ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

- **Εκφωνήσεις των θεμάτων των εξετάσεων**
- **Επεξεργασμένες ενδεικτικές απαντήσεις**
- **Ενδεικτική κατανομή μονάδων ανά ερώτημα**

Επεξεργασία:

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Συντονιστής βαθμολογητών

Νικόλαος Τσοτουλίδης
Μαθηματικός του 5ου ΓΕΛ Λαμίας
Συντονιστής βαθμολογητών

Εισαγωγή

Οι παρακάτω απαντήσεις είναι αυτές που προτείνει η Κ.Ε.Ε. καθώς και μερικές ακόμη που εμφανίζονται συχνά. Προφανώς, όπως συνήθως συμβαίνει στα Μαθηματικά, υπάρχουν και άλλες προσεγγίσεις, όσο αφορά τις απαντήσεις στα θέματα των εξετάσεων. Οποιαδήποτε άλλη προσέγγιση, εκτός από τις παρακάτω, κρίνεται για την ορθότητά της κατά περίπτωση. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Απαντήσεις

	ΘΕΜΑ Α	
Α1	**Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**	7
	Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.	1
	Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.	1
	Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε: $$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$$	3
	Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.	2
Α2	**Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:** **«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0 είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»** **α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)** **β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)**	4
	α) Ψ	1
	β) **<u>1ο Παράδειγμα (από το σχολικό βιβλίο)</u>** Η συνάρτηση f με $f(x)=\lvert x\rvert$, είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.	3
	β) **<u>2ο Παράδειγμα (από το σχολικό βιβλίο)</u>** Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$, είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.	3

β) **<u>3ο Παράδειγμα (από το Θέμα Δ)</u>**

Για τη συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x\eta\mu x)=0$
- $f(0)=0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

Για την παραγωγισιμότητα της f στο 0 έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. **3**

Α3 **Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] ;** **4**

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον **2**

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \text{ και } \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$ **2**

Α4 ***Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη <u>Σωστό</u>, αν η πρόταση είναι σωστή, ή <u>Λάθος</u>, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.***

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. **10**

α	β	γ	δ	ε
Λ	Σ	Λ	Σ	Σ

10

	ΘΕΜΑ Β	
	Δίνονται οι συναρτήσεις και $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\neq 1$.	
B1	**Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.**	5
	Είναι: $D_f=(0,+\infty)$ και $D_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Για να ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$ πρέπει και αρκεί $\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}\neq\varnothing$. Ισοδύναμα έχουμε: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x(x-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$ Επομένως η $f\circ g$ ορίζεται στο σύνολο $D_{f\circ g}=(0,1)$ και έχει τύπο:	3
	$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln(g(x))=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$	2
B2	**Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.**	6
	<u>1ος Τρόπος</u> Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $$h'(x)=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{x(1-x)}$$ Εναλλακτικά: $h'(x)=[\ln x-\ln(1-x)]'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{x(1-x)}$ Ισχύει $h'(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι «1-1» οπότε αντιστρέφεται.	2
	Το σύνολο τιμών της συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης h είναι: $$h((0,1))=\left(\lim_{x\to 0^+}h(x),\lim_{x\to 1^-}h(x)\right)$$ Θέτουμε $u=\dfrac{x}{1-x}$, $0<x<1$ και έχουμε: • $\lim\limits_{x\to 0^+}u=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1-x}=0$ με $\dfrac{x}{1-x}>0$ $(u\to 0^+)$ $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to 1^-}u=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{1-x}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0$ και $1-x>0$ για $0<x<1$ $\lim\limits_{x\to 1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$ Τελικά το σύνολο τιμών της h είναι $h((0,1))=\mathbb{R}$ και επομένως $D_{h^{-1}}=\mathbb{R}$.	1

