Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

ΦΥΛΛΟ 15, 1 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015

ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα.
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος:
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το $\LaTeX 2_\varepsilon$
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πρότυπο Γενικό Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Ιστορικά και διδακτικά σχόλια για ένα Βαβυλωνιακό πρόβλημα με αφορμή τη διαδικτυακή συζήτηση στο www.mathematica.gr

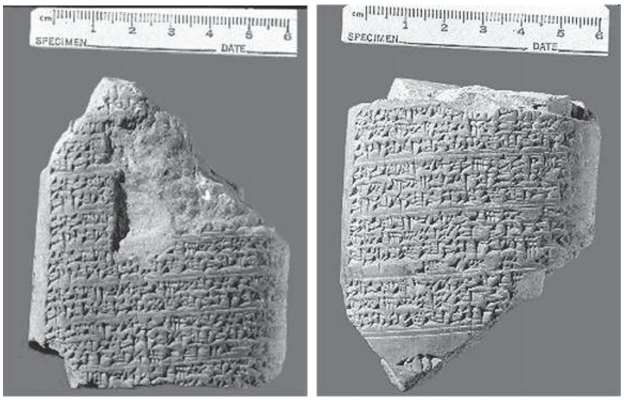
(http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=48146&p=227653)

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Κιλκίς, Λαγκαδά & Ωραιοκάστρου

Στο εν χρήσει βιβλίο Μαθηματικών της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού και στην εισαγωγή της θεματικής ενότητας «*Εξισώσεις*» υπάρχει το εξής ιστορικό σημείωμα (σελ. 60):

> Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις. Με άλλα λόγια, με τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στη θέση ενός αριθμού που δεν γνωρίζουμε. Από την 8η χιλιετία π.Χ. οι κάτοικοι της Μεσοποταμίας, πολύ πριν από τους Σουμέριους, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρές πήλινες «μάρκες». Από εκεί πληροφορούμαστε ότι χρησιμοποιούσαν αριθμητικές μεθόδους πολύ πιο εξελιγμένες από την απλή καταμέτρηση γεωργικών προϊόντων και τους απλούς εμπορικούς και οικονομικούς σκοπούς της εποχής τους. Βρέθηκαν στις «μάρκες» προβλήματα της εποχής εκείνης που απαιτούν τη χρήση εξισώσεων για την επίλυσή τους. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω πρόβλημα:
> *Βρήκα μια πέτρα. Δεν (τη) ζύγισα. Αφαίρεσα το ένα έβδομο. Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο. Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο. (Τη) ζύγισα. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας·*
> Φαίνεται πως τα Μαθηματικά ήταν για τους κατοίκους της Μεσοποταμίας ένα απαραίτητο εργαλείο με το οποίο μπορούσαν να αποκρυπτογραφήσουν τις κινήσεις του Ουρανού και μια γλώσσα με την οποία μπορούσαν να επικοινωνήσουν και να καταλάβουν τους θεούς τους.

Από την διατύπωση του προβλήματος στο προηγούμενο σημείωμα καταλαβαίνουμε αμέσως ότι απουσιάζει ένα κρίσιμο δεδομένο, η έλλειψη του οποίου οδηγεί σε αδιέξοδο οποιαδήποτε απόπειρα επίλυσης: Ποιο ήταν το βάρος της πέτρας, όταν αυτή ζυγίστηκε μετά τις διαδοχικές προσθαφαιρέσεις;



Το πρόβλημα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην Βαβυλωνιακή πινακίδα που φέρει τον κωδικό αριθμό YBC 4652, με την εξής διατύπωση και απάντηση:

> Βρήκα μια πέτρα, (αλλά) δεν τη ζύγισα· (ύστερα) αφαίρεσα ένα έβδομο, πρόσθεσα ένα ενδέκατο, (και) αφαίρεσα ένα δέκατο τρίτο, (τη) ζύγισα: 1 ma - na. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας; (Το αρχικό βάρος) της πέτρας ήταν 1 ma - na, $9\frac{1}{2}$ gin (και) $2\frac{1}{2}$ se.

Το ma - na ήταν μία μονάδα μέτρησης του εξηκονταδικού συστήματος, η οποία υποδιαιρείται σε 60 gin και κάθε gin σε 180 se, δηλαδή 1 ma - na = 10800 se.

