'(a)f'(b) - f(b)f(a)$
Αναζητήσαμε το $f(a + b)$ γιατί παριστάνει μια καθυστέρηση του f ως προς το τ, δηλαδή στο φυσικό μοντέλο να μετράμε τις απομακρύνσεις, όχι από την θέση ισορροπίας, αλλά από κάποια άλλη τυχαία θέση. Οδηγηθήκαμε σ' αυτήν την έκφραση προσπαθώντας να φανούμε συνεπείς στο συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος. Δηλαδή στην αναζήτηση ενός γραμμικού συνδυασμού.

9. Από το 4 για $A = 1$, $B = 0$ και λόγω του 3 είναι$(f(\tau))^2 + (f'(\tau))^2 = 1$ τότε $(f'(\tau))^2 = 1 - (f(\tau))^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq f'(\tau) \leq 1 = f'(0)$
Άρα μέγιστο της $f'(\tau)$ στο $\mathbb{R}$ είναι το 1.

10. Έστω ότι η f δεν έχει ρίζα στο $(0, +\infty)$. Επειδή είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό και μάλιστα θετικό διότι $f'(0) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\tau \to 0^+} \frac{f(\tau) - f(0)}{\tau - 0} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\tau \to 0^+} \frac{f(\tau)}{\tau} = 1 \Rightarrow \frac{f(\tau)}{\tau} > 0$ σε διάστημα της μορφής $(0, \delta)$ Τότε $\tau > 0$ άρα και $f(\tau) > 0$ στο διάστημα αυτό και, επειδή η συνάρτησή μας διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$, θα είναι $f(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in (0, +\infty)$. Επειδή $f''(\tau) = -f(\tau) < 0$ συμπεραίνουμε ότι η φ θα είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ μια που είναι συνεχής και στο 0. Άρα η C_f θα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της. Επιπλέον τώρα, αν

υπήρχε $\tau_0 > 0 : f'(\tau_0) < 0$, η εφαπτομένη θα έτεμνε σε κάποιο σημείο τον θετικό ημιάξονα των τ και κατόπιν θα συνέχιζε στο κάτω αρνητικό ημιεπίπεδο, οπότε και η C_f που βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της θα έπαιρνε αρνητικές τιμές. Άτοπο εξ' υποθέσεως.



Τελικά συμπεραίνουμε ότι θα έπρεπε να ισχύει: $f'(\tau) > 0\ ,\ \forall \tau > 0$. Έτσι η f' έχει τιμές θετικές, έχει μέγιστο το 1, είναι γνήσια φθίνουσα αφού $f'' < 0$ και επιπλέον είναι κοίλη διότι $f'''(\tau) = -f'(\tau) < 0$. Αυτή η τελευταία σχέση προκύπτει αν παραγωγίσουμε την $f''(\tau) = -f(\tau)$. Η παραγώγιση επιτρέπεται αφού αν f παραγωγίσιμη τότε και f'' παραγωγίσιμη. Όμως τότε η γραφική παράσταση της f' θα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της, η οποία έχει αρνητική κλίση ($f'' < 0$) με συνέπεια τελικά η f' να γίνεται αρνητική, πράγμα άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι η f' έχει μόνο θετικές τιμές. Έτσι προκύπτει ότι η f έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα. Την μικρότερη από αυτές ονομάζουμε ξ. Η ύπαρξη μικρότερου ξ τεκμηριώνεται πιο αυστηρά, αν σκεφτούμε ότι: αποδείξαμε την ύπαρξη θετικής ρίζας η οποία δεν μπορεί να βρίσκεται «κοντά» στο 0 αφού $f(0) = 0, f'(0) = 1 > 0$ που σημαίνει ότι θα είναι $f(x) \neq 0\, \forall x \in (0, \delta)$. Στο πείραμα, το συμπέρασμα αυτό φαίνεται προφανές, αφού το σώμα θα περάσει ξανά από την θέση ισορροπίας. Εδώ λοιπόν φαίνεται η αυστηρότητα που απαιτείται από την μαθηματική γλώσσα προκειμένου να τεκμηριωθεί μια τόσο απλή παρατήρηση.

11. Έχουμε
$f(\tau+\xi) = f(\tau)f'(\xi) + f(\xi)f'(\tau) = f(\tau)f'(\xi) \Rightarrow$
$f((\tau+\xi)+\xi) = f(\tau+\xi)f'(\xi) =$
$f(\tau)f'(\xi)f'(\xi) = f(\tau)(f'(\xi))^2$ Όμως
$(f(\tau))^2 + (f'(\tau))^2 = 1 \Rightarrow$
$(f(\xi))^2 + (f'(\xi))^2 = 1 \Rightarrow$
$0 + (f'(\xi))^2 = 1 \Rightarrow (f'(\xi))^2 = 1$ Τότε αντικαθιστώντας προκύπτει ότι $f(\tau+2\xi) = f(\tau)\ ,\ \forall \tau \in \mathbb{R}\ ,\ \xi \neq 0$ που δείχνει ότι η f είναι περιοδική με περίοδο το 2ξ

