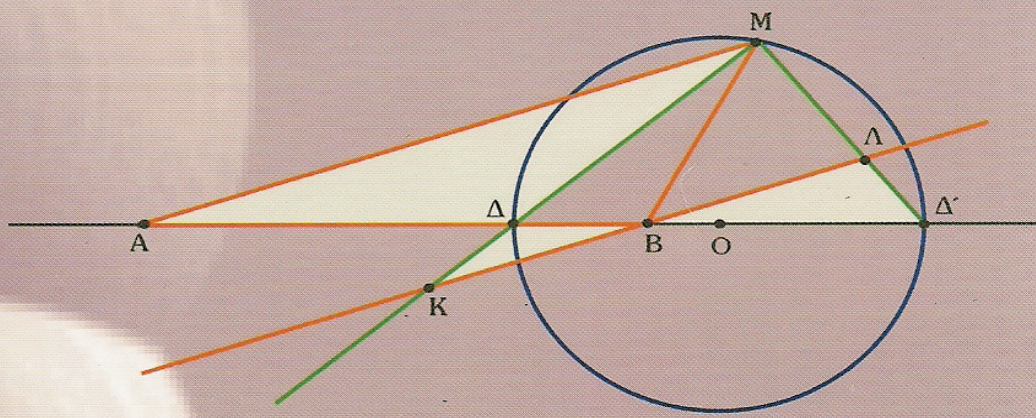
Περιοδική έκδοση του παραρτήματος της Ελληνικής
Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας

Απολλώνιος



Τεύχος 3ο
Τιμή 5 €

Απρίλιος 2004

Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Ν. Ημαθίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο **ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ** ξεκίνησε τον Απρίλιο του 2003 με πρωτότυπα άρθρα και ασκήσεις που αφορούν στην ύλη του Λυκείου. Το δεύτερο τεύχος εκδόθηκε τον Οκτώβριο του 2003 και το τρίτο τεύχος εκδίδεται τον Απρίλιο του 2004. Η ανταπόκριση των αναγνωστών υπήρξε θεαματική με αποτέλεσμα να δημιουργείται τεχνικό πρόβλημα εξαιτίας του όγκου των εργασιών και των ασκήσεων. Η Σ.Ε. του **ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ**, ανταποκρινόμενη στην αγάπη και το ενδιαφέρον των αναγνωστών του περιοδικού, κάνει ό,τι είναι δυνατό για να λυθούν τα σχετικά προβλήματα και να συνεχιστεί απρόσκοπτα η έκδοση του **ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ**.

Συνάδελφοι,

στηρίξτε τον **ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ** με την προβολή του και προώθησή του σε συναδέλφους και μαθητές σας. Η επιβίωση και η μακροζωία του **ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ** εξαρτιέται από τη δική σας θετική ανταπόκριση.

Σας ευχαριστούμε όλους και ευελπιστούμε στη συνέχιση της συνεργασίας σας.

Η Σ.Ε. του **ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ**

Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Ν. Ημαθίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Τεύχος 3ο, Απρίλιος 2004

Ιδιοκτήτης:
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία,
Παράρτημα Ημαθίας

Εκδότης:
Παπαδόπουλος Κώστας

Υπεύθυνος σύνταξης:
Ιωσηφίδης Νίκος

Συντακτική Επιτροπή:
Απλακίδης Γιάννης
Ζανταρίδης Νίκος
Ιωσηφίδης Νίκος
Μιχαηλίδου Γεωργία
Παπαδόπουλος Κώστας
Παπαδόπουλος Μανώλης
Τσιπρόπουλος Αντώνης

Επιμέλεια μη μαθηματικών κειμένων:
Μόσχου Έλενα, Φιλόλογος

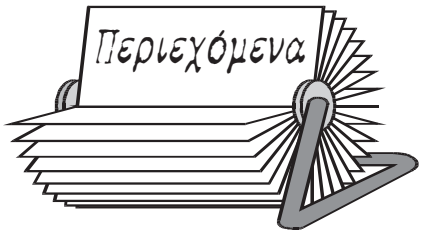
Ηλεκτρονική στοιχειοθεσία:
Ρίζος Γιώργος, Μαθηματικός, Κέρκυρα
Τηλ. και fax: 26610 33243

Εξώφυλλο:
Παπαδόπουλος Μανώλης,
Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας

Εκτύπωση:
Τσιαρτσιάνης Αθανάσιος, Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 - 682080

Διεύθυνση:
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία,
Παράρτημα Ημαθίας
Κουντουριώτη 8, 591 00 ΒΕΡΟΙΑ
Τηλ και fax: 23310-67107

Διεύθυνση επικοινωνίας, αποστολή εργασιών:
Ιωσηφίδης Νίκος,
Τρεμπεσίνας 6, 591 00 ΒΕΡΟΙΑ
Τηλ. 23310-20143 και 23310-29504
Fax: 23310-20408
e-mail: iossifid@otenet.gr



Ειδήσεις – Πληροφορίες – Νέα

- Το 20ο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας στη Βέροια 5
- Ημερίδα Μαθηματικών 7

Απόδειξη και Σχολικά Μαθηματικά, Χαλάτσης Αθανάσιος 8
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Μήτσιου Ελένη 20
Τα Μαθηματικά και ο Άνθρωπος, Κερασαρίδης Γιάννης 27
Η Αριθμοφοβία και οι ευθύνες των Μαθηματικών, Ρίζος Γιώργος 29
Ερατοσθένης, Ιωσηφίδου Κωνσταντία 41
Η Γεωμετρία του τριγώνου στην Ελλάδα και το έργο
του Γεωργίου Καπέτη, Πούλος Ανδρέας 49

Επισημάνσεις - Διευκρινίσεις πάνω στη Σχολική ύλη

- Πεδίο ορισμού – Παράγωγος συνάρτησης $F(x)=\int_{A(x)}^{B(x)} f(t)\,dt$, $t\in\Delta$,
Γεωργακίλας Δημήτρης 60
- Μία πρακτική εφαρμογή του ιστογράμματος συχνοτήτων,
Τσιτούρης Γιάννης 65

Στοιχειώδη εναντίον Ανωτέρων Μαθηματικών,
Δεργιαδές Νίκος, Λάμπρου Μιχάλης 66
Πλέγματα, Ιωσηφίδης Νίκος 81
Διάταξη – Ολυμπιάδες, Στεργίου Μπάμπης 97
Το παιγνίδι με τα καρδάρια, Δόρτσιος Κώστας, Ζεμπίλης Κώστας 113
Ευκλείδης ή Καρτέσιος; Απλακίδης Α. Ιωάννης 117
Ένα Μαθηματικό πρόβλημα, στα πλαίσια μιας ερευνητικής εργασίας,
Ντρίζος Δημήτρης, Πατήλας Χρήστος 121
Πυθαγόρειες τριάδες, Σβέρκος Ανδρέας 124

Στατιστικά παραδοξα, Ιωσηφίδης Γιώργος 128
Εύρεση των εστιών των κωνικών τομών από το περίγραμμά τους, Απλακίδης Α. Ιωάννης 132
Επεκτάσεις – Γενικεύσεις της πρότασης του "Ισοπλεύρου Τριγώνου", Κυριαζής Νίκος 138
Προβληματισμός, Ιωσηφίδης Νίκος 149
Η ευθεία S N 151
- Απόδειξη Θεωρήματος S N, Βήττας Κωνσταντίνος 152
- Ο «Γόρδιος Δεσμός» και η Ευκλείδεια Γεωμετρία, Χρυσοστομίδης Θεόφιλος 159

Πρόταση Καραθεοδωρή, Χρυσοστομίδης Θεόφιλος 163

Προτεινόμενες ασκήσεις με ιστορικό ενδιαφέρον, Θωμαΐδης Γιάννης 165
Προβληματισμός, Επιμέλεια: Χρυσοστομίδης Θεόφιλος 166
Ένα θέμα για προβληματισμο, Επιμέλεια: Απλακίδης Α. Ιωάννης 167
Προβληματισμός με αφορμή μια άσκηση, Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ 168

Στήλη Αλληλογραφίας 170

Έβδομη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών (JBMO) 183

Θέματα Πανελλαδικών εξετάσεων στα Μαθηματικά 2003 194

Προτεινόμενες ασκήσεις για λύση 205
Διορθώσεις 2ου τεύχους ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ 224

ΕΙΔΗΣΕΙΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ, ΝΕΑ
ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ

ΜΕ ΠΟΛΥ ΜΕΓΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΗΚΕ ΤΟ 2Ο ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΣΤΗ ΒΕΡΟΙΑ

Το Παράρτημα Ημαθίας της Ε.Μ.Ε. νοιώθει περήφανο για την πραγματοποίηση ενός εξαιρετικού Συνεδρίου. Ενός Συνεδρίου, που, σύμφωνα με τη δήλωση του ιδίου του Προέδρου της Ε.Μ.Ε. καθηγητή κ. Ν. Αλεξανδρή, ήταν το καλύτερο από τα 20, που διοργάνωσε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Χαρακτηριστικά του Συνεδρίου· η οργανωτική αρτιότητα, οι εξαιρετικοί συνεδριακοί χώροι, η πλήρης τεχνική και ηλεκτρονική υποδομή, το πλούσιο υλικό που δόθηκε, στους συνέδρους.

Το Συνέδριο παρακολούθησαν περισσότερα από 900 άτομα. Οι εγγραφές των συνέδρων ανήλθαν σε 750, δημιουργώντας ρεκόρ συμμετοχής. Υπολογίζεται ότι για το Συνέδριο ήρθαν στην Ημαθία περισσότερα από 1.500 άτομα.

Το Συνέδριο ξεκίνησε στο Χώρο Τεχνών, με επίσημη έναρξη την Παρασκευή 7 Νοεμβρίου 2003. Οι χαιρετισμοί κατά την τελετή έναρξης ξεκίνησαν από το Σεβασμιότατο Μητροπολίτη Βεροίας και Ναούσης κ. Παντελεήμονα και συνεχίσθηκαν από τον Πρόεδρο της Ε.Μ.Ε. καθηγητή κ. Ν. Αλεξανδρή, τον Πρόεδρο του Παραρτήματος Ημαθίας κ. Κ. Παπαδόπουλο, τον Νομάρχη Ημαθίας κ. Ι. Σπάρτση, το Δήμαρχο Βέροιας κ. Χ. Σκουμπόπουλο, εκπροσώπους Οργανώσεων Εκπαιδευτικών, Πολιτικών Κομμάτων και Βουλευτών.

Άποψη της Αίθουσας του Χώρου Τεχνών, κατά τη διάρκεια του Συνεδρίου.

Οι εργασίες του Συνεδρίου πραγματοποιήθηκαν ταυτόχρονα σε δύο χώρους: το Χώρο Τεχνών και τη Στέγη Γραμμάτων και Τεχνών. Για το επιστημονικό μέρος, έγιναν 4 κεντρικές ομιλίες, 2 στρογγυλά τραπέζια και 54 εισηγήσεις. Οι κεντρικές ομιλίες και οι εισηγήσεις υπάρχουν στα Πρακτικά του Συνεδρίου, που δόθηκαν στους συνέδρους, τόσο σε μορφή βιβλίου, όσο και σε CD. Σε όλες τις ομιλίες οι αίθουσες του Συνεδρίου ήταν γεμάτες. Στο τελευταίο Στρογγυλό Τραπέζι, που πραγματοποιήθηκε την Κυριακή 9 Νοεμβρίου, με θέμα "Εισαγωγικές Εξετάσεις και Μαθηματική Εκπαίδευση", μέσα από εκτεταμένο διάλογο, αλλά και έντονες αντιπαραθέσεις, αναδείχθηκε το λάθος στο ζήτημα 4γ των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου, στις εξετάσεις του Ιουνίου 2003.

Το Σάββατο, οι Σύνεδροι και οι συνοδοί τους περιηγήθηκαν στους βασιλικούς τάφους της Βεργίνας, ενώ το βράδυ της ίδιας μέρας, στην καθιερωμένη δεξίωση που δόθηκε στους χώρους του ξενοδοχείου "ΑΙΓΕΣ ΜΕΛΑΘΡΟΝ", 950 άτομα διασκέδασαν και χόρεψαν μέχρι τις πρώτες πρωινές ώρες. Οι σύνεδροι είχαν την ευκαιρία να παρακολουθήσουν δύο εξαιρετικά χορευτικά συγκροτήματα, τα οποία καταχειροκροτήθηκαν: τις "ΜΠΟΥΛΕΣ" από τη Νάουσα και το χορευτικό συγκρότημα της Ευξείνου Λέσχης της Βέροιας.

Όλες τις μέρες οι σύνεδροι είχαν την ευκαιρία να επισκεφθούν τα αξιοθέατα του Νομού Ημαθίας.

Το Συνέδριο στη Βέροια έβαλε τον πήχυ των Συνεδρίων πιο ψηλά για τους επόμενους διοργανωτές, που

είναι το Παράρτημα Τρικάλων της Ε.Μ.Ε. Ευχή όλων είναι, τα Τρίκαλα να πραγματοποιήσουν ένα καλύτερο Συνέδριο. Το θέμα του Συνεδρίου των Τρικάλων, που θα γίνει τον Νοέμβριο του 2004, είναι: "**Το Αναλυτικό Πρόγραμμα και η Διδακτική Προσέγγιση των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια και στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση**".

ΜΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΗΚΕ Η ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Με μεγάλη συμμετοχή των Μαθηματικών του Νομού Ημαθίας αλλά και γειτονικών νομών πραγματοποιήθηκε το Σάββατο 28 Φεβρουαρίου η **Ημερίδα Μαθηματικών** που διοργάνωσε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία και ο Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών κ. Θεόδωρος Κουφός. Η Ημερίδα πραγματοποιήθηκε στο ξενοδοχείο «Αιγές» στη Βέροια. Εισηγητές ήταν οι: **Βασίλειος Παπαδόπουλος**, καθηγητής του Πολυτεχνείου Ξάνθης και **Αθανάσιος Χαλάτσης**, αναπληρωτής καθηγητής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου.

Η εκδήλωση ξεκίνησε με χαιρετισμό του Προέδρου του Παραρτήματος Κώστα Παπαδόπουλο ο οποίος αναφέρθηκε στο πρόγραμμα δραστηριότητας του Παραρτήματος. Ακολούθησε ένας σύντομος χαιρετισμός από τον Διευθυντή Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης κ. Αθανάσιο Κούτρα και κατόπιν η παρουσίαση των προσκεκλημένων ομιλητών από τον Σύμβουλο Μαθηματικών κ. Θ. Κουφό, ο οποίος επεσήμανε την ανάγκη πραγματοποίησης και άλλων παρόμοιων εκδηλώσεων.

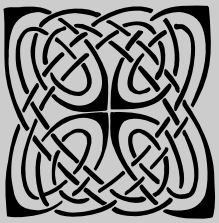
Η πρώτη εισήγηση πραγματοποιήθηκε από τον καθηγητή κ. Β. Παπαδόπουλο και είχε θέμα «**Σύγχρονες επεκτάσεις της Θεωρίας Συνόλων**». Ο ομιλητής έδειξε με παρατατικό τρόπο πως απλά και στοιχειώδη Μαθηματικά δημιουργούν Μαθηματικά μοντέλα απαραίτητα στη σύγχρονη Τεχνολογία με πάρα πολλές εφαρμογές. Ακολούθησε η εισήγηση από τον καθηγητή κ. Αθ. Χαλάτση με θέμα «**Η απόδειξη στα σχολικά Μαθηματικά**»(*).

Στην εισήγησή του ο ομιλητής ανέδειξε τη σημασία της απόδειξης στα Μαθηματικά από φιλοσοφική σκοπιά, παρουσίασε την ιστορική διαδρομή της απόδειξης και αναφέρθηκε στο θέμα της απόδειξης μέσα από τα σχολικά Μαθηματικά. Μετά το τέλος των εισηγήσεων ακολούθησε διάλογος με ερωτήσεις και τοποθετήσεις των παρισταμένων.

Στις 20 Μαρτίου 2004, η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, στο Χώρο Τεχνών, θα τιμήσει τους μαθητές που διακρίθηκαν στους διαγωνισμούς της Ε.Μ.Ε., ενώ το βράδυ της ίδιας μέρας θα πραγματοποιηθεί και ο χορός των Μαθηματικών στο Ξενοδοχείο «Αιγές». Μέσα στον προγραμματισμό των εκδηλώσεων της Διοικούσας Επιτροπής υπάρχουν και άλλες παρόμοιες εκδηλώσεις με αξιόλογους Μαθηματικούς.

Η ΔΙΟΙΚΟΥΣΑ ΕΠΙΤΡΟΠΗ.

(*) Το κείμενο της ομιλίας του κ. Αθ. Χαλάτση δημοσιεύεται σ' αυτό το τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ. Στο επόμενο τεύχος θα δημοσιευτεί η ομιλία του κ. Β. Παπαδόπουλου.



Απόδειξη και Σχολικά Μαθηματικά

Χαλάτσης Αθανάσιος(*)
Αναπλ. καθηγητής
του Παιδαγωγικού τμήματος του Α.Π.Θ.

Η απόδειξη στα μαθηματικά και τα ίδια τα μαθηματικά, όπως τα γνωρίζουμε σήμερα, έχουν εισαχθεί και διαμορφωθεί από τους αρχαίους Έλληνες της κλασικής περιόδου (600 ως 300 π.Χ.). Τα μαθηματικά των παλαιότερων πολιτισμών – των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων – ήταν απλά εμπειρικά συμπεράσματα. Ήταν αλγόριθμοι, και η εμπιστοσύνη για την ορθότητα αυτών των αλγορίθμων στηριζόταν μόνο στην εμπειρία. Οι πρώτες αποδείξεις αποδίδονται στο Θαλή .

Λέγεται πως ο Θαλής απέδειξε:

ότι (i) *Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες,*

ότι (ii) *Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες*,

κι ότι (iii) *Η εγγεγραμμένη γωνία σε ημιπεριφέρεια είναι ορθή*.

Φυσικά, το κατόρθωμα του Θαλή δε βρίσκεται στην επινόηση αυτών των αποδείξεων, αλλά *στην ιδέα ότι απαιτείται απόδειξη για κάθε μια από τις παραπάνω προτάσεις, κι ότι τέτοιες αποδείξεις είναι δυνατές*.

Αν θεωρήσουμε, λοιπόν, αληθινή αυτή την ιστορική πληροφορία σχετικά με το Θαλή, θα λέγαμε πως στις αρχές του 6ου π.Χ. αιώνα, σε μια γωνιά της Ιωνίας, συνέβη κάτι πολύ σημαντικό. Γεννήθηκε η ιδέα της μαθηματικής απόδειξης. Η ιδέα πως, *για να δεχτούμε ότι ισχύει μια μαθηματική πρόταση, πρέπει αυτή να προκύπτει ως λογικό συμπέρασμα άλλων προτάσεων που ήδη δεχτήκαμε ότι ισχύουν*. Και για να δεχτούμε βέβαια ότι ισχύουν αυτές οι άλλες προτάσεις, πρέπει κι αυτές να έχουν προκύψει ως λογικό συμπέρασμα κάποιων άλλων προτάσεων, κ.ο.κ.

Όμως, η συνεχής αναγωγή σε προτάσεις που ισχύουν δεν μπορεί παρά να είναι περατωμένη. Πρέπει να ξεκινάμε από κάποιες προτάσεις, δεχόμενοι την ισχύ τους με διαισθητικά κριτήρια, κι όχι επειδή προέκυψαν συμπερασματικά από την ισχύ άλλων προτάσεων.

(*) Εισήγηση σε εκδήλωση του παραρτήματος Ημαθίας της Ε.Μ.Ε. στις 28-2-2004.

Ο Αριστοτέλης παρατηρεί πως: «Δεν μπορούν ν' αποδειχθούν τα πάντα. Αλλιώς, η ακολουθία των συλλογισμών θα ήταν ατέλειωτη. Πρέπει να ξεκινάς από κάπου, και ξεκινάς από πράγματα που είναι παραδεκτά, αλλά δεν είναι δυνατό ν' αποδειχτούν. Αυτά αποτελούν τις *πρώτες αρχές*, τα λεγόμενα *αξιώματα.* Δηλαδή, *τις κοινές παραδοχές πάνω στις οποίες θα εφαρμοστούν οι συλλογισμοί μας*».

Ο ισχυρισμός ότι "*από δύο σημεία διέρχεται μία και μόνο μία ευθεία"* είναι μια έκφραση της αντίληψής μας του τι είναι ευθεία και του τι είναι σημείο. Ο ισχυρισμός αυτός είναι ένα *αξίωμα*. Δεν μπορεί, κι ούτε χρειάζεται, ν' αποδειχθεί. Ο ισχυρισμός αυτός είναι μη αποδείξιμος, αλλά ολοφάνερα ορθός. Και κάτι παραπάνω: είναι *αναγκαίος*.

Και θα εξηγήσω τι εννοώ με τον όρο αναγκαίος.

Είναι βέβαιο, λόγου χάριν, ότι ο ουρανός είναι γαλάζιος, αλλά θα μπορούσαμε να τον φανταστούμε και πράσινο. Είναι βέβαιο ότι δεν υπάρχει ένα άλογο μ' ένα κέρατο στη μέση του κεφαλιού του, αλλά μπορούμε να ζωγραφίσουμε κάτι τέτοιο. Όμως, δεν μπορούμε να φανταστούμε δύο σημεία που να μην περνάει απ' αυτά καμία ευθεία ή αντίθετα να περνούν περισσότερες από μία ευθείες. *Δεν μπορούμε να φανταστούμε πώς θα ήταν τα πράγματα, αν δεν ήταν έτσι ακριβώς όπως πιστεύουμε ότι είναι.*

Τέτοιας μορφής προτάσεις είναι τα ***αξιώματα***.

Κι ο λογικός συμπερασμός τι είναι;

Να δυο παραδείγματα:

Αν ένας αριθμός λήγει σε άρτιο ψηφίο, τότε είναι άρτιος
Ο αριθμός 564 λήγει στο 4, που είναι άρτιο ψηφίο

Άρα, ο αριθμός 564 είναι άρτιος

Κάθε πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 2 είναι περιττός
Ο αριθμός 564 είναι μεγαλύτερος του 2 και δεν είναι περιττός

Άρα, ο αριθμός 564 δεν είναι πρώτος

Οι προτάσεις πάνω από τη γραμμή ονομάζονται *προκείμενες*, ενώ η πρόταση κάτω από τη γραμμή *συμπέρασμα*.

Μία πρόταση που έχει αποδειχτεί, ονομάζεται ***θεώρημα***.