Το πρόβλημα είναι το ένατο στη σειρά από τα 22 πανομοιότυπα προβλήματα της συγκεκριμένης πινακίδας η οποία χρονολογείται την περίοδο 1800 - 1600 π.Χ. (και όχι την προϊστορική 8η χιλιετία π.Χ. όπως αφήνει να εννοηθεί το ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου). Η απάντηση δίνεται στην πινακίδα χωρίς καμιά ένδειξη για τη μέθοδο με την οποία βρέθηκε, είναι δε φανερό ότι το πρόβλημα δεν είχε κάποιο πρακτικό περιεχόμενο (αν ενδιέφερε πράγματι το αρχικό βάρος της πέτρας, τότε θα έπρεπε να ζυγιστεί πριν αρχίσουν οι διάφορες προσθαφαιρέσεις!). Κατά πάσα πιθανότητα τα προβλήματα αυτά αποτελούσαν ασκήσεις στις σχολές εκπαίδευσης των Βαβυλώνιων γραφέων.

Μια επίλυση του προβλήματος με χρήση αγνώστου και εξίσωσης (η οποία δεν θα μπορούσε φυσικά να δοθεί στη μορφή αυτή από τους Βαβυλώνιους) είναι η εξής:

1. Βρήκα μια πέτρα — Έστω x το βάρος της πέτρας
2. Αφαίρεσα το ένα έβδομο — $x - \frac{1}{7}x = \frac{6}{7}x$
3. Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο — $\frac{6}{7}x + \frac{1}{11} \cdot \frac{6}{7}x = \frac{12}{11} \cdot \frac{6}{7}x = \frac{72}{77}x$
4. Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο — $\frac{72}{77}x - \frac{1}{13} \cdot \frac{72}{77}x = \frac{12}{13} \cdot \frac{72}{77}x = \frac{864}{1001}x$

$$\frac{864}{1001}x = 1\text{ma} - \text{na} \Rightarrow \text{x} = \frac{1001}{864}ma - na$$

Η έκφραση αυτού του αποτελέσματος με χρήση των υποδιαιρέσεων της κεντρικής μονάδας ma - na συμπίπτει ακριβώς με την απάντηση που δίνεται στην πινακίδα:

$$\frac{1001}{864}ma - na = \frac{1001}{864} \cdot 10800se = 12512\tfrac{1}{2}se =$$
$$10800se + 1620se + 90se + 2\tfrac{1}{2}se = 1ma - na + 9\tfrac{1}{2}gin + 2\tfrac{1}{2}se$$

Εκ του αποτελέσματος διευκρινίζεται επίσης η σχετική ασάφεια της διατύπωσης του προβλήματος στην πινακίδα· επιβεβαιώνεται δηλαδή ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση στο 3ο και 4ο βήμα αναφέρονται στο εκάστοτε υπόλοιπο και όχι στην αρχική πέτρα. Σε πιο συμπαγή αλγεβρική μορφή, η προηγούμενη λύση μπορεί να εκφραστεί στη μορφή μιας μοναδικής (και διδακτικά πολύ ενδιαφέρουσας, όχι φυσικά για το Δημοτικό σχολείο) εξίσωσης:

$$x - \frac{1}{7}x + \frac{1}{11}\left(x - \frac{1}{7}x\right) - \frac{1}{13}\left[x - \frac{1}{7}x + \frac{1}{11}\left(x - \frac{1}{7}x\right)\right] = 1$$

Η προηγούμενη αλγεβρική λύση του προβλήματος δεν είναι παρά μια αναδιατύπωση - με χρήση των ισχυρών εργαλείων της αναλυτικής μεθόδου και του αγνώστου - της ακόλουθης αριθμητικής λύσης που χρησιμοποιεί το λογισμό των κοινών κλασμάτων. Αυτή πιθανότατα βρίσκεται πιο κοντά στις δυνατότητες των Βαβυλώνιων γραφέων, οι οποίοι βέβαια δεν χρησιμοποιούσαν το σύγχρονο κλασματικό συμβολισμό:

$$1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$
$$\frac{6}{7} + \frac{1}{11} \times \frac{6}{7} = \frac{12}{11} \times \frac{6}{7} = \frac{72}{77}$$
$$\frac{72}{77} - \frac{1}{13} \times \frac{72}{77} = \frac{12}{13} \times \frac{72}{77} = \frac{864}{1001}$$