12. Στην πρώτη σχέση του ερωτήματος 8 θέτουμε όπου $\alpha = b = \frac{\xi}{2} > 0$. Έτσι έχουμε $0 = f(\xi) = f(\frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2}) = f(\frac{\xi}{2})f'(\frac{\xi}{2}) + f(\frac{\xi}{2})f'(\frac{\xi}{2}) = 2f(\frac{\xi}{2})f'(\frac{\xi}{2})$

Όμως $f(\frac{\xi}{2}) \neq 0$ αφού ξ είναι η μικρότερη θετική ρίζα της f. Άρα $f'(\frac{\xi}{2}) = 0$

Ξέρουμε ότι : $f(0) = f(\xi) = 0$ και ότι η συνάρτησή μας διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,\xi)$ αφού δεν έχει ρίζα στο διάστημα αυτό. Επειδή $f'(0) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\tau\to0^+} \frac{f(\tau)-f(0)}{\tau-0} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\tau\to0^+} \frac{f(\tau)}{\tau} = 1 \Rightarrow \frac{f(\tau)}{\tau} > 0$ σε διάστημα της μορφής $(0,\delta)$. Τότε $\tau > 0$ άρα και $f(\tau) > 0$ στο διάστημα αυτό οπότε, επειδή η συνάρτησή μας διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,\xi)$, θα είναι $f(\tau) > 0\quad \forall \tau \in (0,\xi)$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $f'(\frac{\xi}{2}) = 0 \overset{(9)}{\Rightarrow} f(\frac{\xi}{2}) = 1$. Είναι $f'''(\tau) = -f(\tau) < 0\ \forall \tau \in (0,\xi)$, άρα η συνάρτησή είναι κοίλη στο $[0,\xi]$. Συνεπώς η $f' \downarrow$ στο $[0,\xi]$με μοναδική ρίζα το $\frac{\xi}{2}$. Οπότε $f \uparrow$ στο $\left[0,\frac{\xi}{2}\right]$ ενώ $f \downarrow$ $\left[\frac{\xi}{2},\xi\right]$. Ακολουθεί ο πίνακας μονοτονίας:

τ	0		$\xi/2$		ξ
f''	0	-		-	0
f'		+	0	-	
f	0	↗	1	↘	0

Χρησιμοποιώντας το ερώτημα 9 και την μονοτονία μπορούμε τώρα να συμπεράνουμε ότι θα είναι $f'(\xi) = -1$

13. Θέτουμε
$\rho(\tau) = f(\tau) + f(-\tau) \Rightarrow$
$\rho'(\tau) = f'(\tau) - f'(-\tau) \Rightarrow$
$\rho''(\tau) = f''(\tau) + f''(-\tau) = -f(\tau) - f(-\tau) = -\rho(\tau)$
$\rho(0) = f(0) + f(0) = 0$
$\rho'(0) = f'(0) - f'(0) = 1 - 1 = 0$ οπότε λόγω του πέμπτου ερωτήματος θα είναι

$$\rho(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

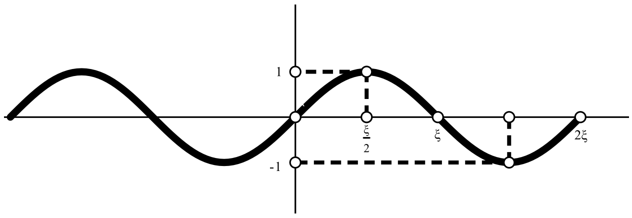
που σημαίνει ότι η f είναι περιττή και βέβαια η παράγωγός της, άρτια.

14. Έχουμε: $\lim\limits_{\tau\to0} \frac{f(\tau)}{\tau} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{\tau\to0} \frac{f'(\tau)}{1} = f'(0) = 1$ Ακόμη επειδή $|f(\tau)| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{f(\tau)}{\tau}\right| \leq \frac{1}{|\tau|}\ \forall \tau \in \mathbb{R}*$ και επειδή $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \frac{1}{|\tau|} = 0$ θα είναι και $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} = 0$

15. Εξίσωση εφαπτομένης (ε) στο σημείο $(0,0)$ είναι η: $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x-0) \Leftrightarrow y = x$