Αλλά*, τι είναι απόδειξη μιας πρότασης;*

Είναι μια ακολουθία από λογικούς συμπερασμούς, όπου το τελευταίο συμπέρασμα είναι αυτή η πρόταση, κι όπου οι διάφορες προκείμενες είτε είναι αξιώματα είτε συμπεράσματα προηγούμενων λογικών συμπερασμών.

Αυτή είναι η *παραγωγική μέθοδος απόδειξης.* Η μέθοδος αυτή καλλιεργήθηκε και αναπτύχθηκε από τους Πυθαγόρειους και στη συνέχεια από τους μαθηματικούς της κλασικής περιόδου. Η όλη προσπάθεια έλαβε την οριστική της έκφραση στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη. Ο Ευκλείδης από έναν μικρό αριθμό α-

ξιωμάτων, προφανούς και διαισθητικά αναγκαστικής ισχύος, απέδειξε ένα σύνολο από 500 περίπου θεωρήματα.

Όμως ως εδώ είδαμε τη μία μόνον όψη του θέματος. Υπάρχει και δεύτερη, κι είναι η εξής: Για ν' αποδειχθεί μια πρόταση με χρήση του λογικού συμπερασμού θα πρέπει να έχει σαφές νόημα. Κατά συνέπεια οι μαθηματικές προτάσεις πρέπει να περιέχουν έννοιες με σαφές νόημα ή αλλιώς *ακριβείς έννοιες*. Δεν είναι δυνατό να κάνουμε μαθηματικά με έννοιες όπως *τιμιότητα*, *δικαιοσύνη*, *πρόθεση*, κλπ. Αλλά πότε μια έννοια μπορεί να θεωρείται ακριβής; Θα ήταν λογικό να δεχτούμε πως μια έννοια είναι ακριβής, μόνον όταν ορίζεται με τη βοήθεια άλλων εννοιών που ήδη θεωρήθηκαν ακριβείς.

Όμως, και πάλι η συνεχής αναγωγή σε ακριβείς έννοιες δεν μπορεί παρά να είναι περατωμένη. Κι έτσι πρέπει να ξεκινάμε από έννοιες διαισθητικά προφανείς, οι οποίες δεν είναι δυνατό ν' αναχθούν σε απλούστερες. Οι υπόλοιπες θα ορίζονται με τη βοήθεια αυτών των ***αρχικών* εννοιών**.

Η έννοια του τριγώνου, λ.χ., είναι ακριβής, γιατί ορίζεται με τη βοήθεια της έννοιας του ευθυγράμμου τμήματος. Αλλά η έννοια του ευθυγράμμου τμήματος δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες έννοιες, είναι μια αρχική έννοια. Απλά μας φαίνεται σαφής.

Κατ' αναλογία προς την ***παραγωγική απόδειξη***, η αναγωγή σε αρχικές έννοιες μπορεί να ονομαστεί ***παραγωγική απόδοση νοήματος***.

Ένα μαθηματικό σύστημα στο οποίο το *νόημα* και η *αλήθεια* εμφυτεύονται από την αρχή, με την αποδοχή αρχικών εννοιών και αξιωμάτων, και στο οποίο το νόημα και η αλήθεια εμπλουτίζονται *μόνο*[1] με ορισμούς και λογικούς συμπερασμούς αντίστοιχα ονομάζεται ***παραγωγικό σύστημα*** ή ***αξιωματικό σύστημα***. Τα *Στοιχεία του Ευκλείδη* υπήρξαν το πρώτο παραγωγικό σύστημα, το οποίο έκτοτε θεωρήθηκε ως το ιδανικό πρότυπο για κάθε μαθηματική ή επιστημονική προσπάθεια. Θα λέγαμε πως τα *Στοιχεία του Ευκλείδη* είναι το ιδρυτικό κείμενο, ή το πρόγραμμα, με βάση το οποίο πορεύτηκαν έκτοτε τα Μαθηματικά.

Θα αναφερθώ σε τρεις όψεις αυτού του *Ευκλείδειου Προγράμματος,* σημειώνοντας αντίστοιχες αδυναμίες του. Αυτές οι αδυναμίες φάνηκαν αρκετά ενοχλητικές γύρω στις αρχές του 20ου αιώνα, και κίνησαν σημαντικές προσπάθειες να θεμελιωθούν τα μαθηματικά σε στέρεες βάσεις. Όμως, οι προσπάθειες αυτές κατέληξαν σε αποτυχία.

Μια νέα φιλοσοφική θεώρηση των μαθηματικών ξεκινά μετά απ' αυτή την αποτυχία, και γνωρίζει μια έντονη άνθιση από τη δεκαετία του 70 και μετά. Διαχέεται η άποψη πως *τα μαθηματικά ούτε είναι δυνατό να έχουν, αλλά κι ούτε χρειάζονται, θεμέλια.* Κι ακόμα πως *η μαθηματική γνώση, όπως και η γνώση των άλλων επιστημών, υπόκειται σε λάθη, κι έτσι είναι προσωρινή και αναθεωρήσιμη*.

Αυτού του είδους οι φιλοσοφικές θέσεις δε άφησαν αδιάφορους του κύ-

[1] Το "*μόνο*" είναι συζητήσιμο, αλλά η ανάλογη συζήτηση ξεπερνάει τα όρια αυτού του άρθρου.

κλους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Η μεταφορά όμως αυτών των απόψεων στο χώρο των Σχολικών Μαθηματικών, είναι άκαιρη ή τουλάχιστο υπερβολική. Έτσι, τα συμπεράσματα που θα μπορούσαν να προκύπτουν σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο είναι μάλλον λανθασμένα. Κι αυτό το λάθος ακριβώς θέλω να σχολιάσω.

I. *Σ' ένα παραγωγικό σύστημα, το νόημα των εννοιών και η ισχύς των προτάσεων μόνο μεταβιβάζονται, δεν εδραιώνονται*.

Με άλλα λόγια, η ισχύς των θεωρημάτων είναι λογικά αναγκαίο επακόλουθο της ισχύος των αξιωμάτων, αλλά η ίδια η ισχύς των αξιωμάτων μόνο διαισθητική στήριξη έχει, δεν είναι λογικά αναγκαία. Κι αντίστοιχα, ενώ οι παράγωγες έννοιες ορίζονται αυστηρά με τη βοήθεια των αρχικών εννοιών, οι ίδιες οι αρχικές έννοιες απλά μας φαίνονται σαφείς.

Ωστόσο, αυτή η κατάσταση είναι αναπόφευκτη. Αν τίποτε δε δεχτούμε χωρίς απόδειξη, αν καμιά έννοια δε δεχτούμε ως έχουσα σαφές νόημα, τότε καμιά μαθηματική γνώση δεν μπορεί να οικοδομηθεί. Τότε φτάνουμε σ' έναν ακραίο σκεπτικισμό, όπου όλα είναι αμφίβολα, ακόμα και οι ίδιες οι αμφιβολίες μας.

Τα θεωρήματα είναι αληθή στο μέτρο που τα αξιώματα είναι αληθή. Αν τυχόν τα θεωρήματα έχουν εφαρμογές στον *υπαρκτό* κόσμο, τότε η αλήθεια των αξιωμάτων θα κριθεί εκεί. Αν στήνουμε γέφυρες και κτίρια με αριθμητικούς και γεωμετρικούς υπολογισμούς και αυτά δεν πέφτουν, τότε τα αξιώματα της αριθμητικής και της γεωμετρίας είναι επαρκώς αληθή. Αν κάποια θεωρήματα δεν έχουν εφαρμογές, τότε η γνώση που εμπεριέχουν είναι στέρεα μόνο κατά το σχήμα «*αν…, τότε*».

Με τη Θεωρία Συνόλων μπορούμε να ορίσουμε τους αριθμούς, κι ύστερα να κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς που υπεισέρχονται στο σχεδιασμό, λ.χ., της πτήσης των αεροπλάνων. Αν τυχόν αύριο διαπιστώσουμε μια αντίφαση στα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων, τότε θα πάψουμε να χρησιμοποιούμε τα αεροπλάνα; Φυσικά, όχι.

Τα Μαθηματικά αποτελούν ασφαλή γνώση, γιατί χρησιμοποιούνται επιτυχώς, κι όχι γιατί στηρίζονται σε γερά θεμέλια. Όλη η ιστορία της θεμελίωσης των μαθηματικών που έλαβε χώρα στο πρώτο τρίτο του 20^{ου} αιώνα κατέληξε, όπως ήδη αναφέραμε, στο απογοητευτικό συμπέρασμα ότι τέτοια θεμέλια για τα Μαθηματικά δε βρέθηκαν.

Εξάλλου, η ίδια η λογική μόνο εμπειρική στήριξη έχει, δηλαδή, στην πράξη κρίνεται. *Αν ήταν λανθασμένα τα λογικά αξιώματα, η ανθρωπότητα θα αποτύγχανε στη δράση της και θα τα εγκατέλειπε*.

Φυσικά, η φιλοσοφική συζήτηση γύρω απ' αυτό το θέμα είναι θεμιτή και ενδιαφέρουσα, στο μέτρο που αφορά τη μαθηματική έρευνα. Είναι βέβαιο, όμως, πως δεν μπορεί να έχει καμιά σημασία για τη Μαθηματική Εκπαίδευση. Μ' όποιο τρόπο κι αν τη λάβουμε υπόψη μας, σε λάθος τακτικές θα καταλήξουμε.

Όταν είναι να σκεφτούμε για το αν και πώς θα διδάξουμε Γεωμετρία στη Α΄ Λυκείου, δεν είναι σε τίποτε χρήσιμο το να λάβουμε υπόψη μας πως τα αξιώ-

ματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τα δεχόμαστε μόνο και μόνο γιατί τα επιβάλει η διαίσθησή μας. Η οποία μπορεί και να μας εξαπατά, και τότε τι γίνεται;

Το Πέμπτο Αξίωμα για μεγάλα αστρονομικά μεγέθη δεν ισχύει. Αλλά πάνω στη Γη ισχύει με τέτοια προσέγγιση, που κάθε πρακτική εφαρμογή του είναι ουσιαστικά αλάνθαστη. Αλλά και πέραν τούτου, αν ως ευθεία θεωρήσουμε αυτό που φανταζόμαστε ότι πρέπει να είναι κι όχι τις καμπυλωμένες από τη βαρύτητα ακτίνες φωτός, τότε το Πέμπτο Αξίωμα είναι μια αυταπόδεικτη αλήθεια συνυφασμένη με το περιεχόμενο της έννοιας της ευθείας.

II. Η δεύτερη όψη των παραγωγικών συστημάτων, που είναι χρήσιμο να θίξουμε, είναι το ότι αυτά δε στήνονται όπως περιγράφονται.

Δεν ξεκινάμε μια μαθηματική θεωρία, θέτοντας ορισμούς και αξιώματα κατά το δοκούν, κι ύστερα σε μια ευχάριστη πορεία παράγουμε θεωρήματα.

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη δε γεννήθηκαν δια μιας με τη μορφή ενός παραγωγικού συστήματος. Πέρασαν 300 χρόνια από το Θαλή ως τον Ευκλείδη, και σ' όλη αυτή την περίοδο η εργασία πολλών μαθηματικών συσσώρευσε πληθώρα θεωρημάτων. Οι αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων δεν ήταν πάντοτε σωστές, και δεν ήταν εναρμονισμένες μεταξύ τους. Το κατόρθωμα του Ευκλείδη είναι η συστηματοποίηση αυτού του έργου. Επέλεξε ελάχιστα αξιώματα και με βάση αυτά, σε μια ιδιοφυή ακολουθία συμπερασμών, απέδειξε 467 θεωρήματα. Η μαθηματική δημιουργία, λοιπόν, προηγήθηκε και η παραγωγική συστηματοποίηση ακολούθησε.

Όταν το 1889 ο Peano διατύπωσε τα αξιώματά της Αριθμητικής, η Θεωρία Αριθμών είχε ήδη αναπτυχθεί τόσο, που δε μπορούμε να πούμε πως από τότε κι ύστερα ο κλάδος γνώρισε επαναστατική πρόοδο. Σε κάθε περίπτωση, όμως, ό,τι κι αν επιτεύχθηκε έκτοτε δεν οφειλόταν στην ύπαρξη των αξιωμάτων.

Τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κωδικοποιούν την αντίληψή μας για το χώρο. Κι ανάλογα, τα αξιώματα της Αριθμητικής κωδικοποιούν την αντίληψή μας για τους φυσικούς αριθμούς. Ωστόσο, δεν είναι απλή υπόθεση αυτή η κωδικοποίηση.

Η ειρωνεία είναι πως αυτά τα ίδια τα αξιώματα του Ευκλείδη είναι αρκετά ελλιπή. Αν σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο φέρουμε το ύψος, τότε αυτό τέμνει τη βάση, κι όχι την προέκτασή της προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση. Αυτό είναι ολοφάνερο, αλλά δεν προκύπτει από τα πέντε αξιώματα που ρητά έθεσε ο Ευκλείδης. Δηλαδή, αυτά τα αξιώματα δεν κωδικοποιούν πλήρως την αντίληψή μας για το χώρο. Χρειάζονται και τα λεγόμενα *αξιώματα διάταξης*. Το σημαντικό είναι πως η διαπίστωση αυτή έγινε μόλις το 1880, παρά το γεγονός ότι όλοι οι μεγάλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Έτσι, το ίδιο το Ευκλείδειο Πρότυπο πάσχει από σοβαρές ατέλειες.

Τέτοια ελαττώματα, όμως, στην αξιωματικοποίηση συνήθως έχουν ελάχιστη σημασία για το έργο του μαθηματικού, και βέβαια απολύτως καμιά για τη Μαθηματική Εκπαίδευση. Κι αυτό συμβαίνει, διότι η αξιωματικοποίηση έρχεται, όταν πια το μαθηματικό έργο έχει φτάσει σε ωριμότητα. Ή τουλάχιστο

έτσι συνέβη με τα μαθηματικά που διδάσκονται και στις τρεις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Επίσης και γιατί, άπαξ και καταγράψουμε τα αξιώματα, λ.χ., της Γεωμετρίας ή της Αριθμητικής ως κωδικοποιήσεις της αντίληψής μας για το χώρο ή για τους φυσικούς αριθμούς αντίστοιχα, δεν εγκαταλείπουμε αυτή την αντίληψη, ώστε ν' αποδεικνύουμε τα θεωρήματα με τυφλή χρήση των αξιωμάτων. Κάτι τέτοιο είναι πρακτικά μη επιτεύξιμο, και φυσικά είναι ξένο προς τη μαθηματική εμπειρία. Στη Γεωμετρία η ίδια η διαίσθηση που οδήγησε τον Ευκλείδη στη διατύπωση των πέντε αξιωμάτων επέβαλε σιωπηρά και τα αξιώματα διάταξης.

III. Η τρίτη παρατήρηση αφορά το ερώτημα:

Ποιο είναι κριτήριο της ορθότητας μιας απόδειξης;

Όπως συμβαίνει και σ' όλες τις κοινότητες γνώσης, έτσι και στα μαθηματικά οι *ισχυρισμοί αλήθειας* - που από ένα σημείο και πέρα είναι πολύπλοκοι- διαμεσολαβούνται από τους ειδικούς.

Έτσι, μια απόδειξη είναι ορθή, μόνον αν την αποδέχονται ως τέτοια όλοι όσοι την κατανοούν. Το αποδεκτό μιας απόδειξης θεμελιώνεται με "τη συναίνεση των αρμοδίων". Αλλά μια τέτοια κανονιστική αρχή, παρ' όλο που έχει διυποκειμενικό χαρακτήρα, δεν είναι καθόλου αντικειμενική, και βέβαια δεν είναι ικανοποιητικά αυστηρή. Φαίνεται, λοιπόν, να υπάρχει ένα ενοχλητικό χάσμα ανάμεσα *στο τι είναι απόδειξη και στο πως εξασφαλίζεται το αν μια απόδειξη είναι όντως απόδειξη*.

Η απόδειξη είναι το οριστικό στοιχείο για να πεισθούμε για την ισχύ ενός θεωρήματος. Αλλά δεν πείθεσαι για κάτι που δεν το έχεις κατανοήσει. Ο βήμα προς βήμα έλεγχος της ορθής εφαρμογής των λογικών κανόνων δεν προσφέρει κατανόηση, συνεπώς δεν αρκεί για να πεισθούμε. Πρέπει να έχεις μια καθαρή εικόνα της ιδέας που οδήγησε στη σειρά αυτών των βημάτων. Την απόδειξη πρέπει να τη βλέπεις, αν γίνεται, με μιας. Θεώρημα θα πει αυτό που βλέπεις. Κι είναι σαφές πως το βλέπεις μόνο στο φως της κατανόησης.

Συνεπώς, η απόδειξη δεν είναι απλά, όπως αναφέραμε νωρίτερα, "*μια ακολουθία από λογικούς συμπερασμούς, όπου το τελευταίο συμπέρασμα είναι αυτή η πρόταση, κι όπου οι διάφορες προκείμενες είτε είναι αξιώματα είτε συμπεράσματα προηγούμενων λογικών συμπερασμών*". Είναι αυτό, αλλά και κάτι παραπάνω, είναι και η ιδέα που διαπερνά τα βήματα των συμπερασμών.

Ακριβώς μ' αυτή την οπτική θα πρέπει να παρατηρήσουμε πως πολλές αποδείξεις της σύγχρονης μαθηματικής έρευνας είναι πολύπλοκες και εκτεταμένες και στηρίζονται στα συμπεράσματα άλλων αποδείξεων, που είναι κι αυτές πολύπλοκες και εκτεταμένες.

Ένα ακραίο παράδειγμα είναι η γιγάντια απόδειξη της ταξινόμησης των απλών πεπερασμένων ομάδων, έργο μιας εκατοντάδας μαθηματικών, δημοσιευμένο σε 500 άρθρα, από τα τέλη της δεκαετίας του 40 ως τις αρχές

της δεκαετίας του 80. Στο σύνολο τους αυτά τα άρθρα καταλαμβάνουν περίπου 15000 σελίδες. Αν γίνει μια προσπάθεια να ξαναγραφεί όλο αυτό το έργο, ίσως περιοριστεί η έκτασή του στις 3000 σελίδες. Είναι αδύνατο ένας άνθρωπος να διατρέξει ένα τέτοιο κείμενο και ν' αποφανθεί για την ορθότητα της συνολικής απόδειξης.

Ας αναφέρουμε ακόμα πως, με τους πιο μέτριους υπολογισμούς, κάθε χρόνο δημοσιεύονται περισσότερα από 200.000 θεωρήματα. Με όχι και πολλές εξαιρέσεις, η κάθε μια από τις αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων έχει δύο μόνον αναγνώστες: τον συγγραφέα και τον κριτή του περιοδικού, στο οποίο δημοσιεύτηκε η αντίστοιχη εργασία. Συνήθως μάλιστα, ο καθένας από τους δύο πιστεύει πως ο άλλος έχει την τελική ευθύνη για την ορθότητα της απόδειξης.

Ανάμεσα στα θεωρήματα που είναι ενδιαφέροντα, και συνεπώς έχουν ευρύ αναγνωστικό κοινό, δεν είναι τελείως μη υπολογίσιμο το ποσοστό αυτών που στις αποδείξεις τους διαπιστώθηκαν λάθη. Το σημαντικό στις περιπτώσεις αυτές είναι πως κατά κανόνα το θεώρημα είναι σωστό ή είναι σωστό με κάποια τροποποίηση. Η λανθασμένη απόδειξη σχεδόν πάντοτε επιδιορθώνεται.

Μπορούμε να πούμε πως ποτέ δεν έχει υπεισέλθει ένα σημαντικό λάθος σ' ένα συμπέρασμα, χωρίς να έχει αποκαλυφθεί σύντομα. Το θέμα, λοιπόν, δεν είναι αν κάνουν λάθη οι μαθηματικοί, αυτό να λέγεται. Το γεγονός είναι ότι τα λάθη των μαθηματικών διορθώνονται από τους ίδιους ή από άλλους μαθηματικούς.

Είναι χαρακτηριστική η πορεία της ανάπτυξης του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Χωρίς αμφιβολία το μαθηματικό έργο του Νεύτωνα, του Leibniz, του Euler, του Laplace και τόσων άλλων μεγάλων μαθηματικών του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα ήταν ένας καταιγισμός από εικασίες, χωρίς αυστηρές αποδείξεις ή και χωρίς αποδείξεις.

Η αυστηρότητα στις έννοιες και στις αποδείξεις ήρθε 200 χρόνια αργότερα, με το έργο του Cauchy και του Weierstrass. Το αξιοσημείωτο είναι πως, παρά την έλλειψη αυστηρότητας σ' αυτό το τεράστιο έργο της Ανάλυσης, τα λάθη ήταν σχετικά ελάχιστα. Ίσως μάλιστα η πληθωρική δημιουργικότητα αυτών των μαθηματικών να οφειλόταν και σ' αυτή τη χαλαρή αυστηρότητα. Ειπώθηκε πως «*αν ο Leibniz και ο Νεύτωνας γνώριζαν ότι οι συνεχείς συναρτήσεις δεν είναι κατ' ανάγκη και παραγωγίσιμες, τότε ίσως ο διαφορικός λογισμός να μην είχε δημιουργηθεί*».

Ωστόσο, η αυστηρότητα στην Ανάλυση ήρθε στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Άραγε, η ιστορία της Ανάλυσης είναι ο κανόνας στην πορεία της μαθηματική γνώσης;

Μια απαράμιλλη, αλλά όχι κατ' ανάγκην και απόλυτα πειστική, επιχειρηματολογία για το ότι όντως έτσι αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση μας προσφέρει το σημαντικό, κι άρα δικαίως διάσημο, έργο του Lakatos "Αποδείξεις και Ανασκευές". Αυτό το έργο και μια ανάλογη τάση σήμερα στη φιλοσοφία των μαθηματικών διέσπειραν και ανάμεσα στους κύκλους της Μαθηματικής Εκπαί-

δευσης την άποψη ότι οι αποδείξεις στα μαθηματικά δεν είναι τελεσίδικες, αλλά αντίθετα είναι πάντοτε υποκείμενες σε απόρριψη ή ανασκευή, και κατά συνέπεια η μαθηματική γνώση είναι προσωρινή και αναθεωρήσιμη. Κι έτσι τα μαθηματικά, όπως και οι φυσικές επιστήμες, είναι ένα σύνολο από εικασίες, λιγότερο ή περισσότερο βάσιμες, και εν τέλει δεν είναι αλάθητα.