Με μια κλασική αναγωγή στη μονάδα συμπεραίνουμε ότι αφού τα $\frac{864}{1001}$ της πέτρας ζυγίζουν 1 ma - na, τότε το $\frac{1}{1001}$ της πέτρας θα ζυγίζει $\frac{1}{864}$ του ma - na και άρα ολόκληρη η πέτρα:

$$\frac{1001}{864}ma - na = 1ma - na + 9\frac{1}{2}\text{gin} + 2\frac{1}{2}se$$

Μία ακόμη λύση, που θα μπορούσε να δοθεί με τα μέσα που ήταν διαθέσιμα στους Βαβυλώνιους γραφείς, στηρίζεται σε μια αναδρομική πορεία επίλυσης με χρήση βοηθητικών μονάδων. Αν χρησιμοποιήσουμε ως πρώτη βοηθητική μονάδα (ας την ονομάσουμε A) το μέρος της πέτρας που απομένει μετά την αφαίρεση του ενός εβδόμου της και την πρόσθεση του ενός ενδέκατου του υπολοίπου, τότε το τελευταίο βήμα της εκφώνησης συνίσταται στην αφαίρεση από την A του ενός δεκάτου τρίτου της. Δηλαδή τα δώδεκα δέκατα τρίτα της A που απομένουν ζυγίζουν 1 ma - na. Άρα, με αναγωγή στη μονάδα το ένα δέκατο τρίτο της A ζυγίζει ένα δωδέκατο του μα - να και επομένως η μονάδα A ζυγίζει δεκατρία δωδέκατα του ma - na. Αυτό σημαίνει, με χρήση των υποδιαιρέσεων του ma - na, ότι

$$\text{A} = 65 \text{ gin} = 11700 \text{ se.}$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, χρησιμοποιούμε ως δεύτερη βοηθητική μονάδα (ας την ονομάσουμε B) το μέρος της πέτρας που απομένει μετά την αφαίρεση του ενός εβδόμου της. Τότε το τρίτο βήμα της εκφώνησης συνίσταται στην πρόσθεση στην B του ενός ενδεκάτου της, δηλαδή στη δημιουργία της μονάδας A η οποία βρήκαμε ότι ζυγίζει 11700 se. Δηλαδή τα δώδεκα ενδέκατα της B ζυγίζουν 11700 se, οπότε το ένα ενδέκατο ζυγίζει 975 se και άρα η B = 10725 se. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η πέτρα μείον το ένα έβδομο της, δηλαδή τα έξι έβδομα της πέτρας, ζυγίζουν 10725 se. Άρα το ένα έβδομο ζυγίζει 1785,5 se και ολόκληρη η πέτρα 12512,5 se. Αυτή η τιμή, όπως δείξαμε παραπάνω, ισούται με την απάντηση που δίνεται στην πινακίδα.

Στην τελευταία μέθοδο επίλυσης του προβλήματος προσπαθήσαμε να διατηρήσουμε τη ρητορική μορφή που ήταν το βασικό όργανο έκφρασης των Βαβυλωνίων γραφέων του 17ου αιώνα π.Χ. Η απλή σύγκριση με τις προηγούμενες λύσεις δείχνει τη μεγάλη απελευθέρωση και ευελιξία που παρέχουν στη μαθηματική σκέψη τα σύγχρονα συμβολικά μέσα αναπαράστασης, είτε αυτά αφορούν τον αριθμητικό λογισμό των κλασμάτων είτε τη μεθοδολογία και τα εργαλεία του αλγεβρικού λογισμού.

Η ένταξη ενός ιστορικού προβλήματος όπως το προηγούμενο σε σχολικό βιβλίο θα έπρεπε κατά την άποψή μου να στοχεύει σε αυτές τις συγκρίσεις, έτσι ώστε να αναδεικνύεται η αξία της μαθηματικής γνώσης που καλούνται να κατακτήσουν οι μαθητές. Όταν πριν μερικά χρόνια υπέδειξα τις ασάφειες και παραλείψεις του συγκεκριμένου ιστορικού σημειώματος σε έναν εκ των συγγραφέων του βιβλίου της ΣΤ΄ Δημοτικού, η αντίδρασή του ήταν εξόχως αποκαλυπτική των αντιλήψεων εκείνων που ενώ αναπαράγουν τα περί διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών, τελικά επιφυλάσσουν για τα ιστορικά σημειώματα των διδακτικών βιβλίων ένα διακοσμητικό και παραπλανητικό ρόλο...