ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣ/ΜΟΥ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΛ

- **Μαθηματική μοντελοποίηση**
- **Αποκλίνουσα σκέψη**
- **Απρόσμενες απαντήσεις**
- **Δημιουργικές διαδρομές**

Αφορμή: Το ερώτημα Γ2 από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2018 στα Μαθηματικά Προσανατολισμού των ΓΕΛ.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δυο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. .....

Γ2. **Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.**

Γ3. .....

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

www.pe03.gr

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
Φθιώτιδας και Ευρυτανίας
www.pe03.gr

Εισαγωγή - Αφορμή

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δυο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\ x \in (0,8)$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Σχόλια

Το παραπάνω θέμα είναι ένα κλασικό πρόβλημα μαθηματικής μοντελοποίησης, που παρόμοιό του, με κάποιες παραλλαγές, υπάρχει στα σχολικά βιβλία. Είναι πραγματικά ένα πολύ όμορφο πρόβλημα. Το ερώτημα (Γ1) σε προδιαθέτει να απαντήσεις στα ερωτήματα (Γ2) και (Γ3) με χρήση Μαθηματικής Ανάλυσης και της σχετικής θεωρίας. Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι αντιμετώπισης χρησιμοποιώντας στοιχειώδη μαθηματικά. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε αποκλειστικά στο ερώτημα (Γ2) και δίνουμε απαντήσεις χρησιμοποιώντας μαθηματικά που διδάσκονται σε μικρότερες τάξεις, ακόμη και στην Γ΄ τάξη Γυμνασίου. Απομονώσαμε λοιπόν το ερώτημα (Γ2), επαναδιατυπώσαμε το πρόβλημα και το αντιμετωπίσαμε ανεξάρτητα από το ερώτημα (Γ1).

Το πρόβλημα

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δυο τμήματα. Με το ένα από αυτά κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Βασικές μεταβλητές: Η πλευρά α του τετραγώνου και η ακτίνα ρ του κύκλου

Έστω Π η περίμετρος του τετραγώνου με πλευρά α και L το μήκος του κύκλου με ακτίνα ρ, σε μέτρα. Είναι $\Pi = 4\alpha$ και $L = 2\pi\rho$. Ισχύουν:

- $0 < \Pi < 8 \Leftrightarrow 0 < 4\alpha < 8 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$
- $0 < L < 8 \Leftrightarrow 0 < 2\pi\rho < 8 \Leftrightarrow 0 < \rho < \dfrac{4}{\pi}$
- $\Pi + L = 8 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\pi\rho = 8 \Leftrightarrow 2\alpha + \pi\rho = 4$

Το άθροισμα Ε των εμβαδών των δυο σχημάτων, σε τετραγωνικά μέτρα, είναι:

$$E = \alpha^2 + \pi\rho^2$$

Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα Ε των εμβαδών ελαχιστοποιείται, μόνο όταν $\alpha = 2\rho$.

❶ ος τρόπος

Ισχύει: $4\alpha + 2\pi\rho = 8 \Leftrightarrow \pi\rho = 4 - 2\alpha \Leftrightarrow \rho = \dfrac{4-2\alpha}{\pi}$

Για το άθροισμα Ε των εμβαδών των δυο σχημάτων έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= \alpha^2 + \pi\rho^2 \\ &= \alpha^2 + \pi\left(\frac{4-2\alpha}{\pi}\right)^2 \\ &= \frac{\pi\alpha^2 + 16 - 16\alpha + 4\alpha^2}{\pi} \\ &= \frac{\pi+4}{\pi}\alpha^2 - \frac{16}{\pi}\alpha + \frac{16}{\pi} \end{aligned}$$

Η τιμή του παραπάνω τριωνύμου ως προς α γίνεται ελάχιστη όταν:

$$\alpha = -\frac{-\frac{16}{\pi}}{2\frac{\pi+4}{\pi}} = \frac{8}{\pi+4}$$

Τότε όμως: $2\rho = 2\dfrac{4-2\alpha}{\pi} = 2\dfrac{4-2\frac{8}{\pi+4}}{\pi} = 2\dfrac{4\pi+16-16}{\pi(\pi+4)} = \dfrac{8}{\pi+4} = \alpha$

❷ ος τρόπος

Ισχύει: $4\alpha + 2\pi\rho = 8 \Leftrightarrow 2\alpha = 4 - \pi\rho \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{4-\pi\rho}{2}$

Για το άθροισμα Ε των εμβαδών των δυο σχημάτων έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= \alpha^2 + \pi\rho^2 \\ &= \left(\frac{4-\pi\rho}{2}\right)^2 + \pi\rho^2 \\ &= \frac{16 - 8\pi\rho + \pi^2\rho^2 + 4\pi\rho^2}{4} \\ &= \frac{\pi(\pi+4)}{4}\rho^2 - 2\pi\rho + 4 \end{aligned}$$

Η τιμή του παραπάνω τριωνύμου ως προς ρ γίνεται ελάχιστη όταν:

$$\rho = -\frac{-2\pi}{2\frac{\pi(\pi+4)}{4}} = \frac{4}{\pi+4}$$

Τότε όμως: $\alpha = \dfrac{4-\pi\rho}{2} = \dfrac{4-\pi\frac{4}{\pi+4}}{2} = \dfrac{4\pi+16-4\pi}{2(\pi+4)} = \dfrac{8}{\pi+4} = 2\rho$