Παρά το ότι αυτή η άποψη μπορεί να θεωρηθεί βάσιμη για ορισμένες περιοχές, και για ορισμένες εποχές της ανάπτυξης, των μαθηματικών, και παρά το ότι εγείρονται θορυβώδεις φιλοσοφικές συζητήσεις γύρω από το θέμα αυτό - πάντα όμως με αντικείμενο την τρέχουσα μαθηματική έρευνα - είναι βέβαιο πως για τη Μαθηματική Εκπαίδευση αυτή η άποψη δεν μπορεί να έχει την παραμικρή σημασία.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα θεωρείται αληθές εδώ και 2500 χρόνια, και τίποτε δε φαίνεται ότι μπορεί να κλονίσει αυτή μας την πεποίθηση.

Άπαξ και δεχτούμε το Πέμπτο Αξίωμα, *τότε το άθροισμα των γωνιών σ' όλα τα τρίγωνα είναι δύο ορθές*. Στο θεώρημα αυτό δεν υπάρχουν εξαιρέσεις, δεν υπάρχουν αντιπαραδείγματα, η απόδειξη είναι καθολική. Κι επίσης οι έννοιες της γωνίας και του τριγώνου είναι οριστικά σαφείς.

Σε κάθε περίπτωση οι έννοιες στα Σχολικά Μαθηματικά είναι σαφείς, οι αποδείξεις των θεωρημάτων είναι γνωστές, και η ορθότητά τους αμέτρητες φορές ελεγμένη. Είναι υπερβολικό, αν όχι ανόητο, να θεωρήσουμε την αντίστοιχη μαθηματική γνώση ως προσωρινή και αναθεωρήσιμη. Η άποψη του προσωρινού και αναθεωρήσιμου, αφορά την πορεία της δημιουργίας των μαθηματικών. Αφορά τη λογική της επινόησης κι όχι τη λογική της τελικής απόδειξης. Δεν έχει να κάνει, λοιπόν, με τα μαθηματικά των σχολικών βιβλίων.

Απεναντίας, το αναμφισβήτητο γεγονός ότι οι αποδείξεις στα Σχολικά Μαθηματικά είναι γνωστές κι ακλόνητες δημιουργεί ενός άλλου είδους πρόβλημα στη διδασκαλία τους. Ο δάσκαλος γνωρίζει την απόδειξη κάθε θεωρήματος, και κάθε παραλλαγή αυτής της απόδειξης. Αυτά όλα είναι γραμμένα με τον πιο απέριττο και σαφή τρόπο στα εγχειρίδια

Κι ακριβώς το πρόβλημα βρίσκεται στο ότι αυτή *η τελική απόδειξη*, που παρουσιάζεται στα βιβλία ή στις εργασίες, όχι μόνο *δε συμπίπτει με την πορεία της επινόησής της,* αλλά κατά κανόνα διαφέρει ριζικά απ' αυτήν. Στην τελική της μορφή η διατύπωση ενός θεωρήματος είναι σαφής (χωρίς διφορούμενα) και η απόδειξη πλήρης (χωρίς κενά). Αντίθετα, στη δημιουργία του το έργο του μαθηματικού δε θυμίζει καθόλου αυτή την εικόνα. Στην πορεία της επινόησης υιοθετούνται σκέψεις ελάχιστα στηριγμένες, αλλά απλώς ευλογοφανείς. Διατυπώνονται πρόχειρες εικασίες και στη συνέχεια απορρίπτονται, για να διατυπωθούν άλλες βελτιωμένες. Ορίζονται έννοιες και εγκαταλείπονται για να τροποποιηθούν σε σαφέστερες. Γίνονται λάθη, ακολουθούνται πορείες αδιέξοδες. Το όλο σκηνικό θυμίζει περισσότερο πρόχειρη καθημερινή επιχειρηματολογία, και ελάχιστα μια αυστηρή παραγωγική πορεία.

Κι όταν η απόδειξη προκύψει, τότε όλη αυτή η δαιδαλώδης, αλλά γόνιμη, προσπάθεια εγκαταλείπεται. Η απόδειξη ξαναγράφεται μ' όσο το δυνατό λιτή

μορφή. Και μ' αυτή τη μορφή παρουσιάζεται στα βιβλία. Η πορεία που την γέννησε σβήνει, ξεχνιέται μια για πάντα. Αυτή η συνήθεια φαίνεται να είναι μια κληρονομιά του Ευκλείδειου Παραδείγματος, γιατί σ' ένα μόνο από όλα τα αρχαία κείμενα, στη "*Μέθοδο"* του Αρχιμήδη, παρουσιάζεται και η πορεία της επινόησης.

Η συνήθεια του Μαθηματικού στο έργο του μοιάζει μ' εκείνη της Αλεπούς, η οποία με την ουρά της σβήνει τα ίχνη από τις πατημασιές της.

Φαίνεται πως αυτό το χάσμα είναι ένα πρόβλημα. Τι πρέπει να γίνει, όμως; Να μη διδάσκεται η απόδειξη στην τελική της μορφή, αλλά σε μια απομίμηση της επινόησής της; Να γίνονται και ηθελημένα λάθη, για να διορθώνονται; Να ακολουθείται ενίοτε πορεία που είναι γνωστό ότι είναι αδιέξοδη, έτσι για να δοξάζεται στο τέλος η επιτυχής πορεία; Εν τέλει, μαθαίνει κανείς μαθηματικά, μόνον όταν εμπλέκεται και στη λογική της επινόησής τους, έστω κι μ' αυτό τον τεχνητό τρόπο; Έτσι μάθαμε όλοι μαθηματικά, όσοι μάθαμε και όσα μάθαμε;

Νομίζω πως δεν έχουμε αιτιολογημένες απαντήσεις σ' αυτά τα ερωτήματα, παρά το ότι φαίνονται κρίσιμα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Ωστόσο, θα συμφωνούσαμε νομίζω πως πρέπει, ή τουλάχιστο αυτή την τάση έχουμε, την απόδειξη να την παρουσιάζουμε χωρίς κενά, κάθε βήμα της να είναι προφανές, και ο σκελετός της να είναι ορατός με μιας. Όταν αυτό δεν είναι κατορθωτό, *απλούστατα δεν είναι κατορθωτό*, και αρκούμαστε σε κάτι λιγότερο. Όπως και να διατάξεις την ύλη μιας μαθηματικής ενότητας, πάντα θα υπάρχουν σημεία δυσανάλογα δύσκολα. Η κατανόηση έρχεται σε στάδια. Σε κάποιο στάδιο όλα γίνονται ξεκάθαρα.

Αν συμφωνήσουμε τώρα πως, παράλληλα μ' αυτού του είδους τη διδασκαλία των αποδείξεων, ο μαθητής θα πρέπει να εμπλακεί και στη διαδικασία της επινόησής τους, αυτό θα πρέπει να το κάνει μόνος. Η γνώση του να λύνεις προβλήματα, να επινοείς αποδείξεις, είναι κατά το μέγιστο μέρος της σιωπηρή γνώση, δηλαδή, μη περιγράψιμη με λόγια ή τουλάχιστο όχι επαρκώς περιγράψιμη. Παρά την περί του αντιθέτου διαδεδομένη πίστη, η γνώση αυτή ουσιαστικά δε μεταβιβάζεται, αλλά μόνον αποκτιέται με την άσκηση.

Έτσι φαίνεται αρχικά εύλογη η ιδέα ν' αφήσουμε τους μαθητές να ανακαλύψουν μόνοι τους κάποιες αποδείξεις ή ακόμα και να εικάσουν τα θεωρήματα. Ο ρόλος του δασκάλου πρέπει να είναι διακριτικός! Όμως, είναι φανερό πως αυτό είναι ακατόρθωτο. Κανείς μαθητής δε θ' ανακαλύψει ή δε θα επινοήσει μόνος του το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Κι αν ίσως κάποιος θα μπορούσε, θα χρειαζόταν χρόνια πολλά.

Τρομάζει κανείς στην ιδέα πως θα χρειαζόταν κάποτε να ανακαλύψουμε ξανά τη φωτιά, το τροχό, τη γραφή, και τόσα άλλα. Κι όμως, αυτή η άποψη σήμερα είναι η κυριαρχούσα στη φιλολογία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Η τελείως απλοποιημένη μορφή της είναι ο ισχυρισμός πως *οι μαθητές, αντί να μάθουν τα μαθηματικά από το δάσκαλό τους, τα ανακαλύπτουν μόνοι τους, κι έτσι τα εδραιώνουν καλύτερα*. Πιστεύω πως στην πράξη οι μαθητές και σήμερα λύνουν ασκήσεις, μόνοι τους ή σε ομάδες, όπως και το έκαναν ανέκαθεν. Τώρα

τις ασκήσεις τις ονομάζουν *δραστηριότητες*.

IV. Όταν παρουσιάζεται η απόδειξη ενός θεωρήματος στην τάξη, ο κύριος στόχος είναι η κατανόηση. Η πληρέστερη και βαθύτερη κατανόηση του θεωρήματος.

Το νόημα ενός θεωρήματος βρίσκεται στην απόδειξή του. Άλλη εικόνα έχει κανείς, όταν πληροφορείται μόνο το τι ισχύει, κι άλλη, όταν γνωρίζει και το γιατί ισχύει.

Ο στόχος να πεισθεί ο μαθητής ότι το θεώρημα είναι όντως αληθές έρχεται ως κάτι δευτερεύον. Είναι, θα λέγαμε, υπόθεση εργασίας το ότι το θεώρημα ισχύει. Είναι μέρος του σιωπηρού συμβολαίου ανάμεσα στους μαθητές και το δάσκαλο ότι ο τελευταίος δεν τους λέει ψέματα.

Γενικά η επιστήμη μπορεί να κάνει λάθη, αλλά δε λέει ψέματα. Γι αυτό ίσως και είναι η πιο επιτυχημένη επιχείρηση της ανθρωπότητας.

Για τους μαθητές, λοιπόν, το πιο ισχυρό πειστήριο της ορθότητας του θεωρήματος, και κάθε επιχειρήματος, είναι το γεγονός ότι το υποστηρίζει ο δάσκαλος ή είναι γραμμένο στο βιβλίο. Αυτή η εξουσία του δασκάλου ή του κειμένου αδρανοποιεί το πνεύμα κριτικής στάσης του μαθητή. Κι αυτό πάει κόντρα στη λογική της απόδειξης.

Στα πρώτα στάδια μάλιστα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης το σκηνικό αυτό είναι κυρίαρχο, αφού στο σύνολο της η Αριθμητική και η Γεωμετρία που διδάσκονται δεν είναι παρά μια σειρά από αλγόριθμους και κανόνες. Αν ψάξει κανείς στα βιβλία του Δημοτικού, αλλά και του Γυμνασίου ακόμα, δε θα βρει καμιά γνήσια απόδειξη. Και, περιέργως, δε θα βρει ούτε καν ερμηνείες των κανόνων και των συνταγών που αφειδώς γεμίζουν τα σχολικά βιβλία.

Αυτή η κατάσταση μας στέλνει πίσω στην προ του Θαλή εποχή. Το πνεύμα της απόδειξης απουσιάζει παντελώς. Αυτό το πνεύμα, όμως, δεν είναι εγγενές στην ανθρώπινη φύση. Είναι απλά μια πολιτισμική κατάκτηση. Έτσι, δεν μπορεί να επικρατήσει από την ώθηση μιας εσωτερικής δύναμης. Συνεπώς, αν είναι να επικρατήσει, θα πρέπει να καλλιεργείται.

Το ερώτημα είναι αν θα πρέπει να καλλιεργείται απ' την αρχή ή αντίθετα κάθε ατομική πορεία θα είναι μια σύντομη επανάληψη της πολιτισμικής πορείας; Θα πρέπει, δηλαδή, να εφεύρουμε τρόπους παρουσίασης της ύλης, ώστε να έχουμε αποδείξεις από τα πρώτα στάδια της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ή θα πρέπει να περιμένουμε το μάθημα της Γεωμετρίας στην Α′ Λυκείου, και τότε για πρώτη φορά οι μαθητές να γευτούν γνήσιες αποδείξεις;

Η γνώμη μου είναι πως αυτό το ακριβό δώρο, που λέγεται παραγωγική απόδειξη, ας προσφερθεί στους μαθητές αρκετά αργά, όταν θα είναι έτοιμοι να το εκτιμήσουν και να το χαρούν. Τότε δε θα 'ναι πια η βαρύνουσα γνώμη του δασκάλου, αλλά η δύναμη της ίδιας της απόδειξης που θα πείθει για την ορθότητα του θεωρήματος.

Ως τότε, το αυθόρμητο γιατί των μαθητών ας εξυπηρετηθεί με το διότι της

ερμηνείας και του επιχειρήματος.

Βιβλιογραφία

N. BALACHEFF, "*The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof* " in A. Bishop, S. Mellin-Olsen and J. van Dormolen (eds.), "Mathematical Knowledge: Its Grouth Through Teaching", Kluwer Academic Publishers, (1991).

P. J. DAVIS, "*Visual Theorems*", Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 4, pp. 333-344, (1993).

P. J. DAVIS, "*Fidelity in Mathematical Discourse: Is One and One Really Two?"* American mathematical Monthly, No. 79, pp. 252-263, (1972).

P. J. DAVIS AND R. HERSH, "*Η Μαθηματική Εμπειρία*", Τροχαλία, (1991).

J. A. DIEUDONNÈ, "*Should We Teach 'Modern' Mathematics*?", American Scientist, Vol. 61, pp.16-19, (1973)

J. V. GRABINER, "*Is Mathematical Truth Time-Dependent*?", in Th. Tymosczko (ed.), "New Directions in the Philosophy of Mathematics", Birkhδuser, (1986).

G. HANNA, "*Rigorous Proof in Mathematics Education*", OISE press, Curriculum Series/48, The Ontario Institute for Studies in Education, (1983).

G. HANNA, AND N. H. JAHNKE, "*Proof and Application*", Educational Studies in Mathematics, vol. 24, No. 4, pp. 421-438, (1993).

C. G. HEMPEL, "*On the Nature of Mathematical Truth*", in P. Benacerraf and H. Putnam, (eds.), "Philosophy of Mathematics: Selected Readings", Cambridge University Press, 2nd ed., (1983).

R. HERSH, "*Proving is Convincing and Explaining*", Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 4, pp. 389-399, (1993).

M. KLINE, "*Mathematics for Nonmathematicians*", Dover Publications, (1967)

M. KLINE, "*Logic Versus Pedagogy*", American Mathematical Monthly, No. 77, pp. 264-282, (1970).

I. LAKATOS, "*Mathematics, Science and Epistemology*" Cambridge University Press, (1978).

I. LAKATOS, "*Proofs and Refutations*", Cambridge University Press, (1976). Στα ελληνικά: "*Αποδείξεις και Ανασκευές*" , Τροχαλία, 1996.

R. DE MILLO, R. J.LIPTON AND A. J. PERLIS, "*Social Processes and Proofs of Theorems and Programs*" in Th. Tymosczko (ed.), "New Directions in the Philosophy of Mathematics", Birkhδuser, (1986).

CH. ORMELL, *"Is the Uncertainty of Mathematics the Real Source of Its Intellectual Charm*?" (Review Essay), Journal of Philosophy of Education, Vol. 27, No.1, pp. 125-133, (1993).

H. POINCARÈ, "*On the Nature of Mathematical Reasoning*", in P. Benacerraf and H.

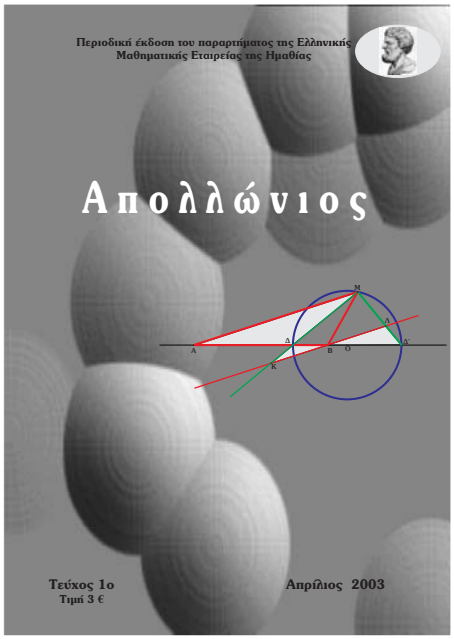
Putnam (eds.), "Philosophy of Mathematics: Selected Readings", Cambridge University Press, 2nd ed., (1983).

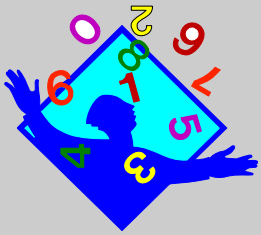
J. RICHARSDS, "*Mathematical Discussions*", in E. von Glasersfeld (ed.), "Radical Constructivism in Mathematics Education", Kluwer Academic Publishers, (1991).

R. THOM, " '*Modern*' *Mathematics: An Educational and Philosophic Error*", American Scientist Vol. 59, pp. 695-699, (1971).

Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση
του
Παραρτήματος
Ν. Ημαθίας
της
Ελληνικής
Μαθηματικής
Εταιρείας





ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ

Μήτσιου Ελένη(*)
Μαθηματικός, Θεσσαλονίκη

Η πρώτη Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε στη Ρουμανία το 1959. Από τότε γίνεται κάθε χρόνο (εκτός του 1980). Η πρώτη Βαλκανική Ολυμπιάδα έγινε το 1984 στην Αθήνα.

Πιστεύω, όπως και πολλοί άλλοι, ότι οι Μαθηματικές Ολυμπιάδες είναι μια διαφήμιση της Ελλάδας μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Από τις 44 Διεθνείς Ολυμπιάδες που έχουν γίνει:

Στις 6 είχαμε 1 θέμα γεωμετρίας (από τα 6),
στις 26 είχαμε 2 θέματα γεωμετρίας (από τα 6),
στις 10 είχαμε 3 θέματα γεωμετρίας (από τα 6),
σε 1 (1961), είχαμε 4 θέματα γεωμετρίας (από τα 6),
σε 1 (1960), είχαμε 5 θέματα γεωμετρίας (από τα 7).

Κατά μέσο όρο, δηλαδή, είχαμε 2,2 θέματα Ευκλείδειας γεωμετρίας (στα 6). Οι τομείς των μαθηματικών που εξετάζονται σε Διεθνείς Διαγωνισμούς είναι: Ανάλυση-Άλγεβρα (συνήθως ανισότητες)-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική-Θεωρία Παιγνίων και Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, ότι το 36,67% των θεμάτων είναι γεωμετρία. Αυτό συμβαίνει επειδή οι θεματοδότες γνωρίζουν πως είναι ο καλύτερος τρόπος για να επιλέξεις τον καλύτερο. Επομένως ως Έλληνες πρέπει να αισθανόμαστε εθνική υπερηφάνεια, γιατί εδώ γεννήθηκε η γεωμετρία όπως την ξέρουμε, εδώ γεννήθηκε η απόδειξη.

Ο Day Barbilian, που προς τιμήν του υπάρχει Μαθηματικός Διαγωνισμός στην Ρουμανία, ποιητής και γεωμέτρης, είπε: «Η πόρτα για να εισέλθει κανείς στον Αρχαίο Ελληνικό κόσμο δεν είναι κατ' ανάγκη ο Όμηρος. Η Ελληνική Γεωμετρία είναι μια πόρτα ανοικτή διάπλατα, που προσφέρει στα μάτια ένα λιτό, αλλά ουσιώδες τοπίο. Ο Πλάτων μας έδωσε τη δυνατότητα να καταλάβουμε την ασυμμετρία του λόγου της διαγωνίου προς την πλευρά και ο Πλάτων επίσης μας βοήθησε να απαριθμήσουμε τα πέντε κανονικά πολύεδρα».

(*) Εισήγηση της **Ελένης Μήτσιου** σε εκδήλωση του Παραρτήματος Καστοριάς της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στις 24/11/2003.

Υπάρχουν και άλλοι διεθνείς διαγωνισμοί, όπως ο Διαγωνισμός Πόλεων που διοργανώνεται από το Περιοδικό Kvant, ο Διαγωνισμός Putnam όπου συμμετέχουν φοιτητές από τα Πανεπιστήμια του Καναδά και των Η.Π.Α., ο Διαγωνισμός Titeica που γίνεται στη μνήμη του G. Titeica, αλλά συμμετέχουν κυρίως Βαλκανικές χώρες. Ο τελευταίος έχει μια ιδιαιτερότητα˙ το πρωϊ διαγωνίζονται κατά μονάδες και το απόγευμα κατά ομάδες.

Μία χώρα που έχει πολλούς διαγωνισμούς, τοπικούς και διεθνείς, στη μνήμη κάποιων μαθηματικών, είναι η Ρουμανία. Δεν είναι, λοιπόν, τυχαίο πώς μια τόσο μικρή χώρα βρίσκεται συνήθως στην πρώτη τετράδα, στην Διεθνή Ολυμπιάδα.

Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί στην Ελλάδα (που διοργανώνονται από την Ε.Μ.Ε.) είναι:

1) Ο Διαγωνισμός ΘΑΛΗΣ. Αυτός γίνεται σε κάθε νομό, συνήθως Οκτώβριο. Παίρνουν μέρος μαθητές από την Β' Γυμνασίου (η οποία συμμετείχε για πρώτη φορά το 1995) έως και την Γ' Λυκείου. Κάθε τάξη διαγωνίζεται σε ξεχωριστά θέματα. Από αυτά, συνήθως το ένα είναι πιο δύσκολο, και, για να λυθεί, θα πρέπει ο μαθητής να έχει αυξημένες ικανότητες σκέψης και μαθηματικών.

2) Ο Διαγωνισμός ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ. Αυτός γίνεται Δεκέμβριο ή Ιανουάριο και συμμετέχουν σε αυτόν όσοι διακρίθηκαν στον ΘΑΛΗ. Τα θέματα είναι πάλι κατά τάξη αλλά δυσκολότερα. Στην επίλυση αυτών των θεμάτων (όχι όλων) συμμετέχουν θέματα που είναι είτε εκτός σχολικής ύλης είτε περιθωριακά στην σχολική ύλη.

3) Ο Διαγωνισμός ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ, η Εθνική Ολυμπιάδα. Αυτός γίνεται Ιανουάριο ή Φεβρουάριο και συμμετέχουν όσοι διακρίθηκαν στον ΕΥΚΛΕΙΔΗ. Διεξάγεται στην Αθήνα και τα θέματα είναι για δύο ηλικίες, τους Μικρούς και τους Μεγάλους. Στους Μικρούς συμμετέχουν όσοι, μέχρι την Βαλκανιάδα, θα είναι κάτω από 15 χρονών. Τα θέματα είναι μεγαλύτερης δυσκολίας απ' ό,τι πριν. Για να διακριθείς στην Εθνική Ολυμπιάδα (τον ΑΡΧΙΜΗΔΗ), πρέπει να έχεις ειδική ικανότητα αλλά και κάποιες επιπλέον γνώσεις μαθηματικών. Οι διακριθέντες σ' αυτήν είναι 20 Μικροί και 20 Μεγάλοι. Από τους 20 σε κάθε ηλικία, οι 6 πρώτοι αποτελούν συνήθως την Εθνική Ομάδα των Μικρών και των Μεγάλων. Κάποιες φορές, γίνονται και εσωτερικοί διαγωνισμοί μεταξύ των 20 και, άλλες φορές, εξετάζονται προφορικά, τύπου συνέντευξης (τα τελευταία χρόνια δεν συμβαίνει αυτό). Σε περίπτωση κωλύματος ενός μαθητή, αυτός αντικαθίσταται από αναπληρωματικό.

