Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

Φυλλο 12, 28 Αυγουστου 2012

ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα.
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος:
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2_ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Ρίζες πραγματικών αριθμών και η εξίσωση $x^v = a$.

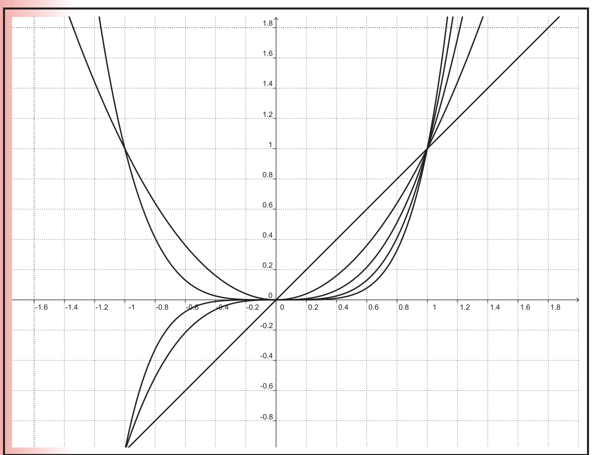
Μαρία Ωρολογά
Φοιτήτρια Μαθηματικού του ΕΚΠΑ

Περίληψη

Το κείμενο αυτό προέρχεται από μια διδασκαλία που πραγματοποίησα στις 11 Μαίου 2012[1] στην Α΄ Λυκείου στα πλαίσια της πρακτικής μου άσκησης στο Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης.

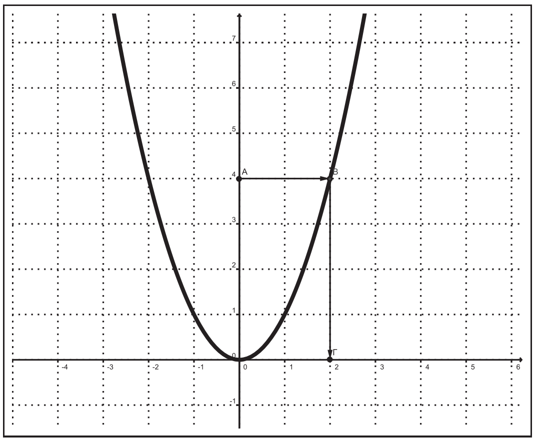
Κύριος στόχος του μαθήματος είναι η γεωμετρική προσέγγιση (ερμηνεία) της ν-οστής ρίζας με τη βοήθεια του προγράμματος Geogebra.

Δίνοντας στο πρόγραμμα τις εντολές να σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις των x, x^2, x^3, x^4, x^5 οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να κάνουν ορισμένες παρατηρήσεις.



Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στα εξής σημεία:
Απομονώνοντας τις γραφικές παραστάσεις των x και x^2 είναι εύκολο οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι για x μεταξύ του 0 και του 1 ισχύει ότι $x^2 < x$ και για x μεγαλύτερο του 1 το αντίστροφο.
Ακριβώς η ίδια διαδικασία έγινε για τη x^2 και τη x^3, οπότε και γενικεύσαμε ότι για $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^\nu < x^\mu$ όταν $\nu > \mu$ και ότι για $x \in (1,+\infty)$ ισχύει ότι $x^\nu < x^\mu$ όταν $\nu < \mu$.

Στο μεγαλύτερο μέρος του μαθήματος ασχοληθήκαμε με την εύρεση της ν-οστής ρίζας. Συγκεκριμένα, στο παράθυρο της γεωμετρίας του Geogebra έχοντας μόνο τη x^2 ζητήθηκε από τους μαθητές για ένα σταθερό y, ας πούμε με τιμή a, να υπολογίσουν την τιμή του x. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στο να απαντήσουν αμέσως, για αυτό ζητήσα *συγκεκριμένα* για την τιμή 4 να υπολογίσουν το x.



Έπειτα, επικεντρωθήκαμε ξανά στην αρχική ερώτηση και η απάντηση τότε δεν ήρθε δύσκολα. Ακριβώς παρόμοια δουλεία έγινε για τις x^3, x^4, x^5 και τέλος γενικεύτηκε για τη ν-οστή ρίζα. Οπότε δόθηκε και ο ορισμός,

- Η $\sqrt[\nu]{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = a$, για $a \geq 0$.

Για τη διευκόλυνση των μαθητών φτιάχτηκε ένα πινακάκι με τις λύσεις των $x^2 = a, x^3 = a, x^4 = a, x^5 = a$ (παράλληλα ήταν ανοιχτό το παράθυρο της γεωμετρίας του προγράμματος με τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω).

	$a > 0$	$a < 0$
x^2	$x = \pm\sqrt{a}$	αδύνατη
x^3	$x = \sqrt[3]{a}$	$x = -\sqrt[3]{\lvert a\rvert}$
x^4	$x = \pm\sqrt[4]{a}$	αδύνατη
x^5	$x = \sqrt[5]{a}$	$x = -\sqrt[5]{\lvert a\rvert}$

Και στη συνέχεια γενικεύσαμε:

	$a > 0$	$a < 0$
ν άρτιος	$x = \pm\sqrt[\nu]{a}$	αδύνατη
ν περιττός	$x = \sqrt[\nu]{a}$	$x = -\sqrt[\nu]{\lvert a\rvert}$

Στο τέλος του μαθήματος δόθηκαν και ορισμένες από τις ιδιότητες της ν-οστής ρίζας και συγκεκριμένα οι εξής:
Για $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}} \quad (2)$$

$$\boxed{\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}} \quad (3)$$

$$\boxed{\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}} \quad (4)$$

[1] Το σχολικό έτος 2011-2012 η Άλγεβρα στην Α΄ Τάξη στο Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης διδάχθηκε με διαφορετική σειρά από εκείνη του διδακτικού βιβλίου. Βλ. http://users.sch.gr/mavrogiannis/Algebra_A_2012-2013.pdf