	Για την εύρεση του τύπου της h^{-1} ισοδύναμα έχουμε: $y=h(x)\Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x}$ $\Leftrightarrow e^y-xe^y=x\Leftrightarrow e^y=xe^y+x$ $\Leftrightarrow e^y=x(e^y+1)\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{e^y+1}$, αφού $e^y+1>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$ Επομένως $h^{-1}(y)=\frac{e^y}{e^y+1}$, $y\in\mathbb{R}$ ή $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	3
	<u>2ος Τρόπος</u> Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,1)$ με $h(x_1)=h(x_2)$ ισοδύναμα έχουμε: $h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)\Leftrightarrow \frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2}\Leftrightarrow x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ Επομένως η συνάρτηση h είναι «1-1» άρα αντιστρέφεται.	2
	Για την εύρεση του πεδίου ορισμού και του τύπου της h^{-1} έχουμε: $\begin{cases}y=h(x)\\x\in(0,1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\\0<x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^y=\frac{x}{1-x}\\0<x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^y-xe^y=x\\0<x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^y=xe^y+x\\0<x<1\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}e^y=x(e^y+1)\\0<x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{e^y}{e^y+1}, y\in\mathbb{R} \text{ αφού } e^y+1>0 \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R}\\0<x<1\end{cases}$ Όμως ισχύει $0<\frac{e^y}{e^y+1}<1$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση h^{-1} ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και έχει τύπο: $h^{-1}(y)=\frac{e^y}{e^y+1}$, $y\in\mathbb{R}$ ή $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	4
B3	**Αν $\phi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.**	7
	Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\phi'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ Ισχύει $\phi'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα και δεν παρουσιάζει ακρότατα.	3
	Η φ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\phi''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{(e^x+1)e^x\left[(e^x+1)-2e^x\right]}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$	3

Έχουμε:

$\phi''(x)=0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$\phi''(x)>0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi''(x)$		+	0	−	
$\phi(x)$		⌣	Σ.Κ.	⌢	

Η συνάρτηση φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η γραφική παράσταση της φ έχει σημείο καμπής το $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ **1**

B4 **Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.** **7**

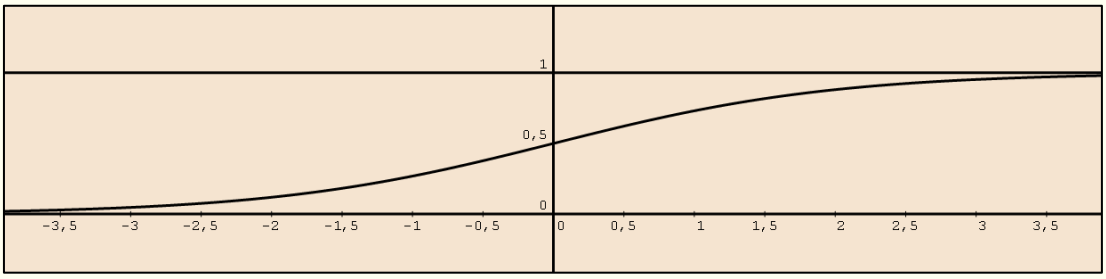
Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$ **2**

Άρα η γραφική παράσταση της φ έχει στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H.}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$ **2**

Άρα η γραφική παράσταση της φ έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$

Η γραφική παράσταση της φ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα: **3**



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$

Γ1 **Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.** **8**

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(x_0,f(x_0))$, $x_0\in[0,\pi]$ έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0)$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ αν και μόνο αν: **2**

$$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\sigma\upsilon\nu x_0+\eta\mu x_0-\frac{\pi}{2}=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,\pi]$ **1**

Παρατηρούμε ότι $h(0)=0$ και $h(\pi)=0$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι αυτές οι δυο ρίζες της εξίσωσης $h(x)=0$ είναι μοναδικές στο $[0,\pi]$.