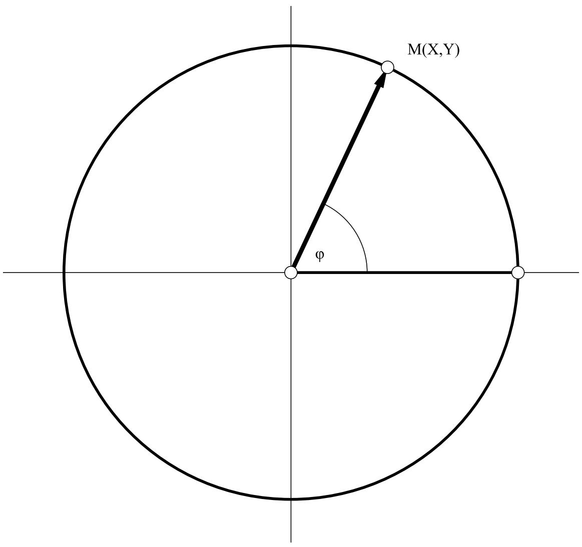
Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0,\xi]$ θα έχουμε $f(\tau) \le \tau \;\; \forall\tau \in [0,\xi]$

Από όλα τα προηγούμενα προκύπτει προσεγγιστικά η γραφική παράσταση:



Στα προηγούμενα ερωτήματα 12 ως και 15 κάναμε την απαραίτητη μαθηματική δουλειά ώστε να σχεδιάσουμε την καμπύλη που παριστάνει την εξέλιξη του φαινόμενου.

16. Θέτουμε $X = f(\tau)$, $Y = f'(\tau)$. Από το ερώτημα 9 είναι $(f(\tau))^2 + (f'(\tau))^2 = 1$, $\forall\tau \in \mathbb{R}$ Αντικαθιστώντας έχουμε: $\mathrm{X}^2 + \Upsilon^2 = 1$ που παριστάνει κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1.



17. Να σημειώσουμε εδώ ότι η γραφική παράσταση του υ συναρτήσει του x γενικά είναι μια έλλειψη, καμπύλη πολύ συγγενική προς τον κύκλο. Ακόμη, μια πολύ βολική αναπαράσταση των $z(\tau)$ ή $x(t)$ μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς.

18. Έτσι λοιπόν ξαναανακαλύψαμε το ημίτονο και το συνημίτονο (και συνεπώς την τριγωνομετρία) μέσα από ένα φυσικό πρόβλημα. (Οι υπόλοιπες αποδείξεις μπορούν να γίνουν με τον συνηθισμένο τρόπο που υπάρχει στα σχολικά βιβλία). Αυτές οι συναρτήσεις εμφανίζονται και σε πάρα πολλά άλλα προβλήματα, πήραν όνομα και κατασκευάστηκαν και πίνακες τιμών τους. Το φαινόμενο αυτό, εμφανίζεται συχνότατα και πιστοποιεί την στενή σύνδεση μαθηματικών - φυσικής.

Παρατηρηση

Για τον ορισμό του αριθμού $\pi = \xi$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Αυτή προκύπτει ως εξής:
Ας ονομάσουμε με I το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ και ας προσπαθήσουμε να το υπολογίσουμε. Θα χρειαστούμε κάποιες από τις ιδιότητες των f, f' τις οποίες αναφέρουμε αμέσως

$$i) \quad \left(f'(x)\right)^2 = \frac{1+f'(2x)}{2}$$

$$ii) \;\; f(0) = 0, f(\xi) = 0, f'(\xi) = -1, f'(0) = 1$$

$$iii) \;\; f, f' \; 1-1 \text{ με μη αρνητικές τιμές στο } [0,\xi/2]$$

$$iv) \;\; f'(x) = \sqrt{1-f^2(x)} \text{ στο } [0,\xi/2]$$

$$\text{v)} \quad \int f(x)dx = -\int f''(x)dx = -f'(x) + c$$

$$\text{v)} \quad \int f(x)dx = -\int f''(x)dx = -f'(x) + c$$

Έτσι έχουμε:
$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \overset{x=f(t)}{=} \int_0^{\xi/2} \sqrt{1-f^2(t)}f'(t)dt =$
$\int_0^{\xi/2} (f'(t))^2dt = \; = \frac{1}{2}\int_0^{\xi/2}(1+f'(2t))dt =$
$\frac{\xi}{4} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi/2} f'(2t)dt \overset{\omega=2t}{=} \frac{\xi}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\xi} f'(\omega)d\omega =$
$= \frac{\xi}{4} + \frac{1}{4}[f(\omega)]_0^{\xi} = \frac{\xi}{4} + \frac{1}{4}(f(\xi) - f(0)) = \frac{\xi}{4} = \frac{\pi}{4}n$ Ο τρόπος αυτός ορισμού του π θα μπορούσε να χρησιμεύσει στον υπολογισμό του, αν μπορούσαμε με κάποιον τρόπο να υπολογίσουμε, έστω και κατά προσέγγιση, το I. Ακόμη στην αρχική μορφή του I δεν χρειάζεται καμιά αναφορά στις συναρτήσεις f και f. Ο κατά προσέγγιση υπολογισμός του I μπορεί να γίνει με μεθόδους που δεν αναφέρονται στο λύκειο

Ροδόλφος Μπόρης
Ακροπόλεως 115-117,
Δάφνη 17235,
Αθήνα,
Τηλ 2109712610-2109373732,
R_Boris@Hotmail.com