Η Εθνική των Μικρών συμμετέχει στην Βαλκανική Ολυμπιάδα των Μικρών (G.B.O.) και την Μεσογειακή Ολυμπιάδα Νέων. Η Εθνική των Μεγάλων συμμετέχει στην Βαλκανική και Μεσογειακή Ολυμπιάδα και στη Διεθνή Ολυμπιάδα. Το 2004, η Διεθνής Ολυμπιάδα θα διεξαχθεί στην Αθήνα.

Τέλος, το ίδιο Σαββατοκύριακο με τη Εθνική Ολυμπιάδα, διεξάγεται και ο «Λευκοπούλειος» Διαγωνισμός, που είναι διαγωνισμός συνδυαστικής και πιθα-

νοτήτων. Συμμετέχουν οι Μεγάλοι. Ο διαγωνισμός γίνεται υπό την αιγίδα του Εθνικού Στατιστικού Ινστιτούτου.

Σε οποιονδήποτε διαγωνισμό επιτρέπεται ένας Μικρός να συμμετέχει στους Μεγάλους.

Είναι γεγονός ότι το κύρος της Ε.Μ.Ε. δεν έχει πέσει, παρά τα ατοπήματά της, εξ' αιτίας των μαθηματικών διαγωνισμών. Καλά θα κάνει, λοιπόν, η Ε.Μ.Ε. να τους διαφυλάξει και να τους ενισχύσει. Πρέπει να γίνονται και τοπικοί διαγωνισμοί, ώστε να προπονούνται οι μαθητές σε τέτοιου είδους θέματα. Να βοηθήσει η Ε.Μ.Ε. τα τοπικά παραρτήματα προς αυτή την κατεύθυνση. Τελευταία, ψηφίστηκε από τη Βουλή νόμος, σύμφωνα με τον οποίο, όποιος έχει συμμετοχή σε διεθνή ή βαλκανικό διαγωνισμό θα μπαίνει σε οποιαδήποτε σχολή έχει ως βασικό μάθημα τα μαθηματικά. Αυτό όλοι το θέλαμε, όμως η Ε.Μ.Ε. πρέπει να προσέξει πολύ γιατί πάντα υπάρχουν κάποιοι που θα θελήσουν να εκμεταλλευτούν αυτό το μέτρο, χωρίς να το αξίζουν.

Ζούμε σε μια εποχή που τα παιδιά έχουν πολλά ενδιαφέροντα και πολλές υποχρεώσεις. Ξένες γλώσσες, αθλητισμό, μουσική, χορό κ.ά. Κάποια απαραίτητα, κάποια για χόμπι και κάποια, κακά τα ψέματα, για να εκτονωθούν τα όνειρα των γονέων τους. Οι μαθητές που δεν έχουν καλές επιδόσεις στα μαθήματα βρίσκουν διέξοδο κυρίως στον αθλητισμό, σε τέχνες ή δεξιότητες και σωστά πράττουν, διότι κάθε άνθρωπος πρέπει σε κάτι να είναι καλός, αυτό ανεβάζει τον αυτοσεβασμό του.

Τι διέξοδο όμως δίνουμε σε ένα ταλέντο του μυαλού και, ειδικά, του μαθηματικού μυαλού;

Μέσα σε μια τάξη ένας τέτοιος μαθητής βαριέται. Βαριέται γιατί ο καθηγητής- δάσκαλος ασχολείται με το μέσο όρο της τάξης και τους χαμηλούς μαθητές για να μπορέσει να τους δώσει να καταλάβουν. Αναγκαστικά, δεν ασχολείται μ' αυτόν. Τον καλεί απλά να δώσει τη σωστή απάντηση όταν δεν απαντά κανένας άλλος. Ξέρουμε ότι όλοι μας έχουμε θυσιάσει πολύ χρόνο, και θυσιάζουμε και τώρα, στο μαθητή της ήσσονος προσπάθειας (που, κατά ένα μεγάλο ποσοστό, συνεχίζει με την ίδια προσπάθεια).

Ακόμη, βλέπουμε ότι, αποτέλεσμα της στάσης μας αυτής, που είναι κατά ένα μεγάλο βαθμό υποχρεωτική, αφήνουμε αυτό το μυαλό να εξελίσσεται μόνο του, χωρίς καμία καθοδήγηση. Αυτό όμως είναι επισφαλές διότι αυτός ο μαθητής «τα πιάνει γρήγορα», τα καταλαβαίνει στο σχολείο. Συνηθίζει, λοιπόν, να μη διαβάζει, να μην ψάχνει στα βιβλία και κάποια στιγμή δημιουργούνται κενά και πιθανόν να ξεκόψει από τα μαθηματικά. Το μυαλό του να το στρέψει κάπου αλλού. Αυτό το «αλλού» μπορεί να είναι λάθος ή και επικίνδυνο.

Κάτι πρέπει να κάνουμε γι' αυτό το μυαλό, γι' αυτό το παιδί. Δεν θέλουμε να χάσουμε κανέναν από τα μαθηματικά, πόσο μάλλον αυτόν.

Θα πρέπει εμείς, ως δάσκαλοι, να δούμε αυτό το παιδί, να του ανοίξουμε τον ορίζοντα. Έστω 5-10 λεπτά σε κάθε ώρα μαθήματος να ασχολούμαστε με αυτά τα παιδιά. Είτε λέγοντας κάτι παραπάνω από την ύλη, είτε δίνοντάς τους κάποια άσκηση για ώθηση.

Να τους μιλήσουμε για τους διαγωνισμούς των μαθηματικών, να τους συστήσουμε ένα καλό βιβλίο. Ακόμη και στη λεπτομέρεια, εκεί που θα δείξουμε κάτι με «ανορθόδοξο» τρόπο, π.χ. λύνουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού και δίνουμε σαν παράδειγμα την $x^2 + x - 72 = 0$. Αφού τη λύσουμε κανονικά, παρατηρούμε ότι $x\cdot(x+1)=72$ άρα είναι $8\cdot 9$ ή $(-9)\cdot(-8)$, οπότε $x = 8$ ή $x = -9$ (γινόμενο διαδοχικών) χωρίς να δώσουμε έκταση.

Βρίσκουμε διακρίνουσα 1523: λέμε στα παιδιά ότι η ρίζα δεν βγαίνει ακέραιος γιατί ο αριθμός τελειώνει σε 3 και αναθέτουμε στον καλό να ψάξει στο σπίτι σε ποιους αριθμούς τελειώνουν τα τέλεια τετράγωνα. Να μάθουν να παίζουν λίγο με τα μαθηματικά.

Μια χρονιά που ήμουν σε Γυμνάσιο, συνήθιζα στο τέλος της ώρας να τους βάζω μερικά θέματα «πονηρά». Σε λίγες μέρες, κάθε φορά που έμπαινα στην τάξη, οι 4-5 καλύτεροι έλεγαν «κυρία, κανένα πονηρό;». Εκεί τους δέσμευσα ότι πρέπει να διαβάζουν το σχολικό βιβλίο και την θεωρία για να μάθουν να μιλάνε, να λύνουν τις ασκήσεις και τότε, αφού θα είμαι ευχαριστημένη από αυτούς, θα τους βάζω τα «πονηρά». Ιδιαίτερα η Α΄ Γυμνασίου είχε μεγάλη ανταπόκριση. Όταν τους έβαλαν έκθεση «ποιο μάθημα αγαπούν» όλοι, μηδενός εξαιρουμένου, έγραψαν για τα μαθηματικά. Σ' αυτό το σχολείο, στο τέλος της χρονιάς, διοργάνωσα ένα μαθηματικό διαγωνισμό με κοινά θέματα και για τις τρεις τάξεις. Πρώτος βγήκε ένας μαθητής της Α΄ Γυμνασίου, δεύτερος ένας της Β΄ και τρίτος πάλι της Α΄. Γιατί συνέβη αυτό; Και οι άλλες τάξεις είχαν κάποια καλά μυαλά, αλλά εγκλωβίστηκαν στην σχολική ύλη, δε σκέφτονταν ανεπηρέαστα, προσπαθούσαν να εντάξουν το πρόβλημα σε κάποια μεθοδολογία, σε μια κατηγορία από αυτές που ήξεραν.

Δεν είναι τυχαίο ότι, όταν υπήρχε το σύστημα των δεσμών, αν έμπαινε κάποιο πρόβλημα γεωμετρίας σε διαγωνισμό, στην Γ΄ Λυκείου προσπαθούσαν να το λύσουν με Αναλυτική Γεωμετρία ενώ στη Β΄ Λυκείου με Ευκλείδεια.

Επανέρχομαι, λοιπόν, και λέω ότι αυτά τα παιδιά με την ιδιαίτερη έφεση στα μαθηματικά πρέπει να βρούμε τρόπους να τα προσέξουμε και είναι πολύ θετικό που υπάρχουν οι μαθηματικοί διαγωνισμοί αλλά και πολλά sites στο Internet με θέματα, που μπορούμε να τους υποδείξουμε και να τα ψάξουν μόνοι τους. Και σεις εδώ, το Παράρτημά σας, θα μπορούσε να διοργανώσει ένα μαθηματικό διαγωνισμό.

Γιατί θέλουν αυτά τα παιδιά να συμμετέχουν σε τέτοιους διαγωνισμούς; Με ευκαιρία την εκδήλωση αυτή, ρώτησα κάποιους απ' αυτούς. Η απάντηση ήταν ίδια σχεδόν: «Γιατί μου αρέσουν τα θέματα, ξεφεύγουν από τα καθιερωμένα».

Είναι γεγονός ότι όλοι σχεδόν οι επιτηρητές στο διαγωνισμό ΘΑΛΗΣ, την ώρα της διεξαγωγής του διαγωνισμού λύνουν τα θέματα, δεν επιτηρούν και τόσο φανατικά, μάλιστα πολλοί από αυτούς επειδή έχουν τα θέματα μόνο της τάξης που επιτηρούν, ζητάνε και των άλλων τάξεων. Την ίδια ερώτηση που κάναμε σ' αυτά τα παιδιά, μπορούμε να την κάνουμε και στους εαυτούς μας. Και η απάντηση θα ήταν ότι όταν καταπιανόμαστε να λύσουμε ένα καλό-δυνατό θέμα, αισθανόμαστε τρομερή ευχαρίστηση.

Πολλά από τα θέματα που έχουν δοθεί σε διαγωνισμούς ήταν ελκυστικά και ενδιαφέροντα. Θα σας αναφέρω μερικά. Από αυτά άλλα μπήκαν σε ελληνικούς και άλλα σε ξένους τοπικούς διαγωνισμούς :

1) *Ένας περήφανος Σλοβουδός παίζει στη χώρα του ΠΡΟ-ΠΟ, μόνο που εκεί έχει 19 αγώνες. Πόσες τουλάχιστον στήλες πρέπει να συμπληρώσει για να είναι σίγουρος ότι θα έχει τουλάχιστον 7 επιτυχίες;*

2) *Σε μια χώρα της Λατινικής Αμερικής υπάρχει μια φυλακή με χίλια κελιά και χίλιους φυλακισμένους, ένα σε κάθε κελί και χίλιους φύλακες, ένα σε κάθε κελί. Γίνεται πραξικόπημα. Ο φύλακας 1 ανοίγει όλα τα κελιά, ο φύλακας 2 κλείνει όλα τα άρτια κελιά, ο φύλακας 3 κλείνει ή ανοίγει τα κελιά που είναι πολλαπλάσια του 3 (ανάλογα με το αν τα βρίσκει ανοικτά ή κλειστά αντίστοιχα), ο φύλακας 4 κλείνει ή ανοίγει (με την ίδια λογική) τα κελιά που είναι πολλαπλάσια του 4 κ.ο.κ. και τέλος ο φύλακας 1000 κλείνει ή ανοίγει (ανάλογα με το αν το βρίσκει ανοικτό ή κλειστό) το κελί 1000. Μετά απ' όλα αυτά πόσοι και ποιοι κρατούμενοι θα δραπετεύσουν;*

3) *Να βρεθεί θετικός ακέραιος που είναι πολλαπλάσιο του 41 και έχει 41 διαιρέτες.*

4) *Σε ένα τετράγωνο πλευράς 20 παίρνουμε 1999 διακεκριμένα σημεία στο εσωτερικό του. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τρίγωνο με κορυφές τρία από αυτά τα σημεία και εμβαδό μικρότερο ή ίσο του 1/10.*

5) *Σε ν σακιά με λίρες άνισου όγκου, βάρους και σχήματος υπάρχουν κ από αυτά που έχουν κάλπικες. Γνωρίζοντας ότι κάθε κάλπικη λίρα ζυγίζει 1 γραμμάριο λιγότερο από τη γνήσια, να βρείτε με μια ζύγιση τα κ σακιά με τις κάλπικες λίρες.*

6) *Αν ο αριθμός 7^{500} τελειώνει σε 001 τότε ποια είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού 7^{9999} ;*

7) *Βρείτε έναν αριθμό που, αν το τελευταίο του ψηφίο το βάλουμε πρώτο, τότε διπλασιάζεται.*

8) *Έστω α και β τα μέτρα των βάσεων ενός ισοσκελούς τραπεζίου και δ το μέτρο κάθε διαγωνίου του. Αν ισχύει* $(\alpha + \beta)^2 - 2\delta(\alpha + \beta + 1) + 2\delta^2 + 1 = 0$, *να βρείτε το εμβαδόν του.*

9) Δίνεται κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ τέτοιο ώστε:

$$AB = AE = \Gamma\Delta = 1 \quad \text{και} \quad B\Gamma + \Delta E = 1.$$

Οι γωνίες Β και Ε είναι ορθές. Να βρείτε το εμβαδόν του.

10) *Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΒΜ διάμεσός του. Η κάθετη από το Α στη ΒΜ τέμνει την ΒΓ στο Α΄ . Να υπολογίσετε το λόγο ΒΑ΄/ΓΑ΄.*

11) *Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημεία Ε, Ζ στις ΔΓ, ΒΓ τέτοια ώστε:*
ΑΖ = ΔΕ + ΒΖ και ΑΕ διχοτόμος της γωνίας ΔΑΖ. Αποδείξτε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

12) *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και* $\Gamma = 36^\circ$. *Αν ΑΔ το ύψος με ΑΔ = 3 ενώ ΓΕ διχοτόμος, να βρείτε το μέτρο της ΓΕ.*

13) *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με* $A = 100^\circ$, *παίρνουμε σημείο Δ στην προέκταση της ΑΒ, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ. Υπολογίστε τη γωνία ΒΓΔ.*

14) *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), όπου* $A = 20^\circ$, *παίρνουμε σημείο Δ στην ΑΓ, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ. Υπολογίστε την γωνία ΒΔΓ.*

Η λογική με την οποία επιλέγονται τα θέματα, είναι:

1) Ο μαθητής πρέπει να κατέχει καλά τη σχολική ύλη.
2) Κάποια θέματα να απαιτούν πολλή δουλειά και κάποια ευφυϊα.
3) Κάποια να επιλύονται με προτάσεις εκτός σχολικής ύλης (τουλάχιστο στον ΕΥΚΛΕΙΔΗ και τον ΑΡΧΙΜΗΔΗ).

Αυτό γίνεται γιατί ο μαθητής που ενδιαφέρεται για τα μαθηματικά πρέπει να διαβάζει κάτι παραπάνω από τα σχολικά. Αν δει σε μια άσκηση ότι «έχει ονοματεπώνυμο» να ενδιαφερθεί, να μάθει ότι αυτό είναι θεώρημα και μπορούμε, ως τέτοιο, να το χρησιμοποιούμε στους διαγωνισμούς. Πρέπει να αποδείξει ο μαθητής ότι έχει πρόθεση να διαβάσει και επιπλέον. Πώς θα συνεχίσει στους επόμενους διαγωνισμούς; Πώς θα ανταποκριθεί σε διεθνές επίπεδο, αν προκριθεί; Δεν έχουν όλες οι χώρες την ίδια σχολική ύλη.

Είναι Έλληνας μαθητής και θα διαγωνιστεί σε παγκόσμιο επίπεδο χωρίς να ξέρει όλες τις Προτάσεις στη Γεωμετρία; Χωρίς να ξέρει –και ας είναι εκτός σχολικής ύλης- τα Θεωρήματα του Πτολεμαίου, του Μενελάου, του Ceva, την ευθεία Simson, τον κύκλο των εννέα σημείων;

Όχι. Θα πρέπει να τα ξέρει όλα αυτά και πολλά άλλα. Επιβάλλεται, από ένα σημείο και μετά, να μάθει Στερεομετρία, να μάθει Θεωρία Αριθμών και Συνδυα-

στική, μέσα από προβλήματα Θεωρίας Παιγνίων. Δεν μπορεί να προχωρήσει αν δεν γνωρίζει την Αρχή Dirichlet , παραδείγματος χάριν.

Κάποια προβλήματα που επιλύονται εύκολα με προτάσεις εκτός σχολικής ύλης μπορεί ένας μαθητής να τα λύσει και χωρίς αυτές, αλλά θα σπαταλήσει τόσο χρόνο που δεν θα προλάβει να δει τα υπόλοιπα θέματα. Στο πρώτο επίπεδο (Διαγωνισμός ΘΑΛΗΣ, ίσως και ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ), μπορεί ένας έξυπνος μαθητής να προχωρήσει χωρίς το επιπλέον διάβασμα, αλλά στον ΑΡΧΙΜΗΔΗ και μετά είναι σχεδόν αδύνατο. Όχι μόνο πρέπει να διαβάσει αλλά και να επιλύσει πολλά θέματα, να εξασκηθεί, να προπονηθεί. Όσο ταλέντο και να έχει κάποιος, κακά τα ψέματα, χωρίς προπόνηση δεν πάει για πρωταθλητισμό.

Κάποιες χώρες, που έχουν καλές θέσεις και διακρίσεις, έχουν αποσπασμένους εκπαιδευτικούς και πανεπιστημιακούς που προπονούν τα παιδιά όλο το χρόνο και ειδικά την εθνική τους ομάδα. Αν ήθελε η Ελλάδα να έχει μια καλή συμμετοχή το 2004, έπρεπε από τέσσερα τουλάχιστον χρόνια πριν, να δημιουργήσει φυτώριο το οποίο τώρα θα ήταν σε θέση να συναγωνιστεί αυτές τις χώρες επάξια. Υπάρχουν άτομα που θα μπορούσαν να αναλάβουν αυτό το έργο. Η προσπάθεια που έγινε πέρυσι μέσω της Πρόσθετης Διδακτικής Στήριξης είναι ελλιπέστατη και τα θέματα που γίνονται σ' αυτά τα μαθήματα, αντιστοιχούν στον $1^{ο}$ γύρο. Και τι να κάνει ένας συνάδελφος που ασχολείται για πρώτη φορά, με μηδαμινό υλικό και με παιδιά που δεν έχουν επιλεγεί προσεχτικά; Όσοι καλοί πήγαν σ' αυτά τα μαθήματα, από άλλες πόλεις που ξέρω, αυτά που άκουσαν εκεί, τα ήξεραν.

Την ευθύνη τέτοιων μαθημάτων έπρεπε να την έχει η Ε.Μ.Ε. και όχι η Δευτεροβάθμια Διεύθυνση. Έπρεπε να πάρει ειδικό κονδύλι γι' αυτό και μάλιστα πριν από τέσσερα χρόνια και να γίνει σοβαρή δουλειά. Τελικά αναγκάζουμε αυτόν τον καλό μαθητή, το μυαλό που λέγαμε, να μείνει μόνος. Αυτό δε συμβαίνει στον αθλητισμό. Εκεί δεν απασχολούνται μόνο προπονητές (βλέπε άρση βαρών) αλλά και άτομα για να κουβαλάνε τις πετσέτες.

Η μόνη κίνηση συμπαράστασης που είδα τα τελευταία χρόνια είναι που το Μαθηματικό Θεσσαλονίκης έδωσε στο Ρωμανό Μαλικιώση 10 εκατομμύρια δραχμές για την επίδοσή του.

Όσο και να βοηθούμε εμείς οι εκπαιδευτικοί –που πρέπει να το κάνουμε- αν δεν ενδιαφερθεί η πολιτεία γι΄αυτά τα παιδιά και δεν βάλει το χέρι στην τσέπη, δεν θα έχουμε ποτέ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Επομένως τα Παραρτήματα και κυρίως η ηγεσία της Ε.Μ.Ε. προς αυτήν την κατεύθυνση πρέπει να κινηθούν.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Ο ΑΝΘΡΩΠΟΣ

Κερασαρίδης Γιάννης
Μαθηματικός, Άλιμος

I. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

α) Μια απόπειρα ορισμού

Τα Μαθηματικά μελετούν τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις στον πραγματικό κόσμο, και, έτσι, το αντικείμενο μελέτης τους έχει τις ρίζες του στην πραγματικότητα. Η πολύ αφηρημένη μορφή αυτού του αντικειμένου μελέτης με δυσκολία αποκρύπτει την προέλευσή της από τον εξωτερικό κόσμο. Όμως, για να ερευνηθούν αυτές οι μορφές και οι σχέσεις ως αφηρημένες, είναι απαραίτητο, να αποχωρισθούν, εντελώς, από το υποκείμενο (υλικό) περιεχόμενό τους, το οποίο πρέπει να παραμεριστεί σαν κάτι άσχετο.

Όμως, ο αφηρημένος χαρακτήρας των Μαθηματικών, δεν συνεπάγεται τον διαχωρισμό των Μαθηματικών από την υλική πραγματικότητα. Το πλήθος των ποσοτικών σχέσεων και των μορφών του χώρου, που μελετώνται από τα Μαθηματικά, είναι άρρηκτα συνδεμένο με τις απαιτήσεις της Τεχνολογίας και των Φυσικών Επιστημών και αυξάνεται συνεχώς. Κατά συνέπεια, ο ορισμός των Μαθηματικών, που δόθηκε πιο πάνω, εμπλουτίζεται με ακόμη αφθονότερο περιεχόμενο.