❸ ος τρόπος

Ισχύουν $2\alpha + \pi\rho = 4$ και $(\alpha - 2\rho)^2 \geq 0$. Επομένως:

$$\begin{aligned} (2\alpha+\pi\rho)^2 + \pi(\alpha-2\rho)^2 \geq 4^2 + \pi\cdot 0^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\alpha^2 + 4\alpha\pi\rho + \pi^2\rho^2 + \pi\alpha^2 - 4\alpha\pi\rho + 4\pi\rho^2 \geq 16 \\ &\Leftrightarrow \quad (\pi+4)\alpha^2 + \pi(\pi+4)\rho^2 \geq 16 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha^2 + \pi\rho^2 \geq \frac{16}{\pi+4} \\ &\Leftrightarrow \quad E \geq \frac{16}{\pi+4} \end{aligned}$$

Το άθροισμα Ε των εμβαδών γίνεται ελάχιστο όταν ισχύει η ισότητα, δηλαδή μόνο όταν:

$$(\alpha - 2\rho)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\rho$$

❹ ος τρόπος

Για το άθροισμα Ε των εμβαδών των δυο σχημάτων έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= \alpha^2 + \pi\rho^2 \\ &= \frac{(\pi+4)(\alpha^2+\pi\rho^2)}{\pi+4} \\ &= \frac{\pi\alpha^2 + 4\alpha^2 + \pi^2\rho^2 + 4\pi\rho^2}{\pi+4} \\ &= \frac{\pi\alpha^2 - 4\alpha\pi\rho + 4\alpha\pi\rho + 4\alpha^2 + \pi^2\rho^2 + 4\pi\rho^2}{\pi+4} \\ &= \frac{\pi(\alpha-2\rho)^2 + (2\alpha+\pi\rho)^2}{\pi+4} \\ &= \frac{\pi}{\pi+4}(\alpha-2\rho)^2 + \frac{16}{\pi+4} \end{aligned}$$

Η παραπάνω παράσταση γίνεται ελάχιστη μόνο όταν:

$$(\alpha - 2\rho)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\rho$$

❺ ος τρόπος

Στο βιβλίο μαθηματικών της Γ΄ τάξης Γυμνασίου και συγκεκριμένα στην εφαρμογή 7 της σελίδας 47, αποδεικνύεται η ταυτότητα Lagrange. Δηλαδή αποδεικνύεται ότι:

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$$

Αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα για $\alpha=\alpha$, $\beta=\sqrt{\pi}\rho$, $x=2$ και $y=\sqrt{\pi}$ έχουμε:

$$(\alpha^2+\pi\rho^2)(4+\pi)=(2\alpha+\pi\rho)^2+(\sqrt{\pi}\alpha-2\sqrt{\pi}\rho)^2 \Leftrightarrow (\pi+4)E=4^2+\pi(\alpha-2\rho)^2$$

$$\Leftrightarrow E=\frac{\pi}{\pi+4}(\alpha-2\rho)^2+\frac{16}{\pi+4}$$

Το άθροισμα Ε των εμβαδών γίνεται ελάχιστο μόνο όταν:

$$(\alpha-2\rho)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=2\rho$$

❻ ος τρόπος

Στο βιβλίο μαθηματικών προσανατολισμού της Β΄ τάξης Λυκείου και συγκεκριμένα στην εφαρμογή 1 της σελίδας 44, αποδεικνύεται ότι:

αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δυο διανύσματα του επιπέδου τότε: $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\le\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\vec{\alpha}\,||\,\vec{\beta}$, δηλαδή μόνο όταν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$.

Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{\alpha}=(\alpha,\sqrt{\pi}\rho)$ και $\vec{\beta}=(2,\sqrt{\pi})$. Με βάση το παραπάνω έχουμε:

$$\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\le\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow |2\alpha+\pi\rho|\le\left|\sqrt{\alpha^2+\pi\rho^2}\right|\cdot\left|\sqrt{4+\pi}\right|$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2+\pi\rho^2)(\pi+4)\ge(2\alpha+\pi\rho)^2$$

$$\Leftrightarrow (\pi+4)E\ge 4^2$$

$$\Leftrightarrow E\ge\frac{16}{\pi+4}$$

Το άθροισμα Ε των εμβαδών γίνεται ελάχιστο όταν ισχύει η ισότητα, δηλαδή μόνο όταν:

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha & \sqrt{\pi}\rho\\ 2 & \sqrt{\pi}\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\pi}\alpha-2\sqrt{\pi}\rho=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=2\rho$$

Παρατηρήσεις

Το ελάχιστο άθροισμα των εμβαδών είναι:

$$E_{min}=\frac{16}{\pi+4}\simeq 2{,}24\ \text{m}^2$$

Αυτό συμβαίνει μόνο όταν:

$$\alpha=2\rho=\frac{8}{\pi+4}\simeq 1{,}12\ \text{m}$$