<u>1ος Τρόπος για τη μοναδικότητα των ριζών</u>

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με

$$h'(x)=-\sigma\upsilon\nu x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$$

Έχουμε:

- $h'(x)=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=\pi$
- $h'(x)>0\Leftrightarrow\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x>0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<x<\pi$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
h'(x)		−	0	+	
h(x)		↘		↗	

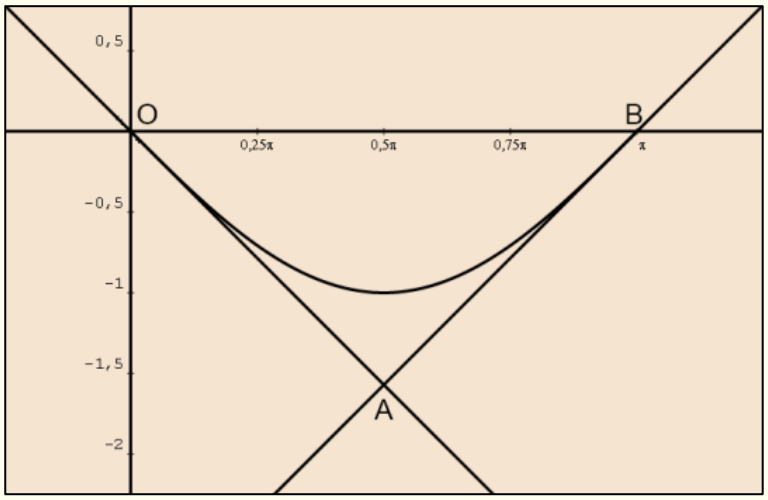
3

- Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

  Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 0 στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και $\pi\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

  Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το π στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

	<u>2ος Τρόπος για τη μοναδικότητα των ριζών</u> Έστω ότι υπάρχει και τρίτη ρίζα $x_0 \in (0,\pi)$ της εξίσωσης $h(x)=0$. Τότε: • Η h είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,\pi]$ • Η h είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,x_0)$ και (x_0,π) • $h(0)=h(x_0)=h(\pi)$ Συνεπώς από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (0,x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,\pi)$ τέτοια ώστε $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$ το οποίο είναι άτοπο διότι $h'(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$ και η μόνη ρίζα της εξίσωσης $h'(x)=0$ στο $(0,\pi)$ είναι η $x=\frac{\pi}{2}$.	3
	Τελικά η εξίσωση $h(x)=0$ έχει δυο ακριβώς ρίζες στο $[0,\pi]$, το 0 και το π. Από αυτές τις δυο ρίζες προκύπτουν δυο ακριβώς σημεία επαφής $M_1(0,h(0))$, $M_2(\pi,h(\pi))$. Οι δύο εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία αυτά διέρχονται από το Α και είναι: • για $x_0=0 \rightarrow (\varepsilon_1): y=-x$ και • για $x_0=\pi \rightarrow (\varepsilon_2): y=x-\pi$	2
Γ2	**Αν $(\varepsilon_1): y=-x$ και $(\varepsilon_2): y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi^2}{8}-1$, όπου:** • **$E_1$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και** • **E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x'x.**	6
	Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) καθώς και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.  	1

	• $E_2=\int_0^{\pi}\lvert f(x)\rvert dx=-\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=1+1=2$	2
	• $E_1=(OAB)-E_2=\dfrac{\lvert\pi\rvert\cdot\left\lvert-\dfrac{\pi}{2}\right\rvert}{2}-2=\dfrac{\pi^2}{4}-2$	2
	Τελικά $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\dfrac{\pi^2}{4}-2}{2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$	1
Γ3	**Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$**	4
	Αρχικά θα αποδείξουμε ότι: $f(x)-x+\pi=-\eta\mu x-x+\pi>0$ (I) για κάθε $x\in[0,\pi)$.	
	<u>1ος Τρόπος (για τη σχέση I)</u> Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f''(x)=\eta\mu x$. Ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi,0)$. Άρα ισχύει: $f(x)>x-\pi\Leftrightarrow-\eta\mu x-x+\pi>0$ για κάθε $x\in[0,\pi)$.	2
	<u>2ος Τρόπος (για τη σχέση I)</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=-\eta\mu x-x+\pi$, $x\in[0,\pi]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $g'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1$ Ισχύει $g'(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi)$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ Έτσι έχουμε: $0\le x<\pi\Leftrightarrow g(x)>g(\pi)\Leftrightarrow-\eta\mu x-x+\pi>0$	2
	<u>3ος Τρόπος (για τη σχέση I)</u> Για κάθε $x\in[0,\pi)$ ισχύει: $\lvert\eta\mu(\pi-x)\rvert<\lvert\pi-x\rvert\Leftrightarrow\eta\mu(x-\pi)<\pi-x\Leftrightarrow\eta\mu x<\pi-x\Leftrightarrow-\eta\mu x-x+\pi>0$	2
	Τελικά για το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\right]$ έχουμε: • $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=-0+\pi=\pi>0$ • $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)-x+\pi\right)=\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x-x+\pi)=-0-\pi+\pi=0$ και $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$, αφού $f(x)-x+\pi=-\eta\mu x-x+\pi>0$ Επομένως $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\right]=\pi\cdot(+\infty)=+\infty$	2