Τα Μαθηματικά έχουν ως αντικείμενό τους *τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις του πραγματικού κόσμου,* επομένως πολύ υπαρκτό υλικό. Το γεγονός, ότι αυτό το υλικό αποκτά μια εξαιρετικά αφηρημένη μορφή, μπορεί μόνο να επισκιάσει την προέλευσή του από τον εξωτερικό κόσμο.

Όμως για να είμαστε σε θέση να διερευνήσουμε αυτές τις μορφές και σχέσεις στην καθαρή τους μορφή, *είναι αναγκαίο να τις διαχωρίσουμε εντελώς από*

το περιεχόμενό τους, ν' αφήσουμε αυτό το τελευταίο στην άκρη σαν κάτι αδιάφορο…

Αλλά, όπως και σε όλους τους τομείς της σκέψης, *οι νόμοι, αποσπασμένοι από τον πραγματικό κόσμο αντιπαρατίθενται σ' αυτόν σαν κάτι αυτοτελές, σαν νόμοι που προβάλλουν απ' τα έξω και με τους οποίους η πραγματικότητα πρέπει να συνταιριαστεί.* Κλασικό παράδειγμα οι έννοιες «Κοινωνία» και «Κράτος»
Τα κ α θ α ρ ά Μαθηματικά (που για αφετηρία είχαν τη σχέση του ανθρώπου με την υλική πραγματικότητα) ε φ α ρ μ ό σ τ η κ α ν στη συνέχεια στον κόσμο, *αν και υιοθετήθηκαν από τον ίδιο αυτό κόσμο,* και απλώς εκφράζουν ένα μέρος των μορφών των διασυνδέσεων που περιέχει, και ακριβώς *γι' αυτό και μόνο μπορούν γενικά να εφαρμόζονται*

β) Η σημασία των Μαθηματικών

Οι σχέσεις των Μαθηματικών με τις πρακτικές ανάγκες και με το πρακτικοδιανοητικό επίπεδο της ανθρώπινης κοινωνίας καθορίζουν την ανάπτυξή τους. Έτσι καταλήγουν σε καθολικά επιτεύγματα που τους επιτρέπουν να εξυπηρετούν και να επιδρούν επί αιώνες και χιλιετίες στην ανάπτυξη των επόμενων εποχών. Σήμερα θα λέγαμε ότι τα Μαθηματικά πάντοτε έφεραν τα ίχνη της *«παραγωγικής δύναμης»* στην πνευματική και οικονομική συγκρότηση κάθε εποχής, εξυπηρετώντας την με τα αντίστοιχα για τις ανάγκες της νέα και κληροδοτημένα καθολικά μαθηματικά μέσα.

γ) Η καθολικότητα των Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά ξεχωρίζουν μεταξύ των άλλων επιστημών με την καθολικότητά τους. Οι μέθοδοι της μαθηματικής έρευνας αποτελούν πρακτικά αναπόσπαστο τμήμα όλων των επιστημών. Οι μαθηματικοί εργάζονται σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας και τα αποτελέσματά τους στη συνέχεια επιβεβαιώνονται πειραματικά. Η εφαρμογή των μαθηματικών μεθόδων έρευνας αυξάνει την αντικειμενική αξία των επιστημονικών θεωριών.

Η καθολικότητα των Μαθηματικών εξηγείται από την ευρύτητα του αντικειμένου τους. ***Όλα τα αντικείμενα κι οι διαδικασίες που υπάρχουν πραγματικά στον κόσμο έχουν ιδιότητες που εκφράζονται στις φιλοσοφικές κατηγορίες της ποσότητας και της μορφής.*** *Με άλλα λόγια, οι ποσοτικές σχέσεις κι οι μορφές του χώρου αφορούν όλα τα στοιχεία που συνθέτουν την πραγματικότητα και χωρίς τον διαχωρισμό και τη μελέτη τους, οι επιστημονικές έρευνες αποδείχνονται ελλιπείς.*

Στο επόμενο τεύχος: **Πώς, ακριβώς, γεννήθηκαν οι μαθηματικές έννοιες;**

Η Αριθμοφοβία

και οι ευθύνες των Μαθηματικών

Ρίζος Γιώργος
Μαθηματικός, Κέρκυρα

Τα "Μαθημαχτικιά"...

Η προσπάθεια πολλών δημοσιογράφων για χτυπητούς τίτλους, που θα τραβήξουν την προσοχή των αναγνωστών, οδήγησε τον Μάιο του 2003 στην επαναλαμβανόμενη χρήση του "χαριτωμένου" όρου: **"Μαθημαχτικιά"**, που θα μπορούσε να είναι, σε μια δημοσιογραφική αργκό, απόδοση του όρου **"Αριθμοφοβία"**.

Το αποτέλεσμα είναι ότι το αρχικά ανθρώπινο μεν, αδικαιολόγητο δε λάθος της Κεντρικής Επιτροπής Εξετάσεων και η απαράδεκτη στη συνέχεια προσπάθεια αποσιώπησης, συγκάλυψης, συκοφάντησης ως ασχέτων ή ... πολιτικά υποκινούμενων όσων δικαίως διαμαρτυρόταν, ανάγεται πλέον σε **πρόβλημα των μαθηματικών**! Η ανθρώπινη ευθύνη γενικεύεται ως **χτικιό** των **μαθηματικών**. Δεν φταίει ο καπετάνιος που στραβά αρμενίζει˙ ο γιαλός θα είναι στραβός!

ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ

ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ ΑΔΕΣΜΕΥΤΗ ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΧΤΙΚΙΑ: Ενταση και από τους πανεπιστημιακούς

ΓΡΑΨΕ ΛΑΘΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ: Λανθασμένη η επιλογή του θέματος

ΑΠΟ ΤΟΝ ΥΠΟΥΡΓΟ Συγκαλείται εκτάκτως η επιτροπή

Τι θα μπορούσαμε να κάνουμε;

Πρώτα και κύρια, η σαφής, ξεκάθαρη και τεκμηριωμένη στάση των επιστημονικών σωματείων (διοικούσας επιτροπής ΕΜΕ και παραρτημάτων) και των πανεπιστημιακών τμημάτων θα απέτρεπε τη δημιουργία σύγχυσης στον κόσμο. Κάποιοι έπραξαν το καθήκον τους˙ κάποιοι άλλοι όμως, δυστυχώς, είτε αδιαφόρησαν, είτε συνέβαλαν συνειδητά στη δημιουργία σύγχυσης με σκοπό

τη συγκάληψη των ευθυνών σε ένα τεχνητό παραπέτασμα καπνού.

Όμως, η ορθότητα ή μη των μαθηματικών προτάσεων είναι αντικειμενική· δε μεταβάλεται με διορθωτικές παρεμβάσεις και οδηγίες. Τα λάθη στα μαθηματικά δεν είναι αυθαίρετα κτίσματα, που νομιμοποιούνται εκ των υστέρων "από το παράθυρο" με τροποποιητικούς νόμους και διατάγματα.

Όσοι, λοιπόν, θεσμοθετημένοι θεματοφύλακες της επιστημονικής ορθότητας σιώπησαν ή είπαν ψέματα, **είναι υπόλογοι για την ανάπτυξη των φαινομένων αριθμοφοβίας** με αφορμή το συγκεκριμένο λάθος.

Τι είναι η αριθμοφοβία;

Έχουμε, ασφαλώς, όλοι ακούσει άπειρες φορές για τον φόβο και την αποστροφή που προκαλεί σε πολλούς ανθρώπους ή υποχρέωση έστω και της απλούστερης ενασχόλησης με τα μαθηματικά. Δεν αναφέρομαι μόνο σε μαθητές, αλλά ακόμα και σε απόφοιτους Θεωρητικών Σχολών.

Ένα αποτέλεσμα της ελλιπούς απόκτησης μαθηματικής Παιδείας είναι το **φαινόμενο της αριθμοφοβίας.**

Το φαινόμενο αυτό αναλύεται με απλό και σαφή τρόπο σε εισήγηση του μαθηματικού-Συγγραφέα Ι. Μαντά στο 18ο Συνέδριο ΕΜΕ, στη Ρόδο το 2001, με τίτλο: "*Οι Μαθηματικές Δραστηριότητες ως συνεισφορά για την άρση της Αριθμοφοβίας*":

> (...) Το σύνδρομο του **μαθηματικού αναλφαβητισμού** (ή **αριθμοφοβίας,** όπως εύστοχα έχει μεταφραστεί ο όρος "innumeracy" του Ελληνοαμερικανού μαθηματικού John Alien Paulos) έχει πάρει τα τελευταία χρόνια διαστάσεις ενδημικής ασθένειας στη χώρα μας, αλλά και σε ολόκληρο το δυτικό κόσμο.
>
> Η **αριθμοφοβία** συχνά εκδηλώνεται μέσω της αδυναμίας χρήσης και εφαρμογής των αριθμών σε στοιχειώδεις καθημερινές καταστάσεις, όπως, στον υπολογισμό ποσοστών, στην εκτίμηση και σύγκριση διαφόρων ποσοτήτων, στη χρήση της έννοιας της πιθανότητας κ.λπ. Ωστόσο, μπορούμε να πούμε ότι τα παραπάνω είναι επιμέρους συμπτώματα ενός γενικότερου ελλείμματος ορθολογικής σκέψης, το οποίο ενισχύεται και γιγαντώνεται καθημερινά μέσω ενός μηχανισμού θετικής ανάδρασης, που τροφοδοτείται από τις εφημερίδες, την τηλεόραση, κ.λπ.
>
> Δυστυχώς, **μέρος αυτού του μηχανισμού αποτελεί** σήμερα **και το σχολείο**, το οποίο αποτυγχάνει να διδάξει και να περάσει στην κοινωνία τις βασικές αρχές της μαθηματικής σκέψης, επικεντρώνεται με εμμονή στο λογιστικοτεχνικό και εξεταστικό μέρος και τελικά αποθαρρύνει και απομακρύνει σχεδόν όλους τους μαθητές από τα μαθηματικά και τον ορθολογισμό.
>
> Ο όρος "αριθμοφοβία" δεν αναφέρεται σε ανθρώπους που δεν έλαβαν ποτέ μαθηματική εκπαίδευση, αλλά σε ανθρώπους που ενώ έλαβαν

μαθηματική εκπαίδευση, συχνά προχωρημένη, ωστόσο έχουν μεγάλες αδυναμίες και ελλείμματα στη χρήση των αριθμών και στην άσκηση ορθολογικής σκέψης. Τονίζουμε ότι **η αριθμοφοβία** δεν περιορίζεται υποχρεωτικά στο τεχνικό μέρος του χειρισμού των αριθμών, αλλά **επεκτείνεται** και **στην κατανόηση εννοιών**, στην εφαρμογή μεθόδων και στον τρόπο σκέψης. Αριθμόφοβος δεν είναι μόνο εκείνος που αδυνατεί να φέρει σε πέρας απλούς αριθμητικούς υπολογισμούς, όπως π.χ. να υπολογίσει ένα ποσοστό.

Πρακτικά 18ου Συνεδρίου ΕΜΕ, Ρόδος, σελ 108

Ένα χαρακτηριστικό ανέκδοτο από τα πολλά που αναφέρεται στην αριθμοφοβία: *Ένας επισκέπτης Μουσείου Φυσικής Ιστορίας ρώτησε την ηλικία των απολιθωμάτων του σκελετού ενός δεινοσαύρου. Ο φύλακας απαντά ότι είναι 90.000.006 ετών και εξηγεί στο έκπληκτο επισκέπτη: «Όταν προσλήφθηκα στο Μουσείο, μου είπαν ότι είναι 90.000.000 ετών. Δουλεύω εδώ ήδη 6 χρόνια!»*.

Paulos John Allen, *A Mathematician Reads the Newspaper*,
Basic Books, N.Y., 1995

Περιπτώσεις ενίσχυσης της αριθμοφοβίας – Οι ευθύνες των Μαθηματικών.

Περιγράφουμε παρακάτω μερικά απλά και επίκαιρα(*) παραδείγματα ενίσχυσης της αριθμοφοβίας με ευθύνη των Μαθηματικών. Η απάλειψη ή έστω ο περιορισμός τέτοιων φαινομένων, θα συμβάλλει στο να γίνει αποτελεσματικότερη η διδασκαλία μας, να πλησιάσουν περισσότερο την μαθηματική παιδεία οι μαθητές και να αγαπήσουν τα μαθηματικά ή ... έστω να τα αντιπαθήσουν λιγότερο.

Στην Τάξη:

Δόθηκε σε πρόχειρο διαγώνισμα σε Α΄ Γυμνασίου η παρακάτω άσκηση:

"*Μία δεξαμενή έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Η βάση της έχει διαστάσεις 50 m × 60 m. Αν τη γεμίσουμε με 90.000 λίτρα ενός υγρού, ποιο είναι το ύψος της;*"

Με μία πρώτη πρόχειρη ματιά φαίνεται να είναι μία απλή εφαρμογή του τύπου του όγκου ορθογ. παραλληλεπιπέδου. Κάνοντας όμως τις πράξεις, θα βρούμε ότι το ζητούμενο ύψος είναι... 3 cm! Τα δεδομένα δεν ταιριάζουν βεβαίως σε δεξαμενή, οπότε μάλλον κάποιαν αλυκή αλατιού αφορά η εκφώνηση.

Αρκετοί μαθητές χρησιμοποίησαν σωστά τους τύπους, έκαναν και τις μετατροπές στην ίδια μονάδα και έβγαλαν το σωστό αποτέλεσμα.

Το δυσάρεστο όμως εδώ είναι ότι το παράδοξο της δεξαμενής που έχει εμβαδόν βάσης 3.000 m^2 και ύψος 3 cm(!) δεν σχόλιαστηκε ούτε από τους μαθητές, ούτε από τον διδάσκοντα. Χάθηκε έτσι η ευκαιρία να ξεφύγει η διδασκα-

(*) Το κείμενο γράφτηκε το καλοκαίρι του 2003. Πιστεύουμε ότι εξακολουθεί να είναι επίκαιρο.

λία από την απλή αλγοριθμική διαδικασία των πράξεων και να συνδεθεί με την πραγματικότητα. Θα άξιζε να ρωτήσει ο καθηγητής τους μαθητές αν μπορούν να φανταστούν το σχήμα της υποθετικής δεξαμενής. Να συγκρίνει π.χ. το εμβαδόν της βάσης της με το εμβαδόν της αυλής του σχολείου κ.λπ.

Όταν διδάσκουμε μονότονα και ανούσια σε μικρούς μαθητές αριθμητικές και αλγεβρικές πράξεις, δίχως να αξιοποιούμε απλά και αληθινά (ή έστω αληθοφανή) σενάρια **ενισχύουμε τη αριθμοφοβία**.

Στις Εξετάσεις:

Στα μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Γεν. Παιδείας τον Μάϊο του 2003 στο 4ο θέμα, μετά από πράξεις, φτάναμε στο σημείο όπου έπρεπε να συγκριθούν οι αριθμοί $CV_A = \frac{\sqrt{69}}{15}$ και $CV_B = \frac{\sqrt{123}}{24}$.

Πολλοί μαθητές βρέθηκαν σε δυσκολία ή ακόμα και σε αδιέξοδο, προσπαθώντας να υπολογίσουν τις ρίζες σε δεκαδική προσέγγιση και να κάνουν μετά τις διαιρέσεις. Πολλοί λαχταρούσαν να είχαν μαζί τους ένα τόσο δα μικρό κομπιουτεράκι για να κάνουν τις πράξεις.

Δεν το μέμφομαι αυτό· είναι φυσιολογικό να συμβαίνει. Παλαιότερα διδασκόταν στα Λύκεια αλγόριθμοι υπολογισμού λογαρίθμων και ριζών. Σήμερα βέβαια αυτό φαίνεται μακρινό παρελθόν.

Αυτό που μου κακοφάνηκε ήταν διάφορες "λύσεις" που δημοσιεύτηκαν σε εφημερίδες και στο διαδίκτυο της μορφής:

$$CV_A = \frac{\sqrt{69}}{15} \approx 0{,}5553 \text{ και } CV_B = \frac{\sqrt{123}}{24} \approx 0{,}4621, \text{ άρα } CV_A > CV_B \text{ κ.λπ.}$$

Η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων, στις ενδεικτικές λύσεις, αφήνει τους αριθμούς σε μορφή άρρητων και αποφαίνεται ότι προφανώς $CV_A > CV_B$!

Η αυθαίρετη, υπεροπτική στάση του ειδήμονα, που από την πολυθρόνα του λύνει το "γόρδιο δεσμό" με σπαθί το κομπιουτεράκι του, είναι ο ορισμός του υπεύθυνου για την **αριθμοφοβία** των μαθητών.

Τι θα πεις στον μαθητή που θα σε ρωτήσει: "*Για να μπω στην Νομική, πρέπει να κάνω με το μυαλό μου αυτές τις πράξεις, όπως βλέπω στις λύσεις που μου δίνετε; Αυτό ζητούσαν από μένα;*"

Όχι βέβαια· δεν ζητείται η χρήση αλγόριθμου για την εξαγωγή των ριζών, αλλά απλά προσεγγίσεις τους π.χ. με διαδοχικά φράγματα. Δείχνει ευχέρεια στις πράξεις και κριτική ικανότητα μία απλή αντιμετώπιση, όπως η παρακάτω:

$$CV_A = \frac{\sqrt{69}}{15} > \frac{\sqrt{64}}{15} = \frac{8}{15} > 0{,}5 \text{ και } CV_B = \frac{\sqrt{123}}{24} < \frac{\sqrt{144}}{24} = \frac{12}{24} = 0{,}5 \text{ άρα } CV_A > CV_B$$

Όταν θα διδάξουμε παρόμοια θέματα στις τάξεις, θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στη χρήση υπολογιστών. Θα πρέπει να μας βλέπουν οι μαθητές να αντιμετωπίζουμε με τους ίδιους με αυτούς όρους τις ασκήσεις και όχι από θέση ισχύος με τα "χαρτιά στημένα". Μια τέτοια στάση τους φέρνει πιο κοντά στα μαθη-

ματικά και **υπερνικά τον φόβο τους**.

Στα Βιβλία:

Ο ρόλος των διδακτικών βιβλίων είναι αναμφισβήτητα καθοριστικός για την ποιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών. 'Οταν είναι καλογραμμένα φαίνονται ελκυστικά στους μαθητές και τους είναι χρήσιμα, αλλά και στους καθηγητές δίνουν εφόδια και παραδείγματα για τη σωστή διδασκαλία, που ούτε υπολείπεται, μα και και ούτε ξεφεύγει ή παρεκτρέπεται από το πρόγραμμα.

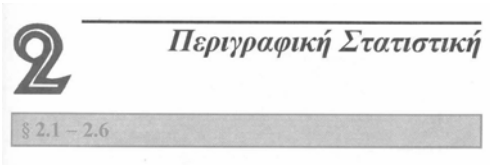
Τα περισσότερα βιβλία που χρησιμοποιούμε σε Γυμνάσιο και Λύκειο είναι, νομίζω, αποδεκτά έως καλά, δίνουν σαφείς κατευθύνσεις στον καθηγητή και δεν δημιουργούν προβλήματα με λάθη ή παράλογα παραδείγματα.

Εξαίρεση αποτελούσαν τα προχειρογραμμένα βιβλία των Τεχνολογικών Κατευθύνσεων (ΤΕΛ, Τεχν. κατεύθυνση), που ευτυχώς αποσύρθηκαν, με μοναδικά που απέμειναν τα βιβλία των ΤΕΕ.(*)

Λες και απευθύνονται σε "παιδιά ενός κατώτερου Θεού" ήταν κακογραμμένα, με λάθη, ασάφειες, κακή διάρθρωση της ύλης, έλλειψη κλιμάκωσης των ασκήσεων κ.α

Φανταστείτε τη θέση του καθηγητή που θα μπει να διδάξει Στατιστική σε μία τάξη 2ου Κύκλου ΤΕΕ, με μόνο εργαλείο το σχολικό βιβλίο και θα ζητήσει από τους μαθητές να λύσουν σαν **ΠΡΩΤΟ** παράδειγμα την πρώτη άσκηση που βλέπετε δίπλα...

Βλέποντας οι μαθητές τους αριθμούς που πρέπει να τοποθετήσουν σε διάγραμμα, δεν θα τρομάξουν στην ιδέα τι τους περιμένει παρακάτω;


2 Περιγραφική Στατιστική

§ 2.1 – 2.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Οι εισαγωγές – εξαγωγές της χώρας από το 1974 έως το 1993 δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Εισαγωγές και Εξαγωγές 1974 – 1993

'Ετος	Εισαγωγές	Εξαγωγές	'Ετος	Εισαγωγές	Εξαγωγές
1974	132181	60980	1984	1083880	542676
1975	172041	74441	1985	1412797	629085
1976	223159	93811	1986	1582298	789995
1977	252150	101330	1987	1867354	955070
1978	287729	123727	1988	1756998	776434
1979	356820	144238	1989	2625714	1230942
1980	452881	221108	1990	3137524	1267507
1981	493764	237928	1991	3921522	1579967
1982	665920	286281	1992	4484059	1880763
1983	848295	392652	1993	5050531	1933422

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

Να γίνει η γραφική παράσταση αυτών με πολυγωνικές γραμμές στην ίδια γραφική παράσταση.

Το κακό είναι ότι ό,τι και να σκεφτούν δίκιο θά 'χουν. Δείτε άσκηση που περιέχεται λίγο παρακάτω στο ίδιο βιβλίο:

(*) Για περισσότερα σχόλια σε σχέση με τα παραδείγματα που περιέχουν, δες και σχετικό άρθρο: ΟΙ ΔΙΑΤΥΠΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ, στο 1ο τεύχος του Απολλωνίου, Απρίλιος 2003.

'Ασκηση 2

Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει την κατανομή των μηχανοκίνητων αλιευτικών σκαφών ως προς την ιπποδύναμη τους:

Μηχανοκίνητα αλιευτικά σκάφη, κατά κλιμάκια ιπποδυνάμεως μέχρι 200 HP κατά το έτος 1991

Κλιμάκια ιπποδυνάμεως	v_i
[0, 10)	10
[10, 20)	52
[20, 30)	1777
[30, 40)	1317
[40, 50)	856
[50, 60)	863
[60, 70)	434
[70, 80)	517
[80, 90)	486
[90, 100)	452
[100, 150)	1243
[150, 200)	410

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

Ζητείται ο υπολογισμός: Μέσης τιμής, διακύμανσης και τυπικής απόκλισης.

Μην νομίσετε ότι αυτά τα παραδείγματα είναι ακραία. Όλες (!) σχεδόν οι ασκήσεις του βιβλίου είναι περίπου σε αυτήν τη μορφή. Είναι, θα έλεγα, χαρακτηριστικά παραδείγματα ενίσχυσης της **αριθμοφοβίας** των μαθητών.

