



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

2

ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗΝ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020, Υ.Α. 44639/Δ2/9-4-2020

Οδηγίες:

Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Όταν τελειώσετε να πατήσετε το σύνδεσμο που υπάρχει σε κάθε θέμα ώστε να δείτε, βήμα-βήμα, ενδεικτικές απαντήσεις. Το διαγώνισμα είναι κατάλληλο για τη διδασκαλία εξ αποστάσεως.

Δ. Σπαθάρας, τ. Σχολικός Σύμβουλος ♦ Κ. Σουφλήρης, Μαθηματικός MSc ♦ Λ. Καραγκούνης, Μαθηματικός

ΘΕΜΑ Α

[Απάντηση εδώ ↗ bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-02a](https://bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-02a)

A1) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. (Μ. 6)

A2) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (Μ. 5)

A3) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

α) Αν μία συνάρτηση έχει πλευρικά όρια στο x_0 , τότε έχει πάντοτε όριο στο x_0 . (Μ. 4)

β) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. (Μ. 4)

A4) Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά κάθε μια από τις παρακάτω ημιτελείς προτάσεις:

α) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f , που έχει πεπερασμένο όριο στο x_0 ισχύει η συνεπαγωγή:

1) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $f(x) = 0$ κοντά στο x_0

2) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

3) αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$

4) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Μ. 3)

β) Για κάθε α με $\alpha > 0$ η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο:

1) $f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^{x-1}$

2) $f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$

3) $f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^{x-1} \ln \alpha$

4) $f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^{x-1} \ln \alpha$ (Μ. 3)

ΘΕΜΑ Β

[Απάντηση εδώ ↗ bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-02b](http://bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-02b)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

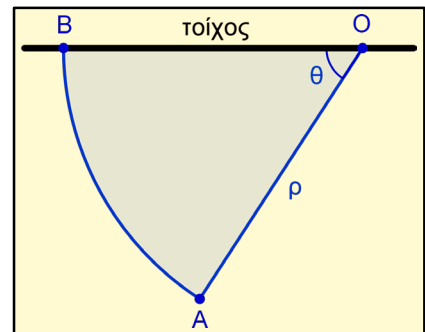
$$xf(x) + \eta\mu x + 1 = x^2 + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- B1)** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ (Μ. 4)
- B2)** Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$ και να βρείτε τον τύπο της f . (Μ. 5)
- B3)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . (Μ. 9)
- B4)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$. (Μ. 7)

ΘΕΜΑ Γ

[Απάντηση εδώ ↗ bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-02c](http://bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-02c)

Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν μεταλλικό εξώστη σχήματος κυκλικού τομέα $O\widehat{A}B$ με ακτίνα $OA = \rho$ m και γωνία $\theta = \widehat{A}OB$ rad, το οποίο θα στηρίξουμε σε έναν τοίχο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Διαθέτουμε για την περίμετρο μη συμπεριλαμβανομένης της ακτίνας OB , δηλαδή για το άθροισμα $OA + \widehat{A}B$, ακριβώς 10 m μεταλλικά κάγκελα για το έργο αυτό.



- Γ1)** Να αποδείξετε ότι ο εξώστης έχει εμβαδόν E σε m^2 , συναρτήσει της ακτίνας ρ , που είναι:

$$E(\rho) = 5\rho - \frac{\rho^2}{2}, \quad 0 < \rho < 10 \tag{Μ. 6}$$

- Γ2)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E μεγιστοποιείται όταν το μήκος του τόξου $\widehat{A}B$ είναι ίσο με το μήκος της ακτίνας OA . (Μ. 7)
- Γ3)** Να βρείτε γωνία θ όταν το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο. (Μ. 5)
- Γ4)** Όταν κατασκευάστηκε και τοποθετήθηκε ο εξώστης μέγιστου εμβαδού άρχισε να διαστέλλεται επιφανειακά από τη θερμοκρασία του ήλιου. Με την επιφανειακή διαστολή το σχήμα του παραμένει όμοιο με το αρχικό και η επιφάνειά του, τη χρονική στιγμή που η ακτίνα είναι 5 m, αυξάνεται με ρυθμό $0,1 \text{ cm}^2/\text{min}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας ρ σε cm/min τη χρονική στιγμή που αυτή είναι 5 m. (Μ. 7)

ΘΕΜΑ Δ

[Απάντηση εδώ ↗ bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-02d](http://bit.ly/pe03-gr-gel-c-epan-02d)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $f^2(x) = \ln^2 x$ και $f(e) = f(e^{-1}) = 1$.

- Δ1)** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = |\ln x|$ και να την παραστήσετε γραφικά. (Μ. 7)
- Δ2)** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(1+e^x) - x]$ (Μ. 6)
- Δ3)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $M(x_1, f(x_1))$ και $N(x_2, f(x_2))$, $0 < x_1 < 1 < x_2$, αντίστοιχα, στα οποία η ευθεία $y = \lambda$, $\lambda > 0$ τέμνει την C_f και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\lambda > 0$. (Μ. 5)
- Δ4)** Αν A και B είναι τα σημεία όπου η ευθεία ε_1 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι, όταν το εμβαδόν του τριγώνου OAB γίνεται μέγιστο, τότε η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Μ. 7)

Καλή επιτυχία