	<u>4ος Τρόπος (για όλο το ερώτημα)</u> Θέτουμε $u=\pi-x$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to\pi}u=\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)=0$ και το δοσμένο όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[\left(-\eta\mu x+x\right)\cdot\dfrac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}\right]$ $=\lim\limits_{u\to0^+}\left[\left(-\eta\mu(\pi-u)+\pi-u\right)\cdot\dfrac{1}{-\eta\mu(\pi-u)+u}\right]$ $=\lim\limits_{u\to0^+}\left[\left(-\eta\mu u+\pi-u\right)\cdot\dfrac{1}{u-\eta\mu u}\right]=\pi\cdot(+\infty)=+\infty$	3
	αφού $\lim\limits_{u\to0^+}(u-\eta\mu u)=0$ και $\eta\mu u<u\Leftrightarrow u-\eta\mu u>0$ για κάθε $u\in(0,\pi)$	1
Γ4	**Να αποδείξετε ότι $\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$**	7
	<u>1ος Τρόπος</u> Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f''(x)=\eta\mu x$. Ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$. Άρα η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi,0)$. Συνεπώς ισχύει: $f(x)>x-\pi\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}>1-\dfrac{\pi}{x}$ για κάθε $x\in[1,e]\subseteq(0,\pi)$.	3
	Επομένως $\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)dx\Leftrightarrow\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>\left[x-\pi\ln\lvert x\rvert\right]_1^e\Leftrightarrow\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1$	4
	<u>2ος Τρόπος</u> Για κάθε $x\in[1,e]\subseteq[0,\pi]$ ισχύει: $\eta\mu x\le1\Leftrightarrow-\eta\mu x\ge-1\Leftrightarrow\dfrac{-\eta\mu x}{x}\ge\dfrac{-1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}\ge\dfrac{-1}{x}$	3
	Η ισότητα δεν ισχύει παντού, άρα $\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(-\dfrac{1}{x}\right)dx\Leftrightarrow\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>\left[-\ln\lvert x\rvert\right]_1^e\Leftrightarrow\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>-1$ Όμως $-1>e-1-\pi$, οπότε $\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$	4
	<u>3ος Τρόπος</u> Για κάθε $u\in[0,1]$ ισχύει: $\eta\mu e^u\le1\Leftrightarrow-\eta\mu e^u\ge-1\Leftrightarrow f(e^u)\ge-1$.	3
	Η ισότητα δεν ισχύει παντού, άρα $\int_0^1 f(e^u)du>\int_0^1(-1)du\Leftrightarrow\int_0^1 f(e^u)du>\left[-u\right]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 f(e^u)du>-1$ Θέτουμε $e^u=x\Leftrightarrow u=\ln x$ και έχουμε: $du=\dfrac{1}{x}dx$. Οπότε: $\int_0^1 f(e^u)du>-1\Leftrightarrow\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>-1$ Όμως $-1>e-1-\pi$, οπότε $\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$	4
	<u>Σχόλιο:</u> Το κάτω φράγμα -1 είναι μεγαλύτερο του ζητούμενου κάτω φράγματος.	