Για να μην νομίσει κανείς ότι είμαι υπερβολικός, προσέξτε και το εξής:

Ας παραβλέψουμε τα δύσκολα αριθμητικά δεδομένα και ας πουμε ότι δεν προσέξαμε το εξόφθαλμο λάθος ότι μόνο 10 σκάφη στην Ελλάδα είχαν το 1991 μηχανή μέχρι 10 ίππους και μόνο 52 έως 20 ίππους(!), ενώ αμέσως μετά γίνονται χιλιάδες... (Εδώ καράβια χάνονται, θα πεις, βαρκούλες αρμενίζουν). Θα λύσουμε λοιπόν την άσκηση, χρησιμοποιώντας τον πίνακα, που υπάρχει στο λυσάρι:

Θα βρούμε μέση τιμή 66,02 hp. Να το κάνουμε 66; Όχι ! Ας το αφήσουμε όπως είναι. Τότε:

$$v_1\left(\overline{x}-x_1\right)^2 = 10\cdot\left(66{,}02-5\right)^2 = 37.234{,}404$$

$$v_2\left(\overline{x}-x_2\right)^2 = 52\cdot\left(66{,}02-15\right)^2 = 135.358{,}1008$$

.....

$$v_9\left(\overline{x}-x_9\right)^2 = 486\cdot\left(66{,}02-85\right)^2 = 175.076{,}8344 \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Εντελώς διαφορετικά από τα αποτελέσματα που βρίσκουν οι συγγραφείς και υπάρχουν στο λυσάρι τους:

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από τον παρακάτω πίνακα:

Κλιμάκια ιπποδυνάμεως	ν_i	Κέντρο κλάσης	$\nu_i x_i$	$\nu_i(\overline{x} - x_i)^2$
[0, 10)	10	5	50	37235,08
[10, 20)	52	15	780	135361
[20, 30)	1777	25	44425	2990133
[30, 40)	1317	35	46095	1267316
[40, 50)	856	45	38520	378235,3
[50, 60)	863	55	47465	104813,6
[60, 70)	434	65	28210	452,0239
[70, 80)	517	75	38775	41685,95
[80, 90)	486	85	41310	175066,6
[90, 100)	452	95	42940	379593,4
[100, 150)	1243	125	155375	4323869
[150, 200)	410	175	71750	4869373
Αθροίσματα	8417		555695	14703133

Η μέση τιμή ισούται με $\frac{555695}{8417} = 66{,}02$.

Η διακύμανση με $\frac{14703133}{8417} = 1746{,}84$.

Η τυπική απόκλιση με $\sqrt{1746{,}84} = 41{,}8$.

Μην κοιτάτε παράξενα τα κομπιουτεράκια σας· σωστά δουλεύουν. Δοκιμάστε, ως μέση τιμή τον αριθμό: 66,0255364 (!) και το αποτέλεσμα θα βγει καλύτερο... Απλά, οι συγγραφείς **δεν ήταν χαζοί** να κάθονται να παιδεύονται με τέτοιες πράξεις. Έδωσαν σε λογιστικό φύλλο τα δεδομένα και έβγαλαν τα αποτελέσματα με προσεγγίσεις αρκετών δεκαδικών. Όσο για τους επιμελείς μαθητές που θα παιδεύονται δίχως να καταλαβαίνουν; Λίγο το κακό· έτσι κι αλλιώς όσοι πάνε στα ΤΕΕ είναι ήδη αριθμόφοβοι, δεν θα τους κάνει τώρα μία ασκησούλα...

Για "επιδόρπιο" μία άσκηση (από το ίδιο βέβαια βιβλίο), που ζητά παραγώγιση πολυωνύμου. Ναι, αλλά τι πολυωνύμου! Αναρωτιέμαι τι θα βλέπαμε αν ο τύπος δινόταν με ακρίβεια και όχι ... κατά προσέγγιση, όπως οι συγγραφείς αναφέρουν...

Άσκηση 6

Η μέση συγκέντρωση του CO (μονοξειδίου του άνθρακα) στην ατμόσφαιρα δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0{,}881443t^4 - 1{,}45533t^3 + 0{,}695876t^2 + 2{,}87801t + 293,\ t \geqslant 0$$

όπου t είναι η μονάδα μέτρησης του χρόνου και παίρνει τιμές t = 0, 1, 2, ... και κάθε μονάδα χρόνου αντιστοιχεί σε περίοδο 40 ετών (t = 0 το 1860) και η f μετριέται σε μέρη στο εκατομμύριο ανά κυβικό εκατοστό (ppm/cm^3). Ποιός ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης στην αρχή του αιώνα (t = 1) και στην αρχή του 1990 (t = 3,5);

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης είναι:

$$f'(t) = 3{,}525772t^3 - 4{,}36599t^2 + 1{,}391752t + 2{,}87801$$

Άρα $f'(1) = 3{,}429$ ppm/cm^3 και $f'(3{,}5) = 105{,}43$ ppm/cm^3.

Ειλικρινά τώρα˙ είναι άσκηση αυτή για να κατανοήσουν οι μαθητές την παραγώγιση πολυωνύμου (δίχως, **προσέξτε,** να υπάρχει ούτε μία (!) απλούστερη πριν απ' αυτήν);

Επειδή βρισκόμαστε σε περίοδο ανανέωσης των σχολικών συγγραμμάτων, ξεκινώντας από το Γυμνάσιο, είναι απαραίτητη η **διαφάνεια**, οι **ανοιχτές διαδικασίες**, η δυνατότητα για **ουσιαστικές παρεμβάσεις** των ενδιαφερομένων (πχ. με προδημοσιεύσεις στο διαδίκτυο), ώστε το αποτέλεσμα να είναι το καλύτερο δυνατό και να μην βρεθούμε μπροστά σε φαινόμενα τόσο δραματικά, όσο και αστεία, όπως τα παραπάνω.

Ποσοστά που παραπλανούν...

Μπορεί πολλοί να νομίζουν ότι τελειώνοντας το σχολείο, θα πάψουν να ασχολούνται με τα μαθηματικά, θα γλυτώσουν από το βραχνά, δεν θέλουν να ξανακούσουν γι' αυτά! Κι όμως, ακόμα και δεν θέλουμε να ασχολούμαστε εμείς μ' αυτά, θα ασχοληθούν αυτά με μας! Καθημερινά συναντάμε μπροστά μας μαθηματικούς όρους: διαγράμματα, στατιστικούς πίνακες, χρονογράμματα (π.χ. δείκτης Χρηματιστηρίου), ποσοστά εκπτώσεων, μεταβολές μεγεθών, υπολογισμός Φ.Π.Α. κ.α.

Ξέρουμε όμως να "διαβάζουμε", και να κατανοούμε ορθά αυτές τις μαθηματικές έννοιες;

Γράφει ο Ι. Μαντάς στο ίδιο κείμενό του:

> *(...) Οι διαφημιστές, οι πολιτικοί, κ.ά. γνωρίζουν πολύ καλά την επιρροή που έχουν οι αριθμοί επάνω στο μέσο και αριθμόφοβο άνθρωπο. Γι' αυτό, **συχνά χρησιμοποιούν τους αριθμούς αυθαίρετα**, έχοντας ασφαλώς συνειδητοποιήσει πως απέναντι σε ένα αριθμοφοβικό κοινό με αμβλυμένη ορθολογική κρίση, οι αριθμοί αυτοί, όσο αυθαίρετοι κι αν είναι, θα μείνουν ακρυπτογράφητοι ή, ενδεχομένως, θα δημιουργήσουν την επιθυμητή σύγχυση.*
>
> *Π.χ. ακούμε σε μια διαφήμιση πως "η τάδε οδοντόκρεμα κάνει τα δόντια μέχρι και 80% πιο γερά". Ελάχιστοι αντιλαμβάνονται πως, με δεδομένο ότι κάθε ποσοστό είναι απλώς ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100, το οποίο αναφέρεται σε συγκεκριμένο μέγεθος, **το παραπάνω ποσοστό είναι ουσιαστικά χωρίς νόημα**.*
>
> *Τί σημαίνει άραγε 80% στη συγκεκριμένη περίπτωση; Πώς προέκυψε ένα τέτοιο ποσοστό; Τέτοια ερωτήματα δεν απασχολούν το αριθμοφοβικό κοινό. Πολύ περισσότερο, δεν απασχολούν οργανώσεις καταναλωτών ή φορείς και υπουργεία που έχουν αρμοδιότητες για την προστασία των καταναλωτών.(...)*

Πράγματι, τα **ποσοστά** για παράδειγμα, που κάθε μέρα χρησιμοποιούνται ως ατράνταχτα στοιχεία πειθούς, όχι μόνο συχνά δεν λένε τίποτα, αλλά αντίθετα, συχνά είναι **παραπλανητικά**.

Ας δούμε π.χ. ένα ακραίο (φανταστικό παράδειγμα): Μία στατιστική μελέτη

για τα ποσοστά ατυχημάτων με οχημάτα σε σχέση με την ταχύτητά τους μέσα στα όρια μιας πόλης δίνει τα εξής αποτελέσματα:

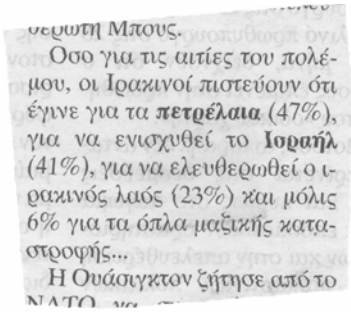
Ταχύτητα	Ποσοστό
Κάτω από 35 Km/h	4%
35-45 Km/h	28%
45-55 Km/h	34%
55-65 Km/h	18%
65-75 Km/h	13%
Πάνω από 75 Km/h	3%
Σύνολο:	100%

Φαίνεται λοιπόν ότι ασφαλέστερο είναι να έχουμε ταχύτητα πάνω από 75 Km/h στο κέντρο της πόλης, εφόσον το ποσοστό ατυχημάτων είναι μικρότερο!

Βέβαια, το σφάλμα είναι ότι η έρευνα αυτή δεν δίνει την κατανομή των ταχυτήτων των αυτοκινήτων στην πόλη, οπότε, από την καμπύλη συχνοτήτων, θα βλέπαμε ότι το ποσοστό των αυτοκινήτων που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες στην πόλη είναι ελάχιστο, άρα γι' αυτό τα ατυχήματα με αυτές τις ταχύτητες φαίνεται να είναι λίγα στο σύνολο.

Κατασκευασμένο παράδειγμα,
περισσότερα στη διεύθυνση: www.mathmistakes.com

*Σκίτσο του Philippe Geluck από το περιοδικό **Κόμικς** (τεύχος 3) της Κυρ. Ελευθεροτυπίας*


ερωτη Μπους.
Οσο για τις αιτίες του πολέμου, οι Ιρακινοί πιστεύουν ότι έγινε για τα **πετρέλαια** (47%), για να ενισχυθεί το **Ισραήλ** (41%), για να ελευθερωθεί ο ιρακινός λαός (23%) και μόλις 6% για τα όπλα μαζικής καταστροφής...
Η Ουάσιγκτον ζήτησε από το

Στο διπλανό κείμενο (*Κυρ. Ελευθεροτυπία, 20-7-2003, σελ. 25*) χρησιμοποιούνται κάποια ποσοστά, δίχως να αναφέρεται η πηγή της έρευνας, ο χρόνος διεξαγωγής ή άλλα στοιχεία που να προσδίδουν κάποιαν εγκυρότητα. Αυτό, ας πούμε, ότι δεν είναι σημαντικό˙ προσέξτε όμως ότι τα ερωτήματα φαίνεται να είναι διακριτά, ίσως δηλαδή οι ερωτηθέντες να πρέπει να επιλέξουν **μίαν** απάντηση (π.χ. για το πετρέλαιο ή για

την ενίσχυση του Ισραήλ), ενώ βέβαια κάποιος θα μπορούσε να επιλέξει και τα δύο, εφόσον δεν έρχονται σε ευθεία αντίθεση. Προσέξτε επίσης ότι φαίνεται πως ένας στους τέσσερις Ιρακινούς πιστεύει ότι "ελευθερώθηκε"(!), άλλες επιλογές δεν φαίνεται να υπάρχουν, ενώ **το άθροισμα είναι μόλις 117%**...

Ποσοστά "επιτυχίας" και "αποτυχίας" στις εξετάσεις

Πέρα όμως από τα παραπάνω ακραία παραδείγματα, μία συνηθισμένη λανθασμένη χρήση των ποσοστών έχει να κάνει με τη **σύγκριση** των βαθμολογιών και **των ποσοστών επιτυχίας** για την τριτοβάθμια εκπαίδευση μεταξύ υποψηφίων διαφορετικών ετών.

Μάλιστα από τις συγκρίσεις αυτές βγαίνουν και συμπεράσματα περί των προτιμήσεων των μαθητών, της απόδοσης των σχολείων κ.α. Το μαθηματικό λάθος, που γίνεται εδώ, είναι ότι η διαδικασία των εξετάσεων δεν είναι ένα επαναλαμβανόμενο υπό τις ίδιες συνθήκες πείραμα, ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα διαδοχικών εφαρμογών του. Ο μηχανισμός των εξετάσεων και η ύλη μεταβάλλεται από χρόνο σε χρόνο, αλλά το κυριότερο είναι ότι τα θέματα δεν έχουν πάντα την ίδια δυσκολία, οπότε το ποσοστό επιτυχίας επηρεάζεται κατά κύριο λόγο από τον βαθμό δυσκολίας των θεμάτων.

> Σε άρθρο της Κυρ. Ελευθεροτυπίας 29-6-2003, αναφέρεται σε συνέντευξη του κ. Ν. Σπυρέλλη, Αντιπρ. Κεντρικής Επιτροπής Εξετάσεων:
>
> *...Όμως, ένα ακόμη «μήνυμα» που εξάγεται από τα αποτελέσματα των εξετάσεων, κατά τον κ. Σπυρέλλη, είναι πολύ σημαντικό: Βλέπουμε πως φέτος είναι από τις λίγες φορές που οι μαθητές αποτυγχάνουν σε **θεωρητικά** μαθήματα σε μεγαλύτερο ποσοστό από τις άλλες χρονιές. Για παράδειγμα στην ιστορία της Β' λυκείου, το ποσοστό των μαθητών που έγραψε κάτω από τη βάση ξεπερνά το 71%, ενώ στη φιλοσοφία φτάνει 62%.*
>
> *«Μήπως πρέπει να αναρωτηθούμε», συνεχίζει ο καθηγητής, «για το αν το εκπαιδευτικό μας σύστημα ενδιαφέρεται και προωθεί την ανθρωπιστική αντίληψη της εκπαίδευσης λιγότερο, σε σχέση με την παροχή γνώσεων που έχουν άμεση αποδοτικότητα και οδηγούν σε σπουδές επαγγελμάτων αυξημένης ζήτησης;»*

Ο προβληματισμός και η αγωνία του κ. Σπυρέλλη έχουν πραγματική βάση και μας βρίσκουν βεβαίως σύμφωνους και πιστεύουμε ότι διατυπώνονται με απλά λόγια γιατί απευθύνονται στο ευρύ αναγνωστικό κοινό.

Δεν πρέπει όμως να βασιζόμαστε σε ένα ποσοστό αποτυχίας μιας χρονιάς για να βγάζουμε γενικευμένα συμπεράσματα. Σε μία χρονιά δημιουργήθηκε το πρόβλημα; Και αν του χρόνου ζητηθούν πιο εύκολα π.χ. θέματα, θα συμπεράνουμε ότι έχουμε νέα στροφή του εκπαιδευτικού συστήματος προς τις ανθρωπιστικές σπουδές;

"Μελαγχολία και απορίες" από τα δημοσιογραφικά σχόλια για τον διαγωνισμό του ΑΣΕΠ (2002)...

Στον διαγωνισμό των εκπαιδευτικών του ΑΣΕΠ 2002 γράφτηκαν και ακούστηκαν αρκετά σχόλια με αφορμή τα ποσοστά αποτυχίας των υποψηφίων: "*Το 65% των καθηγητών κάτω από τη βάση...*", "*Σε τι καθηγητές θα εμπιστευτούμε τη μόρφωση των παιδιών μας;*", "*Αγράμματοι οι απόφοιτοι των ΑΕΙ*", κ.λπ.

Αν τα παραπάνω σας φαίνονται υπερβολικά ή αυθαίρετα, διαβάστε τα σχόλια και τα ερωτήματα που αφήνει να αιωρούνται το παρακάτω άρθρο, δείγμα μόνο των άφθονων πανομοιότυπων που σε κάθε ευκαιρία δημοσιεύονται, χάριν δημοσιογραφικού εντυπωσιασμού. (Οι υπογραμμίσεις με έντονη γραφή δικές μου).

Σοκ από τα γραπτά καθηγητών. Μελαγχολία και απορίες από τα συγκεντρωτικά στοιχεία του διαγωνισμού ΑΣΕΠ

ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ 14 Ιουνίου 2003, Του **Απόστολου Λακασά**

Στις πανελλήνιες εξετάσεις δύο στους τρεις βαθμολογήθηκαν κάτω από τη βάση… Δεν αναφερόμαστε στους φετινούς τελειόφοιτους και απόφοιτους του λυκείου, η αγωνία των οποίων για τους βαθμούς, που θα κρίνουν την εισαγωγή τους στα πανεπιστήμια, λήγει στις αρχές Ιουλίου. Ο λόγος για τους υπό πρόσληψιν εκπαιδευτικούς στα δημόσια σχολεία. Η εικόνα των αποτελεσμάτων τους στο τελευταίο σχετικό διαγωνισμό του ΑΣΕΠ –η δημοσιοποίηση των οποίων ολοκληρώθηκε στα τέλη Μαΐου– είναι απογοητευτική. Στις 11 από τις 15 ειδικότητες εκπαιδευτικών, **το ποσοστό εκείνων που ξεπέρασαν τη βάση ήταν μικρότερο από 50%**. Και είναι ιδιαίτερα αρνητικό το γεγονός ότι βασικές ειδικότητες του σχολείου, όπως είναι **οι φυσικοί και οι φιλόλογοι, σημείωσαν παταγώδη αποτυχία**, αφού μόλις το 16,50% των φυσικών ξεπέρασε τη βάση, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τους φιλολόγους έφθασε στο 24,13 %.

Μάλιστα, μια απλή ανάγνωση των στοιχείων της έρευνας του λέκτορα του Ιόνιου Πανεπιστημίου κ. Κώστα Αγγελάκου, καταδεικνύει ότι **η κατάσταση οδεύει από το κακό στο χειρότερο**. Και αυτό διότι μόνο τέσσερις στις δεκαπέντε ειδικότητες κατάφεραν να βελτιώσουν τα ποσοστά επιτυχίας στο διαγωνισμό του 2002 σε σχέση με αυτά του διαγωνισμού του 2000.

Τα αποτελέσματα εγείρουν **πληθώρα ερωτημάτων** τόσο για το **επίπεδο των αποφοίτων** των ελληνικών πανεπιστημίων, οι οποίοι επιθυμούν να δώσουν στους Ελληνες μαθητές τις βάσεις της γνώσης για την μετέπειτα ζωή τους. Τι φταίει και οι έξι στους δέκα μαθηματικούς (ποσοστό 57,8%) δεν κατάφεραν να αντιμετωπίσουν επαρκώς ζητήματα που άπτονται του αντικειμένου τους; Πόσο αξιόπιστος είναι ο διαγωνισμός του ΑΣΕΠ για την κρίση των ικανοτήτων των εκπαιδευτικών και ποιος ο ρόλος των θεμάτων αλλά και της εξεταστέας ύλης; Μήπως πρέπει **οι πανεπιστημιακές σχολές** να **προβληματιστούν** για το **επίπεδο** των **αποφοίτων τους**, ώστε να δοθεί ειδικό βάρος στην παιδαγωγική τους κατάρτιση, αφού είναι γνωστό ότι – αργά ή γρήγορα – οι περισσότεροι θα συνωστισθούν μπροστά στην πόρτα του δημόσιου σχολείου, διεκδικώντας μια θέση με ανεπαρκή –**όπως αποδεικνύεται**– εφόδια; (...)

Είναι φυσικό, όταν ακούει ο απλός αναγνώστης ότι ένα κάποιο ποσοστό εί-

ναι κάτω από τη βάση, να θεωρεί τη βάση αυτή ως ένα αντικειμενικό αμερόληπτο μέτρο σύγκρισης. Όμως, για να επιτύχει το στόχο, που οι εμπνευστές του έθεσαν, ο διαγωνισμός του ΑΣΕΠ, πρέπει να καταφέρει να επιλέξει ένα (μικρό) ποσοστό διοριστέων και ταυτόχρονα να φροντίσει ώστε να υπάρχει μία "δεξαμενή" επιτυχόντων, αλλά όχι διοριστέων, ώστε να τροφοδοτεί από εκεί τους πίνακες των αναπληρωτών. Γι' αυτό εξάλλου και ως "βάση" έχει τοποθετηθεί το 60% και όχι το 50%. Αρχικά μάλιστα ήταν το 70% (δηλαδή τα 14/20).

Έτσι λοιπόν, **ανάλογα με τον αριθμό υποψηφίων** και τον επιθυμητό αριθμό επιτυχόντων, **καθορίζεται η δυσκολία των θεμάτων**, ώστε να ανεβοκατεβαίνει ανάλογα ο πήχης. Σε ειδικότητες, όπως στην Πληροφορική, όπου υπήρχε μικρός συναγωνισμός (συμμετείχαν 1.448 για 913 θέσεις), τα θέματα ήταν εύκολα και το ποσοστό επιτυχίας ψηλό (66%). Ενώ, όπου υπήρχε έντονος συναγωνισμός, (π.χ. Φιλόλογοι, Γυμναστές Φυσικοχημικοί κ.α.) τα θέματα δυσκόλευαν τόσο, ώστε οι επιτυχόντες να είναι λίγοι (όσοι χρειάζονται για να προσληφθούν).

Στον διαγωνισμό του 1998 η υπερβολική δυσκολία των θεμάτων στη Φυσική οδήγησε σε πλήρη αποτυχία τους υποψηφίους· πέτυχαν 8 σε σύνολο χιλιάδων υποψηφίων ! Δεν είδαμε όμως κανέναν κοσμήτορα Σχολής Θετικών Επιστημών να κάνει χαρακίρι, αφού τα Πανεπιστήμια έβγαλαν άσχετους...

