



Χαρακτηρισμός ισχυρισμού με αιτιολόγηση ή μόνο αιτιολόγηση;

Του Δ. Σπαθάρα, τ. Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Στα θέματα των Μαθηματικών των Πανελλαδικών εξετάσεων του 2017 ετέθη για πρώτη φορά, στο θέμα Α θεωρίας, ερώτηση «Σ-Λ», η οποία απαιτούσε εκτός από το χαρακτηρισμό και αιτιολόγηση. Έκτοτε έχει γίνει κανόνας και κάθε φορά στις εξετάσεις υπάρχει μια σχετική ερώτηση.

Όπως μπορούμε να δούμε στα θέματα παρελθόντων ετών, σε όλες τις περιπτώσεις, ο ισχυρισμός περιέχει έναν καθολικό ποσοδείκτη και η απάντηση στον χαρακτηρισμό του ισχυρισμού είναι πάντα «ΛΑΘΟΣ». Για την αιτιολόγηση απαιτείται ένα αντιπαράδειγμα για να τεκμηριωθεί ότι δεν ισχύει καθολικά ο ισχυρισμός. Επομένως με το αντιπαράδειγμα αιτιολογείται ο χαρακτηρισμός «ΛΑΘΟΣ» του καθολικού ισχυρισμού.

Το ερώτημα είναι αν θα μπορούσε ο ισχυρισμός να είναι καθολικά αληθής. Τότε πως γίνεται η αιτιολόγηση; Με αντιπαράδειγμα δεν γίνεται. Μόνο με την απόδειξη της πρότασης γίνεται. Αυτό όμως είναι ένα θέμα πλήρους ανάπτυξης.

Αφού λοιπόν ο καθολικός ισχυρισμός είναι πάντοτε ψευδής, ώστε να είναι δυνατόν να αιτιολογηθεί με αντιπαράδειγμα, τότε τι νόημα έχει η ερώτηση για το χαρακτηρισμό «Σ-Λ» και το 1 μόριο που αξιολογείται; Δεν είναι πιο τίμιο να γίνει μια διαφορετική διατύπωση όπως είναι για παράδειγμα η παρακάτω;

Να αιτιολογήσετε γιατί είναι λανθασμένοι οι παρακάτω ισχυρισμοί:

- Αν μία συνάρτηση έχει πλευρικά όρια στο x_0 , τότε έχει πάντοτε όριο στο x_0 .
- Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.

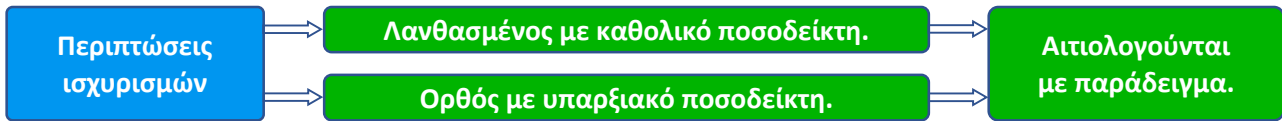
Είναι όμως δυνατόν ο ισχυρισμός να περιέχει ένα υπαρξιακό ποσοδείκτη και η απάντηση, όσο αφορά το χαρακτηρισμό, να είναι «ΣΩΣΤΟ». Η αιτιολόγηση γίνεται με ένα παράδειγμα. Ο υπαρξιακός ισχυρισμός θα πρέπει να είναι αληθής, ώστε να είναι δυνατόν να αιτιολογηθεί με παράδειγμα. Γι' αυτό πιστεύουμε ότι και στην περίπτωση αυτή καλό είναι να δοθεί ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής και να ζητηθεί μόνο η αιτιολόγηση. Για παράδειγμα:

Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ορθοί οι παρακάτω ισχυρισμοί:

- Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι '1-1' χωρίς να είναι γνησίως μονότονες.
- Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες και γνήσια αύξουσες σε ένα διάστημα Δ , αλλά η παράγωγός τους δεν είναι θετική στο εσωτερικό του Δ .

Συμπέρασμα:

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται οι δυο εκδοχές των ισχυρισμών που αιτιολογούνται με παράδειγμα. Αυτές οι δύο εκδοχές δύνανται να αποτελέσουν αντικείμενο ερώτησης 'Σ-Λ', στη θεωρία, με αιτιολόγηση. Κατά τη γνώμη μας και στις δυο αυτές περιπτώσεις δεν έχει νόημα να ζητείται ο χαρακτηρισμός «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ» από τον υποψήφιο, αλλά μόνο η αιτιολόγηση.



Μετά τα παραπάνω προτείνουμε:

Να δίνεται ο χαρακτηρισμός του ισχυρισμού, δηλαδή αν είναι αληθής ή ψευδής και να ζητείται μόνο η αιτιολόγηση και όχι ο χαρακτηρισμός.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΡΕΛΘΟΝΤΩΝ ΕΤΩΝ «Σ-Λ» ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Πανελλαδικές εξετάσεις 2017

- A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»
- α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
- β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)
- Μονάδες 4**

Επαναληπτικές πανελλαδικές εξετάσεις 2017

- A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
- «Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f ».
- α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
- β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)
- Μονάδες 4**

Πανελλαδικές εξετάσεις 2018

- A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
- «Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.»
- α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
- β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)
- Μονάδες 4**

Επαναληπτικές πανελλαδικές εξετάσεις 2018

- A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».
- α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)
- β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Πανελλαδικές εξετάσεις 2019

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**
- α) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

- β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

Πρόταση για εξάσκηση ενόψει των πανελλαδικών εξετάσεων 2020

A3) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι λανθασμένοι οι παρακάτω ισχυρισμοί:

- α) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 , τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
β) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε ελάχιστο αυτής.

A4) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ορθοί οι παρακάτω ισχυρισμοί:

- α) Υπάρχουν συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) \neq 0$.
- β) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες και γνήσια αύξουσες σε ένα διάστημα Δ , αλλά η παράγωγός τους δεν είναι θετική στο εσωτερικό του Δ .

Θερμές ευχαριστίες τον Γιάννη Βελαώρα, πρόεδρο του παραρτήματος Βοιωτίας της ΕΜΕ, για τις εύστοχες παρατηρήσεις του.