	ΘΕΜΑ Δ	
	Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$	
Δ1	**Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.**	5
	Το πεδίο ορισμού της f είναι το $[-1,0)\cup[0,\pi]=[-1,\pi]$. Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Η f είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον έχουμε: • $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$ • $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x\eta\mu x)=0$ • $f(0)=0$ Επομένως $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0. Τελικά η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$	1
	Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με $$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(\lvert x\rvert^{\frac{4}{3}}\right)'=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)'=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$$ Για $x\in(-1,0)$ ισχύει $f'(x)=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0$. Άρα $f'(x)\neq0$ για κάθε $x\in(-1,0)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi]$ με $$f'(x)=(e^x\eta\mu x)'=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$$ Για $x\in(0,\pi)$ έχουμε: $e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x$ $\quad(\eta\mu x>0$ για $0<x<\pi)$ $$\Leftrightarrow\sigma\varphi x=-1\Leftrightarrow\sigma\varphi x=\sigma\varphi\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$	2
	Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Έχουμε: • $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim\limits_{x\to0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=0$ • $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^x\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot1=1$ Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.	1
	Κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του $[-1,\pi]$ στο οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη ή $f'(x)=0$ Επομένως κρίσιμα σημεία της f είναι το 0 και το $\frac{3\pi}{4}$	1

Δ2	**Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.**	6

Έχουμε $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, & \text{αν } x\in[-1,0) \\ e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x), & \text{αν } x\in(0,\pi] \end{cases}$

- Αν $x\in[-1,0)$ ισχύει $f'(x)=-\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0$
- Αν $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ισχύει $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\neq 0$ και αφού η f΄ είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

  Όμως $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$.
- Αν $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ ισχύει $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\neq 0$ και αφού η f΄ είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο στο $\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$.

  Όμως $f'(\pi)=-e^{\pi}<0$, άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$.

x	−1		0		$3\pi/4$		π
f'(x)		−		+	0	−	
f(x)		↘		↗		↘	
		Τ.Μ.	Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$

3

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=1$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\dfrac{3\pi}{4}$ το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο π το $f(\pi)=0$

2

Εύρεση του συνόλου τιμών

<u>1ος Τρόπος (για το σύνολο τιμών)</u>

Το ολικό ελάχιστο της f είναι το $m=0$ και το ολικό μέγιστο είναι το $M=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

αφού $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}>2$ που ισχύει.

Η f είναι συνεχής, επομένως το σύνολο τιμών της είναι το $[m,M]=\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

1

	<u>2ος Τρόπος (για το σύνολο τιμών)</u> • Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=[-1,0]$, άρα $f(\Delta_1)=[f(0),f(-1)]=[0,1]$ • Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$, άρα $f(\Delta_2)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$ • Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3=\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, άρα $f(\Delta_3)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$ Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$	1
Δ3	**Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα y'y και την ευθεία $x=\pi$.**	6
	Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E=\int_0^{\pi}\left\|f(x)-e^{5x}\right\|dx=\int_0^{\pi}\left\|e^x\eta\mu x-e^{5x}\right\|dx$ Όμως για κάθε $x\in[0,\pi]$ έχουμε: $e^x\eta\mu x-e^{5x}=e^x(\eta\mu x-e^{4x})<0$ αφού • $x\geq 0\Leftrightarrow 4x\geq 0\Leftrightarrow e^{4x}\geq 1$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$ • $1\geq\eta\mu x$ με την ισότητα να ισχύει για $x=\frac{\pi}{2}$. Άρα $e^{4x}>\eta\mu x$ Επομένως το εμβαδόν είναι: $E=\int_0^{\pi}(e^{5x}-e^x\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x\,dx=I_1+I_2$	3
	• $I_1=\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}$	1
	• $I_2=\int_0^{\pi}(e^x)'\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=-\int_0^{\pi}(e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx$ $=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=e^{\pi}+1-I_2$ Άρα $2I_2=e^{\pi}+1\Leftrightarrow I_2=\frac{e^{\pi}+1}{2}$ Τελικά $E=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}$	2
Δ4	**Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$**	8
	<u>1ος Τρόπος</u> Έχουμε: $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{8\sqrt{2}}{16}e^{\frac{3\pi}{4}}$ $\Leftrightarrow f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$	3
	Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι το $\frac{3\pi}{4}$.	1