Αν, αντίθετα, τα θέματα είναι υπερβολικά εύκολα και οι επιτυχόντες υπερβαίνουν κατά πολύ τους διοριστέους, θα δημιουργηθούν άλλου τύπου προβλήματα στην ηγεσία του Υπουργείου από τις πιέσεις των επιτυχόντων για πρόσληψη, μονιμοποίηση κ.λπ. Μην ξεχνάμε ότι μέσω του διαγωνισμού τίθεται φραγμός στις απαιτήσεις των πτυχιούχων για διορισμό. Η αδυναμία της απορρόφησης και οι όποιες ευθύνες της Πολιτείας μεταφέρονται στους πτυχιούχους, που είχαν την ευκαιρία και δεν τα κατάφεραν· αποκτούν δε και τη ρετσινιά του αποτυχημένου...

Τα ποσοστά εδώ δεν λένε τίποτα! Οι διαγωνισμοί κατάταξης σκοπό έχουν να ταξινομήσουν σε σειρά τους υποψηφίους και επιλέξουν όσους χρειάζονται. Δεν συγκρίνουν τους υποψηφίους με βάση έναν αντικειμενικό μέσο όρο, για να καταγράψουν τα ποσοστά της κατανομής.

Επίσης δεν μπορούμε να συγκρίνουμε διαγωνισμούς διαφορετικών ετών, που έγιναν με άλλα θέματα. Αν π.χ. σε αγώνες στο επί κοντώ καθοριστεί μία χρονιά ως όριο πρόκρισης τα 4,50 m και την άλλη χρονιά τα 5,10 m, θα συμπεράνουμε ότι αφού το ποσοστό αποτυχίας μεγάλωσε (όπως είναι φυσικό), ότι ή οι αθλητές έγιναν πιο μαλθακοί ή οι γυμναστές τους πιο άσχετοι;

ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ

Κωνσταντία Ιωσηφίδου
Dr Πολιτικός Μηχανικός, Βέροια

Ο επιφανής Έλληνας εκπρόσωπος της Αλεξανδρινής Σχολής γεννήθηκε κατά την 126η Ολυμπιάδα (276 - 272 π.Χ.) στην Κυρήνη της Λιβύης, η οποία ήταν τότε αποικία της νήσου Θήρας και πέθανε το 194 π.Χ. στην Αλεξάνδρεια. Σπούδασε στην Αλεξάνδρεια και στην Αθήνα. Ο Πτολεμαίος ο Γ΄ ο Ευεργέτης του ανέθεσε την διεύθυνση της Βιβλιοθήκης και την διαπαιδαγώγηση του Πτολεμαίου του Δ΄ του Φιλοπάτορος. Υπήρξε ο τρίτος βιβλιοθηκάριος της Αλεξανδρινής Βιβλιοθήκης στο Ιερό των Μουσών, που ονομάζονταν Μουσείο. Ασχολήθηκε με τα μαθηματικά, τη γεωγραφία, την αστρονομία, τη γεωδαισία, τη φιλοσοφία, τη λογοτεχνική κριτική, τη χρονογραφία και την ποίηση.

Οι σύγχρονοί του τον αποκαλούσαν "Πένταθλο" λόγω της επίδοσής του σε όλα τα πνευματικά αγωνίσματα. Ονομάστηκε επίσης "Βήτα" –λόγω πιθανόν– της θέσεώς του ως δευτέρου καλύτερου σε κάθε τομέα.

Ο Αρχιμήδης κατά την επίσκεψή του στην Αλεξάνδρεια γνώρισε και εκτίμησε ιδιαίτερα τον Ερατοσθένη, μετά δε του έστελνε από τις Συρακούσες για ενημέρωση και κρίση πολλές από τις εργασίες του. Τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων του Ερατοσθένη και οι πραγματείες του έχουν χαθεί, διασώθηκαν μόνον λίγα αποσπάσματα, ενώ αναφορές για το έργο του γίνονται από πολλούς συγγραφείς, πχ. τους Πλίνιο, Μαρτιανό, Στράβωνα, Πάππο και άλλους.

Οι εργασίες του Ερατοσθένη

Το έργο του Ερατοσθένη την επιστήμη σε πολλούς τομείς:

1. Στα Μαθηματικά

1α) Είναι γνωστή ως "Κόσκινο του Ερατοσθένους" η μέθοδός του για την εύρεση των πρώτων αριθμών.

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός στο έργο του "Αριθμητική Εισαγωγή" γράφει:

«Ἡ δὲ τούτων γένεσις ὑπὸ Ἐρατοσθένους καλεῖται "Κόσκινον", ἐπειδὴ ἀναπεφυρμένους τοὺς περισσοὺς λαβόντες καὶ ἀδιακρίτους ἐξ' αὐτῶν τῇ τῆς γενέσεως μεθόδῳ ταύτῃ διαχωρίζομεν, ὡς δι' ὀργάνου ἢ κοσκίνου τινὸς καὶ ἰδίᾳ μὲν τοὺς πρώτους καὶ ἀσυνθέτους, ἰδίᾳ δὲ τοὺς δευτέρους καὶ συνθέτους, χωρὶς δὲ τοὺς μικτοὺς εὑρίσκομεν».

«Η παραγωγή των πρώτων αριθμών καλείται από τον Ερατοσθένη "Κόσκινο", επειδή ανακατεμένους και χωρίς διάκριση τους περιττούς αριθμούς αν πάρουμε, τους ξεχωρίζουμε με αυτή την μέθοδο παραγωγής, σαν με κάποιο όργανο ή κόσκινο, τους πρώτους και ασύνθετους και τους δεύτερους και σύνθετους και βρίσκουμε την μικτή τάξη από αυτούς».

Σύμφωνα με την μέθοδο του Ερατοσθένη, για την εύρεση των πρώτων αριθμών από 2 – 50, αφού κατατάξουμε τους αριθμούς σε πίνακα,

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

διαγράφουμε πρώτα τα πολλαπλάσια του 2 δηλ. τα (4, 6, 8, 10, …50)

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	

τα πολλαπλάσια του 3 που απέμειναν μετά τη διαγραφή των πολλαπλασίων του 2, δηλ. τα (9, 21, 27, 33, 39, 45)

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	

τα πολλαπλάσια του 5 που απέμειναν μετά τη διαγραφή των πολλαπλασίων των 2 και 3, δηλ. τα (25, 35)

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	

και τα πολλαπλάσια του 7 που απέμειναν μετά την διαγραφή των πολλαπλασίων των 2, 3, 5 δηλ. το (49)

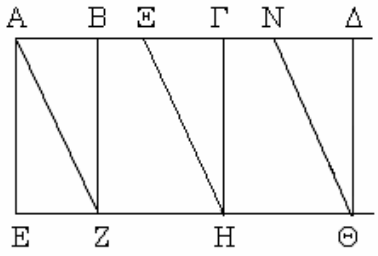
	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			

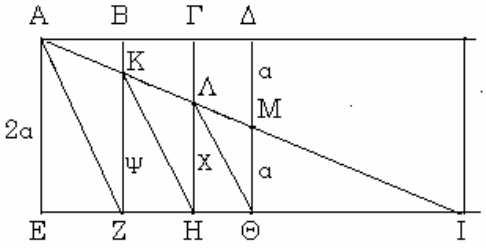
οπότε οι πρώτοι αριθμοί από το 2 έως το 50 είναι:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

1β) Με ένα όργανο δικής του επινόσης, το "Μεσολάβο", κατόρθωσε να λύσει το Δήλιο πρόβλημα, να υπολογίσει δηλ. την πλευρά κύβου Χ που έχει όγκο διπλάσιο από έναν δοσμένο όγκο κύβου πλευράς α.

Ο Μεσολάβος αποτελείται από ένα Πι, το οποίο περιέχει ένα σταθερό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ και δύο κινητά ΞΓΗ και ΝΔΘ, όλα ίσα μεταξύ τους, με την μεγάλη κάθετη πλευρά ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 2α, όπου α είναι η πλευρά του γνωστού κύβου.





Αν τοποθετήσουμε τα δύο κινητά τρίγωνα έτσι, ώστε η ευθεία που ενώνει την κορυφή Α με το μέσο Μ της κάθετης του τρίτου τριγώνου, να διέρχεται από τα σημεία τομής των υποτεινουσών των κινητών τριγώνων με τις κάθετες πλευρές των προηγουμένων τριγώνων, τότε για τις παράλληλες ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ που τέμνονται από τις ΑΙ, ΙΕ ισχύει το θεώ-

ρημα του Θαλή:

$$\frac{2\alpha}{\Psi}=\frac{\Psi}{X}=\frac{X}{\alpha}$$, οπότε: $X^2 = \alpha\Psi$ και $X\Psi = 2\alpha^2$ άρα $X^3 = 2\alpha^3$,

δηλαδή ο κύβος με πλευρά Χ έχει όγκο διπλάσιο από αυτόν του αρχικού κύβου με πλευρά α.

1γ) Στην εισαγωγή του 7ου βιβλίου της Συναγωγής του, η οποία περιέχει "Λήμματα του αναλυομένου τόπου", ο Πάππος εξηγεί στο γιο του Ερμόδωρο την γεωμετρική ανάλυση και σύνθεση και παρουσιάζει τα βιβλία που αποτελούν τον "αναλυόμενο τόπο", την ανώτερη δηλ. Γεωμετρία, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνεται και το έργο του Ερατοσθένη "Περί Μεσοτήτων", που αναφέρονταν σε συγκεκριμένους γεωμετρικούς τόπους.

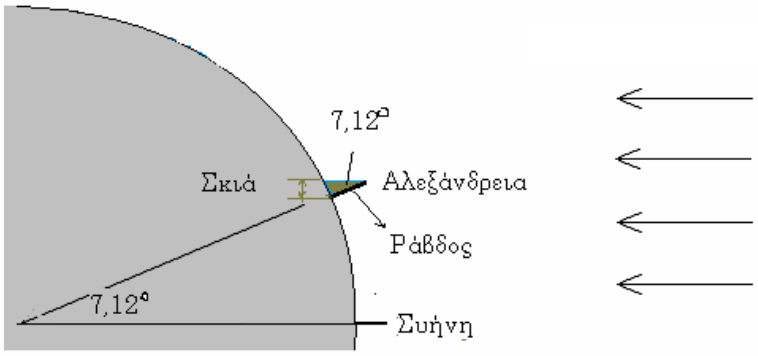
2. Στη Γεωδαισία

2α) Η πλέον αξιοσημείωτη εργασία του υπήρξε η μέτρηση της περιφέρειας της γης. Η μέθοδός του ήταν μια έξυπνη εφαρμογή της απλής γεωμετρίας.

Ο Θέων ο Σμυρναίος στο έργο του "Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν", γράφει:

«Τὸ ὅλον γὰρ τῆς γῆς μέγεθος κατὰ τὸ μέγιστον αὐτῆς περιμετρούμενον κύκλον μυριάδων κε′ καὶ ἔτι δισχιλίων σταδίων σύνεγγυς δείκνυσιν Ἐρατοσθένης».

«διότι όλο το μέγεθος της γης κατά την μέτρηση του μεγίστου κύκλου της ο Ερατοσθένης απέδειξε ότι είναι 252.000 στάδια».



Ήταν γνωστό από τον Ονησίκριτο, έναν αιώνα πριν τον Ερατοσθένη, ότι κοντά στη Συήνη υπήρχε μια εδαφική ζώνη, όπου οι σκιές εξαφανίζονταν τις ημέρες θερινού ηλιοστασίου.

Ο Ερατοσθένης παρατήρησε στην περιοχή ένα πηγάδι, το οποίο κατά τη διάρκεια της μεσημβρίας του θερινού ηλιοστασίου, δηλ. στις 21 Ιουνίου, ήταν φωτισμένο σε ολόκληρο βάθος του, πράγμα το οποίο εσήμαινε ότι ο ήλιος βρισκόταν τότε στο ζενίθ της Συήνης. Στο επόμενο θερινό ηλιοστάσιο τοποθέτησε μια κάθετη ράβδο στην Αλεξάνδρεια και μέτρησε την ίδια ώρα τη γωνία της σκιάς της ράβδου, την οποία βρήκε ίση με $7,12^{o}$.

Για την εύρεση της περιφέρειας της γης, ο Ερατοσθένης υπέθεσε ότι η γη είναι σφαιρική, ότι η πόλη της Συήνης (το σημερινό Ασουάν) ήταν στον τροπικό του Καρκίνου, ότι η Αλεξάνδρεια και η Συήνη ήταν στον ίδιο μεσημβρινό και απείχαν μια απόσταση ίση με 5.000 στάδια και ότι, επειδή ο ήλιος είναι πολύ μακρυά, οι ακτίνες του είναι δυνατόν να θεωρηθούν ότι πέφτουν στη γη, στη Συήνη και την Αλεξάνδρεια, παράλληλες.

Ο Ερατοσθένης ήξερε από τη γεωμετρία ότι το μέγεθος αυτής της γωνίας ήταν ίσο με το μέγεθος της γωνίας που σχηματίζονταν από το κέντρο της γης και τις θέσεις των πόλεων Συήνης και Αλεξάνδρειας στην επιφάνεια της γης. Άρα η περιφέρεια της γης προέκυπτε από την σχέση:

περιφέρεια γης ίση με $360 \cdot 5000/7,12 = 250.000$ στάδια

Το ακριβές μέγεθος της μονάδας του σταδίου του Ερατοσθένη δεν είναι γνωστό. Το αττικό στάδιο ήταν περίπου περί τα 185m, ενώ σύμφωνα με κάποιους μελετητές το στάδιο ήταν 164 m, ή 0,1 μίλι. Ο τελικός υπολογισμός της περιφέρειας της γης από τον Ερατοσθένη ήταν περίπου 15% μεγαλύτερος από την σημερινή τιμή.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε από τον Ερατοσθένη ήταν κατ' αρχάς θεωρητικά σωστή, βασίστηκε όμως σε δύο ανακριβείς υποθέσεις, επειδή η μεν Αλεξάνδρεια δεν βρίσκεται στον ίδιο μεσημβρινό με την Συήνη αλλά 3 περίπου μοίρες δυτικά, απέχει δε από αυτήν απόσταση λίγο μικρότερη από 5.000 στάδια. Παρά ταύτα, η μέτρηση ήταν ένα σοβαρό επίτευγμα στον κλάδο της Γεωδαισίας.

2β) Ο Ερατοσθένης χρησιμοποιώντας στοιχεία που πήρε κατά τη διάρκεια των σεληνιακών εκλείψεων υπολόγισε την απόσταση Γής - Ηλίου, (αυτό που ονομάζουμε αστρονομική μονάδα) ίση με 804.000.000 στάδια και την απόσταση Γης - Σελήνης ίση με 780.000 στάδια. Ο Πλούταρχος στο έργο του "Περί των αρεσκόντων τοις φιλοσόφοις" αναφέρει:

> «Ἐρατοσθένης τὸν Ἥλιον (φησὶν) ἀπέχειν ἀπὸ τῆς γῆς σταδίων μυριάδας τετρακοσίας καὶ ὀκτακισμυρίας, τὴν δὲ σελήνην ἀπέχειν τῆς γῆς μυριάδας ἑβδομήκοντα ὀκτὼ σταδίων».

2γ) Υπολόγισε επίσης το γεωγραφικό πλάτος του τροπικού του Καρκίνου και την κλίση της εκλειπτικής ίση με το μισό του τόξου του μεσημβρινού, που περιλαμβάνεται μεταξύ των δύο τροπικών δηλ. 11/83 του 180 ή 23° 51΄ 20΄΄, γεγονός που έχει αναφερθεί από τους συγγραφείς όλων των εποχών. Περίπου πενήντα χρόνια αργότερα, ο Ίππαρχος επιβεβαίωσε την τιμή της γωνιακής απόστασης μεταξύ των δύο τροπικών.

2δ) Ο Πτολεμαίος αναφέρει ότι ο Ερατοσθένης μέτρησε την κλίση του άξονα της Γης ίση με 23,5 μοίρες.

2ε) Ο Γαληνός για το έργο του Ερατοσθένη "Περί της γης αναμετρήσεως" γράφει ότι αυτό πραγματεύονταν: Το μήκος του Ισημερινού, την απόσταση των τροπικών και πολικών κύκλων μεταξύ τους και με τον Ισημερινό, την έκταση της πολικής ζώνης, τα μεγέθη Ηλίου και Σελήνης ως προς την Γη, τις εκλείψεις Ηλίου και Σελήνης και τις μεταβολές της διάρκειας της ημέρας ανάλογα με τα διάφορα γεωγραφικά πλάτη και τις εποχές.

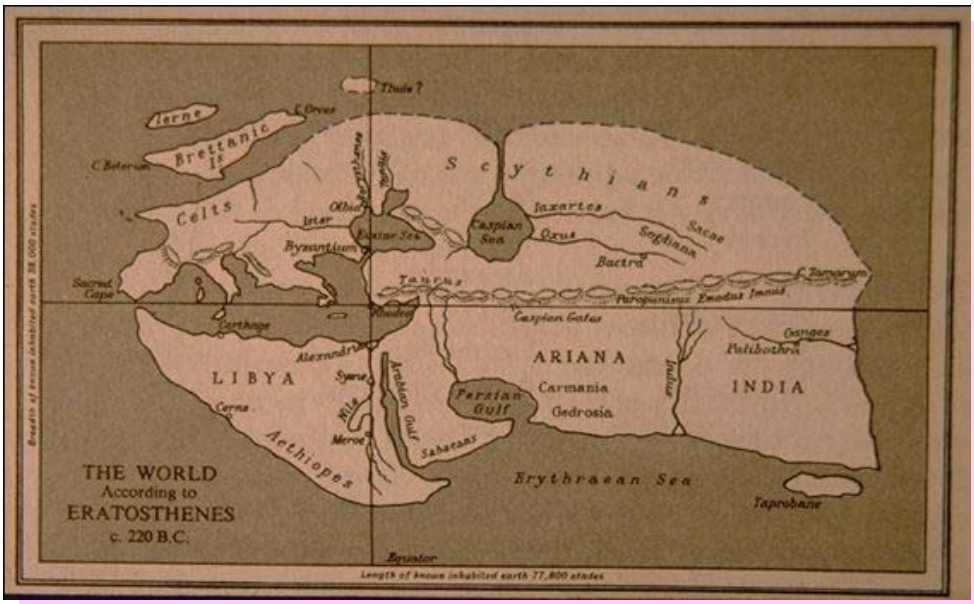
3. Στη Γεωγραφία

Θεωρείται ο ιδρυτής της μαθηματικής και αστρονομικής Γεωγραφίας. Κατά την διάρκεια της εργασίας του στην Βιβλιοθήκη έγραψε μία τρίτομη πραγματεία για τον κόσμο, την οποία ονόμασε "Γεωγραφία", αποσπάσματα της οποίας σώζονται στα "Γεωγραφικά" του Στράβωνα. Για το γνωστό –μέχρι τότε– κόσμο από την Ιβηρική χερσόνησο και τα Βρετανικά νησιά μέχρι την Κεϋλάνη, και από την Κασπία θάλασσα μέχρι την Αιθιοπία σχεδίασε ένα χάρτη με τις αρχές της Τριγωνομετρίας, οπότε και οι γεωγραφικές μελέτες τέθηκαν σε μαθηματική βάση.

Ο Ερατοσθένης με το "Δικαιάρχειο Διάφραγμα", τη γραμμή δηλ. που συνδέει τις Ηράκλειες Στήλες με την Βόρεια Ινδία περνώντας από το νότιο άκρο της Σαρδηνίας, τη Μεσήνη της Σικελίας, τον Κορινθιακό κόλπο, τη Ρόδο και τον Ισσαίο κόλπο χώριζε τον κόσμο σε βόρειο και νότιο τμήμα, τα οποία χώριζε σε μικρότερα διαμερίσματα τις σφραγίδες. Μόνον ο Ίππαρχος, ο Στράβων και ο

Πτολεμαίος τα επόμενα χρόνια ήταν σε θέση να κατασκευάσουν καλύτερους χάρτες από τον Ερατοσθένη.

Σχεδίασε τη διαδρομή του Νείλου στο Χαρτούμ, υποστήριξε ότι οι λίμνες ήταν η πηγή του ποταμού και πως οι πλημμύρες του οφείλονταν στις δυνατές βροχές που έπεφταν πολλές φορές στην περιοχή των πηγών του. Κατέγραψε επίσης πως στην περιοχή της Ευδαίμονος Αραβίας, (την σημερινή Υεμένη) κατοικούσαν τέσσερις διαφορετικές φυλές, τα ονόματα των οποίων χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα, όπως τα έδωσε ο Ερατοσθένης.



Ο χάρτης του Ερατοσθένη.

http://www.henry- vis.com/MAPS/AncientWebPages/112A.html

4. Στην Αστρονομία

Έγραψε το έργο "Αστροθεσίαι" ή σύμφωνα με το λεξικό Σούδα "Καταστερισμοί", για τους αστέρες και τους αστερισμούς σε σχέση με τους ποιητικούς μύθους που τους συνοδεύουν, ένα ποίημα αποκαλούμενο "Ερμής" εμπνευσμένο από την Αστρονομία, άλλο ποίημα "Αντερινύδα" για τις μεταμορφώσεις διαφόρων ηρώων σε αστερισμούς και σχεδίασε ένα χάρτη, που περιείχε 675 αστέρια, ο οποίος όμως δε διασώθηκε.

5. Στη Χρονικογραφία, Γραμματολογία και τη Φιλοσοφία

Ο Ερατοσθένης έθεσε τα θεμέλια μιας συστηματικής χρονογραφίας, προσπαθώντας να δώσει τις ημερομηνίες των λογοτεχνικών και πολιτικών γεγονότων από τον καιρό της πολιορκίας της Τροίας μέχρι το θάνατο του Μεγάλου

Αλεξάνδρου. Δημιούργησε ένα ημερολόγιο που περιέλαβε τα δίσεκτα έτη. Ασχολήθηκε με τη Γραμματολογία και έγραψε "Περί της αρχαίας Κωμωδίας", και με τη φιλοσοφία και έγραψε "Περί των επτά κατά φιλοσοφίαν αιρέσεων", Περί αγαθών και κακών", "Περί πλούτου και πενίας", "Περί αλυπίας" και πολλούς διαλόγους.

Επίσης έγραψε μία σπουδαία εργασία τον "Πλατωνικό", όπου με μαθηματικά επιχειρούσε να εξετάσει τι κρύβεται πίσω από την φιλοσοφία του Πλάτωνα. Γι' αυτήν την εργασία ο Θέων ο Σμυρναίος γράφει ότι πραγματεύονταν τους βασικούς ορισμούς της Γεωμετρίας, Αριθμητικής και άλλων θεμάτων, όπως της Μουσικής και την χρησιμοποίησε στο έργο του "Expositio rerum mathematicarum".

