



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

1

ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗΝ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020, Υ.Α. 44639/Δ2/9-4-2020

Οδηγίες:

Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Όταν τελειώσετε να πατήσετε το σύνδεσμο που υπάρχει σε κάθε θέμα ώστε να δείτε, βήμα-βήμα, ενδεικτικές απαντήσεις. Το διαγώνισμα είναι κατάλληλο για τη διδασκαλία εξ αποστάσεως.

Δ. Σπαθάρας, τ. Σχολικός Σύμβουλος ♦ Κ. Σουφλήρης, Μαθηματικός MSc ♦ Λ. Καραγκούνης, Μαθηματικός

ΘΕΜΑ Α

Απάντηση εδώ ➔ bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-01a

A1) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad (\text{Μ. 7})$$

A2) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της; (Μ. 4)

A3) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

α) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ , ισχύει $f'(x) > 0$ στο εσωτερικό του Δ . (Μ. 4)

β) Όλα τα κρίσιμα σημεία κάθε συνάρτησης f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f . (Μ. 4)

A4) Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά κάθε μια από τις παρακάτω ημιτελείς προτάσεις:

α) Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης f :

1) ακριβώς σε ένα σημείο.

2) τουλάχιστον σε ένα σημείο.

3) το πολύ σε ένα σημείο.

4) σε κανένα σημείο. (Μ. 3)

β) Για οποιαδήποτε ζεύγος συναρτήσεων f και g , για τις οποίες η g είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

1) $(f(g(x)))' = f'(g(x))$

2) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

3) $(f(g(x)))' = f'(g(x))$

4) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g(x)$ (Μ. 3)

ΘΕΜΑ Β[Απάντηση εδώ ↗ bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-01b](http://bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-01b)

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια στο $-\infty$ και στο $+\infty$ μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη και συνεχής στο \mathbb{R} . Επιπλέον δίνεται ότι η f έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 2 .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	4	-3 min	4

- B1)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μ. 4)
- B2)** Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ . (Μ. 5)
- B3)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μ. 8)
- B4)** Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $g(x) = \mu$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ . (Μ. 8)

ΘΕΜΑ Γ[Απάντηση εδώ ↗ bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-01c](http://bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-01c)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - \lambda^2 x - 3x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία -1 και 1 .

- Γ1)** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$. (Μ. 4)
- Γ2)** Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μ. 6)
- Γ3)** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu(f(x))}$. (Μ. 8)
- Γ4)** Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Καθώς το M διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 5 cm/sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \hat{M}Ox$ που σχηματίζει η OM με τον θετικό ημιάξονα Ox τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο A . (Μ. 7)

ΘΕΜΑ Δ[Απάντηση εδώ ↗ bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-01d](http://bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-01d)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι αντιστρέψιμη και ισχύει

$$f^{-1}(x) = \varepsilon\phi x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- Δ1)** Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = \frac{\pi}{4}$. (Μ. 4)
- Δ2)** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μ. 9)
- Δ3)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $(0, f(0))$ και $(1, f(1))$. (Μ. 4)
- Δ4)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ για το οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $P\left(1, \frac{7}{8}\right)$. (Μ. 8)

Καλή επιτυχία