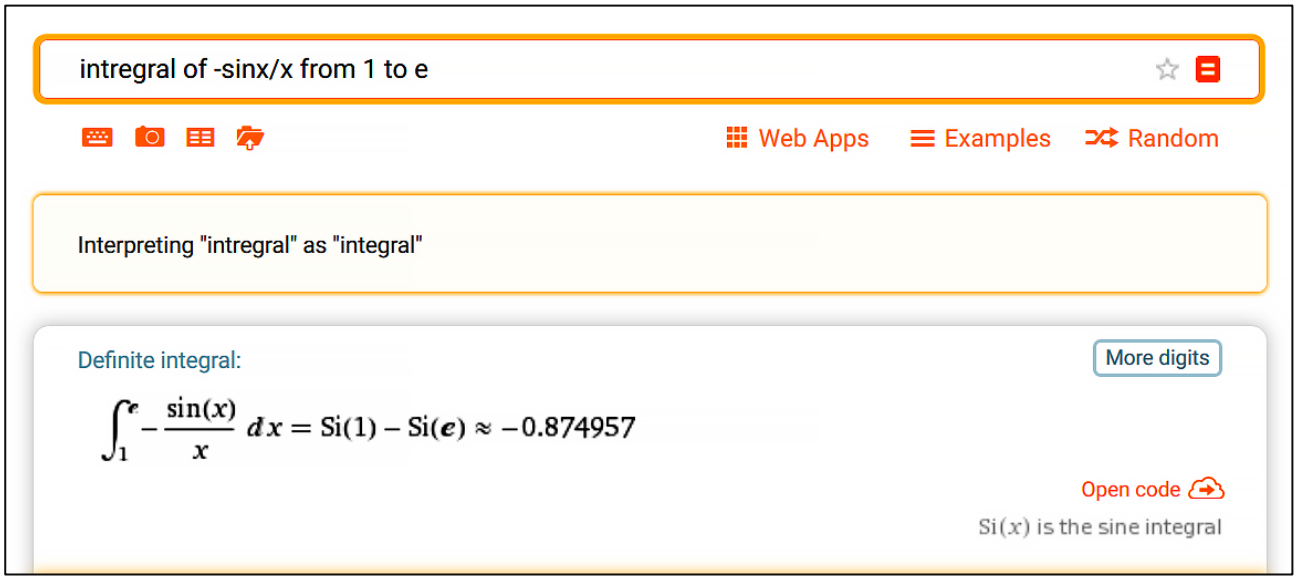
	Το $\frac{3\pi}{4}$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης διότι: • $f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \le 0$ λόγω του συνόλου τιμών της f και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$. • $\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$.	4
	<u>2ος Τρόπος</u> Λόγω του ολικού μέγιστου της f έχουμε: $f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow 16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) \le 8\sqrt{2}$ με τη ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$.	4
	Επίσης έχουμε: $-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 \le 0$ με τη ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$.	2
	Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 \le 8\sqrt{2}$ Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$. Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι $x = \frac{3\pi}{4}$.	2

Παρατηρήσεις

Για το ερώτημα Γ4

Όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα, μια προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^e \frac{-\eta\mu x}{x}dx$ είναι: $\int_1^e \frac{-\eta\mu x}{x}dx \approx -0{,}874957$.

Με ένα smartphone βρίσκουμε μια προσέγγιση του $e-1-\pi$ που είναι: $e-1-\pi \approx -1{,}423310$



Για το ερώτημα Δ2

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1,0) \\ e^x \eta\mu x, & x \in [0,\pi] \end{cases}$