6. Στην Μετεωρολογία

Έγραψε μία Μετεωρολογική πραγματεία.

Σύμφωνα με το λεξικό Σούδα, ο Ερατοσθένης πέθανε από εκούσια ασιτία, επειδή φοβήθηκε την τύφλωση από αμβλυωπία. Ο Διονύσιος όμως ο Κυζικηνός σε επίγραμμά του λέει:

«Πράον γήρας σε έσβησε και όχι εξανθηματική ασθένεια.
Έπεσες δε εις τον οφειλόμενον εκ της μοίρας ύπνον,
Ασχοληθείς με τα υψηλά πράγματα, Ερατοσθένη,
Ουδέ σε εδέχθη εις τους πατρικούς τάφους η Μητέρα Κυρήνη,
Γυιέ του Αγλαού,
Σε εκάλυψε δε με στοργή η ξένη χώρα,
Παρά το κράσπεδον της ακτής του Πρωτέως».

Βιβλιογραφία – Πηγές

1) **Ευαγγέλου Σπανδάγου**, *Οι «Καταστερισμοί» του Ερατοσθένους του Κυρηναίου*, ISBN 960-7007-96-4, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα.

2) http://astrosun.tn.cornell.edu/courses/astro201/eratosthenes.htm

3) http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Eratosthenes.html

4) http://www.telemath.gr/mathematical_ancient_times/ancient_greek_mathematicians/eratosthenes_kyrenaios.php

5) Eratosthenes-http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Eratosthenes.html

6) http://astro.wsu.edu/worthey/astro/html/eratosthenes.html

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΚΑΙ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΚΑΠΕΤΗ

Πούλος Ανδρέας
Μαθηματικός, Συγγραφέας,
Θεσσαλονίκη

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αν και το τρίγωνο είναι το απλούστερο κλειστό πολυγωνικό σχήμα, ακόμα και στις μέρες μας σποραδικά ανακαλύπτονται νέες ιδιότητές του. Οι ιδιότητες του σχήματος αυτού παρ΄ ότι έχουν ερευνηθεί εξαντλητικά, είναι τόσο πολλές, συνεχώς αποκαλύπτουν μία πληθώρα μεταξύ τους σχέσεων ώστε να διαμορφώνουν έναν θησαυρό γνώσεων με μορφή θεωρημάτων, τον οποίο αποκαλούμε συνοπτικά **Γεωμετρία του Τριγώνου**. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι στο μεγάλο έργο «Εγκυκλοπαίδεια των Μαθηματικών Επιστημών», το οποίο συντάχθηκε υπό την εποπτεία του διάσημου Γερμανού μαθηματικού Felix Klein και ολοκληρώθηκε το 1914, το λήμμα «Γεωμετρία του Τριγώνου» είχε έκταση 104 σελίδες. Μετά όμως το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα η Γεωμετρία του Τριγώνου ήταν ένα θέμα το οποίο φαινομενικά έχει ολοκληρώσει τον κύκλο της ανάπτυξής του. Οι ερευνητές μαθηματικοί είχαν στρέψει το ενδιαφέρον τους σε άλλα πεδία γόνιμης μελέτης και συνεπώς η Γεωμετρία του Τριγώνου εθεωρείτο ήδη ένα σκονισμένο έκθεμα στο μουσείο των μαθηματικών ανακαλύψεων. Στη συνέχεια του κειμένου θα εξετάσουμε τι ακριβώς διαμορφώνει τη Γεωμετρία του Τριγώνου, ποια ήταν η ιστορική της πορεία και θα επιχειρήσουμε μία πρώτη σκιαγράφηση της θέσης της στην νεοελληνική μαθηματική έρευνα και εκπαίδευση προβάλλοντας και τονίζοντας το έργο του Θεσσαλονικιού μαθηματικού Γεωργίου Καπέτη[1].

[1] Ευχαριστώ θερμά το φίλο και συνάδελφο Νίκο Δεργιαδέ, επειδή έκανε παρεμβάσεις και συμπληρώσεις στο αρχικό κείμενο, οι οποίες θεωρώ ότι το βελτίωσαν σημαντικά.

Η ΒΑΣΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Οι Berkham και Meyer είχαν προτείνει τον εξής ορισμό της Γεωμετρίας του Τριγώνου: «Είναι η μελέτη των ιδιαίτερων σημείων, ευθειών, κύκλων και κωνικών τομών ενός τριγώνου». Ένας άλλος ορισμός δόθηκε από τον Felix Klein που παρουσίασε στο περίφημο πρόγραμμα του Erlanger και είναι ο εξής:

«Είναι η θεωρία των αναλλοίωτων των πέντε σημείων του τριγώνου υπό την επίδραση της ομάδας των προβολικών μετασχηματισμών».

Οι βάσεις της Γεωμετρίας του Τριγώνου τέθηκαν κατά την περίοδο ακμής του Ελληνικού πολιτισμού σε σύνδεση με την αντίληψη των Ελλήνων για τις γεωμετρικές κατασκευές. Οι Βυζαντινοί και οι Άραβες διατήρησαν όψεις αυτής της μεγάλης παράδοσης, η οποία μεταδόθηκε στη Δυτική Ευρώπη. Πολύ αργότερα τη θεωρία των γεωμετρικών κατασκευών επεξεργάστηκαν εκτός των άλλων ο Ολλανδός γεωμέτρης G. Mohr (1672) και ο Ιταλός μηχανικός L. Mascheroni (1797). Σημαντική για τη θεωρία των γεωμετρικών κατασκευών ήταν και η συμβολή του Ελβετού επιστήμονα J. Steiner (1833). Μόνο κατά το 19^{ο} αιώνα εξακριβώθηκε ο κύκλος των προβλημάτων, τα οποία είναι επιλύσιμα με τη χρήση του κανόνα και διαβήτη. Οι γεωμετρικές κατασκευές στον τρισδιάστατο χώρο συνδέονται με τις μεθόδους της Παραστατικής Γεωμετρίας. Η θεωρία αυτού του τύπου κατασκευών παρουσιάζει ενδιαφέρον από την άποψη ότι σχετίζεται με πρακτικές εφαρμογές της Γεωμετρίας, αλλά παράλληλα σχετίζεται με τη Γεωμετρία του Τριγώνου.

Ακόμη και κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα νέα θεωρήματα ανακαλύφθηκαν σχετικά με τόσο απλά σχήματα, όπως είναι το τρίγωνο και ο κύκλος, σχήματα τα οποία ήταν αντικείμενο προσεκτικής μελέτης εκ μέρους των Ελλήνων μαθηματικών και των κατοπινών γεωμετρών. Ήταν ο L. Euler, ο οποίος το 1765 απέδειξε ότι το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο και το περίκεντρο ενός τριγώνου είναι συνευθειακά και ανήκουν στη λεγόμενη «ευθεία του Euler». Ο H.C. Gossard του Πανεπιστήμιου της Οκλαχόμα το 1916 έδειξε ότι οι τρεις ευθείες Euler των τριγώνων που σχηματίζονται από την ευθεία Euler και τις πλευρές ενός τριγώνου θεωρούμενες ανά δύο, ορίζουν ένα τρίγωνο τριπλά προοπτικό με το αρχικό τρίγωνο και έχουν με αυτό την ίδια ευθεία Euler. Περίβλεπτη θέση μεταξύ των νέων ανακαλύψεων κατέχει ο «κύκλος των εννέα σημείων» ανακάλυψη η οποία κατά λάθος αποδίδεται στον Euler. Μεταξύ αυτών που τον πρωτοανακάλυψαν συγκαταλέγεται ο Άγγλος Benjamin Bevan (; - 1838), ο οποίος πρότεινε[2] ένα θεώρημα, η απόδειξη του οποίου πρακτικά οδηγεί στον κύκλο των εννέα σημείων. Η απόδειξη δόθηκε[3] από τον John Butterworth, ο οποίος πρότεινε ένα πρόβλημα το οποίο λύθηκε από τον ίδιο και τον John Whitley από όπου φαίνεται ότι αυτοί οι δύο γνώριζαν τις ιδιότητες του κύκλου των εννέα ση-

[2] Στο περιοδικό Mathematical Repository (Θησαυρός Μαθηματικών γνώσεων), (τεύχος 1, 18 του 1804).

[3] Στο ίδιο περιοδικό.

μείων. Αυτά τα εννέα σημεία προσδιόρισαν επακριβώς και οι Γάλλοι μαθηματικοί C. J. Brianchon και J.V.Poncelet το 1821 στο διάσημο περιοδικό Annales, το οποίο εξέδιδε ο μαθηματικός Gergonne. Το 1822 ο Karl W. Feuerbach (1800-1834) καθηγητής στο Γυμνάσιο του Erlanger στη Γερμανία εξέδωσε ένα φυλλάδιο το οποίο με αφετηρία τον κύκλο των εννέα σημείων καταλήγει στην απόδειξη του θεωρήματος, που είναι σήμερα γνωστό με το όνομά του, δηλαδή ότι αυτός ο κύκλος εφάπτεται στον εγγεγραμμένο και στους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους. Για το λόγο αυτό, οι Γερμανοί αποκαλούν τον κύκλο των εννέα σημείων «κύκλο του Φόϋερμπαχ». Ο τελευταίος που ανακάλυψε τον κύκλο αυτό ανεξάρτητα από τους άλλους είναι ο T.S Davis, ο οποίος παρουσίασε την ανακάλυψή του στο περιοδικό Philosophical Magazine το 1827. Το θεώρημα του Φόϋερμπαχ επεκτάθηκε από τον Andrew Seasle Hart (1811-1890) υφηγητή στο Trinity College του Δουβλίνου, ο οποίος έδειξε ότι οι κύκλοι που εφάπτονται με τους τρεις δεδομένους κύκλους μπορούν να κατανεμηθούν σε τετράδες με την ιδιότητα οι κύκλοι κάθε μιας από αυτές να εφάπτονται με τον ίδιο κύκλο.

Η μελέτη και η έρευνα νέων ευθειών και νέων σημείων οδήγησε τον Γερμανό μαθηματικό Crelle στο συμπέρασμα: «Είναι πράγματι θαυμάσιο ότι ένα τόσο απλό σχήμα όπως το τρίγωνο έχει τόσες ανεξάντλητες ιδιότητες. Πόσες ακόμη ιδιότητες αυτών των σχημάτων υπάρχουν;». Σχετικές έρευνες έγιναν επίσης από τον Karl Jacobi (1795-1855) και τους μαθητές του. Όμως μετά το θάνατό του ξεχάστηκαν στο σύνολό τους. Το 1875 ο Henri Brocard (1845-1922) κέντρισε το ενδιαφέρον του μαθηματικού κοινού με το ίδιο θέμα και τις έρευνές του συνέχισαν ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών στη Γαλλία, Αγγλία και Γερμανία. Ατυχώς τα ονόματα των γεωμετρών οι οποίοι ανακάλυψαν κάποια αξιόλογα σημεία, ευθείες και κύκλους δεν είναι τα ονόματα των ανθρώπων που μελέτησαν πρώτοι αυτές τις ιδιότητες. Έτσι, αναφερόμαστε στα «σημεία Brocard» και στις «γωνίες Brocard» αλλά η ιστορική έρευνα έδειξε ότι το 1884 και το 1886, τα σημεία και οι γωνίες αυτές αντίστοιχα μελετήθηκαν από τους A.L. Crelle και K.F. Jacobi. Μόνο οι κύκλοι του Brocard είναι ανακάλυψη του ίδιου του Brocard. Το 1873 ο Γάλλος Emile Lemoine (1840-1912), ο εκδότης του περιοδικού «L' Intermediatere des mathematiciens», ανακάλυψε ένα ειδικό σημείο σε κάθε τρίγωνο το οποίο έχει διάφορες ονομασίες, όπως «σημείο Lemoine», «συμμετροδιάμεσο σημείο» και «σημείο Grebe» από το όνομα του μαθηματικού Ernst Grebe (1804-1874).

Ανακαλύφθηκαν ακόμη οι «κύκλοι Mackay» από τον Joseph Neuberg (1840-1926) από το Λουξεμβούργο. Μία συστηματική πραγματεία γι΄ αυτό το θέμα «το σημείο Brocard» γράφτηκε από τον Albercht Emerich στο Βερολίνο το 1891. Ένας πολύ μεγάλος αριθμός νέων θεωρημάτων για το τρίγωνο και τον κύκλο, δόθηκε στην «Πραγματεία περί Κύκλου και Σφαίρας», έκδοση Οξφόρδης το 1916 γραμμένη από τον J.L. Coolidge του Πανεπιστήμιου του Χάρβαρντ. Το 1888 ο E. Lemoine στο Παρίσι παρουσίασε ένα σύστημα, το οποίο ονόμασε γεωμετρογράφο, με σκοπό την απλοποιημένη αριθμητική σύγκριση

γεωμετρικών κατασκευών. Ο Coolidge αποκάλεσε το σύστημα αυτό «το καλύτερο γνωστό και αυτό που απαιτεί τους λιγότερο πολύπλοκους ελέγχους για την απλοποίηση των γεωμετρικών κατασκευών». Ο A. Emch δήλωσε ότι «αυτό δύσκολα έχει κάποια πρακτική αξία και δεν μπορεί να μας δείξει πώς μπορεί να απλοποιηθεί μία κατασκευή και πώς μπορεί να γίνει σαφέστερη». Ένα νέο θεώρημα για το περιγεγραμμένο τετράεδρο διατυπώθηκε το 1897 από τον A.S. Bang και αποδείχθηκε από τον Johan Gehrke. Το θεώρημα αναφέρει τα εξής: «Οι απέναντι έδρες ενός περιγεγραμμένου τετράεδρου υποτείνουν ίσες γωνίες στα σημεία επαφής των εδρών που περιέχουν αυτές». Το θεώρημα αυτό απετέλεσε τη βάση για νέα αποτελέσματα από τους Franz Meyer, J. Neuberg και S. White. Ο Alasia υπό την παρότρυνση και καθοδήγηση του διάσημου Ιταλού Γεωμέτρη Eugenio Beltrami συγκέντρωσε σε έναν τόμο ένα σύνολο 566 μετρικών σχέσεων που αφορούσαν το τρίγωνο και τα ιδιαίτερα σημεία του.

Στις Η.Π.Α. η Γεωμετρία του Τριγώνου ήταν γνωστή με τον όρο «ανώτερη Γεωμετρία ή κολλεγιακή Γεωμετρία». Ακόμη και στις αρχές του 20^{ου} αιώνα ορισμένοι διάσημοι μαθηματικοί παρότρυναν άλλους νεώτερους μαθηματικούς να μελετήσουν έως και σε επίπεδο διδακτορικής διατριβής θέματα της γεωμετρίας του Τριγώνου. Έτσι για παράδειγμα, ο Roger A. Johnson παρουσίασε το 1913 τη διατριβή του «Αναλυτική Πραγματεία των Κωνικών ως στοιχείων του τρισδιάστατου χώρου» υπό την εποπτεία του J. L. Coolidge. Ο Johnson αργότερα εξέδωσε το πολύ γνωστό στις Η.Π.Α. βιβλίο «Σύγχρονη Γεωμετρία – Μία στοιχειώδης πραγματεία της Γεωμετρίας του Τριγώνου και του Κύκλου», ενώ αρθρογραφούσε από το 1916 έως το 1947 για σχετικά θέματα στο περιοδικό American Mathematical Monthly. Η παρακμή της Γεωμετρίας του Τριγώνου συνδέεται άμεσα και με τη διεύρυνση του αντικείμενου της Γεωμετρίας ως επιστήμης, με τη διεύρυνση των εννοιών, των μεθόδων της, με την ίδια την έννοια του σχήματος και των ιδιοτήτων του. Σύμφωνα με τον Philip Davis η παρακμή της συνδέεται και με την αυξημένη υπολογιστική ικανότητα των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των σχεδιαστικών προγραμμάτων, μέσω των οποίων μπορούν να γίνουν πολλές νέες ανακαλύψεις για τις ιδιότητες του Τριγώνου και γενικά των γεωμετρικών σχημάτων. Παρ΄ όλα αυτά νέες μελέτες συνεχίζουν να διεξάγονται χωρίς όμως να προξενούν το ενδιαφέρον των μαθηματικών της πρώτης γραμμής, ενώ άλλες έρευνες μελετούν τις ήδη γνωστές ιδιότητες του τριγώνου με άλλα μαθηματικά εργαλεία. Για παράδειγμα ο C. Kimberling[4], ο οποίος μάλιστα διατηρεί πολύ καλή ιστοσελίδα στο Διαδίκτυο μελετά την Γεωμετρία του Τριγώνου υπό την οπτική γωνία των συναρτησιακών εξισώσεων.

Αν και ερευνητικά η Γεωμετρία του Τριγώνου θεωρείται ένα «εξαντλημένο ορυχείο», από την πλευρά της διδασκαλίας των σχολικών Μαθηματικών, αυτή παραμένει ένα εξαιρετικό υπόδειγμα εμβάθυνσης ενός ειδικού θέματος και παρέχει ένα πλήθος εκπληκτικών ανακαλύψεων και ιδεών χρήσιμων τόσο στην εκπαίδευση των μαθητών, όσο και στην επιλογή θεμάτων μαθηματικών διαγω-

[4] C. Kimberling. Encyclopedia of Triangle. http://faculty.evansille.edu.

νισμών.

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Ποια είναι όμως η κατάσταση της έρευνας και της θέσης της Γεωμετρίας του Τριγώνου στα ελληνικά Μαθηματικά. Από το 1749 όταν εκδόθηκε η «Οδός Μαθηματικής» του Μεθόδιου Ανθρακίτη, το πρώτο νεοελληνικό έργο που αναφέρεται σε θέματα Γεωμετρίας, έως το 1950, η θεματογραφία των βιβλίων της Συνθετικής Γεωμετρίας περιορίζονταν αποκλειστικά στην παρουσίαση των Στοιχείων του Ευκλείδη, ή τις νεότερες εκδοχές της, τη Γεωμετρία του Λεζάντρ[5] κ.α. Από το 1950 έχουμε μία στροφή, τόσο στην έκδοση βιβλίων με εμπλουτισμένο υλικό από την Γεωμετρία του Τριγώνου, όσο και στην συγγραφή άρθρων και σχετικών φυλλαδίων. Η αιτία αυτού του φαινομένου είχε τις ρίζες μάλλον στο εξεταστικό σύστημα εισαγωγής των μελλοντικών φοιτητών στα Ανώτατα και Ανώτερα εκπαιδευτικά Ιδρύματα της χώρας. Όλοι οι γνωστοί έλληνες μαθηματικοί, οι οποίοι είχαν αναλάβει το έργο της προγύμνασης των υποψηφίων για τα Α.Ε.Ι. είχαν συγγράψει διδακτικά εγχειρίδια στα οποία είχαν εντάξει πλήθος θεωρημάτων, προβλημάτων και δεδομένων σχετικών με τη Γεωμετρία του Τριγώνου. Κατά το χρονικό διάστημα 1950 – 1980, όσο δηλαδή διήρκεσε το σύστημα επιλογής φοιτητών ένα από τα κριτήρια του οποίου ήταν η ικανότητα των υποψηφίων στην επίλυση περίτεχνων γεωμετρικών ζητημάτων, έχουμε υπερεπάρκεια βιβλίων σχετικών με ζητήματα της Γεωμετρίας του Τριγώνου κυρίως για θέματα που κάλυπταν ζητήματα εξετάσεων.

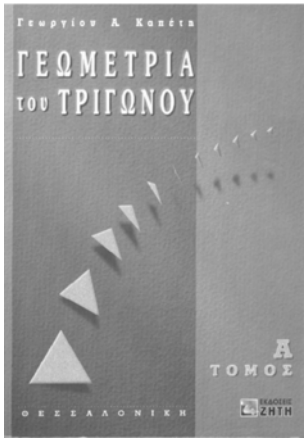
Αναφέρουμε ορισμένες βασικές εκδόσεις:

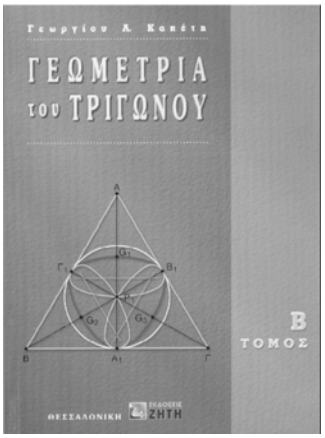
- Ασκήσεις Γεωμετρίας των F.G – M (Ιησουϊτών) σε μετάφραση Δ. Γκιόκα. Αθήνα. Εκδόσεις Καραβία, 1952.
- Η μεθοδική λύση του Γεωμετρικού προβλήματος G. Lemaire, μετάφραση Γ. Ο. Βουδούρη, 2η έκδοση, Αθήναι, 1946.
- Γεωμετρία του Χρήστου Μπαρμπαστάθη
- Θεωρητική Γεωμετρία του Πέτρου Τόγκα, (με πολλές επανεκδόσεις), Αθήνα.
- Η Γεωμετρία του υποψηφίου των Ανωτάτων Σχολών του Α. Κούρκουλου, Ηράκλειο, χ.χ.
- Γεωμετρία, θεωρία και ασκήσεις. Γ.Τζίντσιφα κ.α. Θεσσαλονίκη, χ.χ.
- Συμπλήρωμα Γεωμετρίας του Ν. Πνευματικού
- Συμπλήρωμα Γεωμετρίας του Ν. Βαρουχάκη. Αθήνα. 1971.
- Μαθήματα Γεωμετρίας του Ι. Ιωαννίδη
- Ευκλείδειος Γεωμετρία του Σπύρου Κανέλλου. Ο.Ε.Δ.Β. Αθήναι. 1976.
- Μέθοδοι επιλύσεως γεωμετρικών προβλημάτων του Α. Δημητρίου, Αθήναι. 1971.

[5] Εκδόσεις της Γεωμετρίας του Λεζάντρ έχουμε από την πρώτη έκδοση του 1829 στην Κέρκυρα σε μετάφραση και επιμέλεια Ιωάννη Καρανδινού, έως και την δεκαετία του 1870.

- Γεωμετρία του Γ.Σ. Σταυριανίδη, Θεσσαλονίκη
- Μεθοδική Γεωμετρία των Μ. και Π. Γεωργιακάκη. Αθήνα. 1975.
- Γεωμετρία του Τριγώνου. Γεωμετρικαί κατασκευαί, του Ιωάννη Πανάκη. Τόμος Β΄. Αθήναι. Εκδόσεις Gutenberg. 1970
- 2500 προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών του Ιωάννη Πανάκη (2 τόμοι). Αθήναι. χ.χ.
- Θεωρήματα και προβλήματα Γεωμετρίας, επιμέλεια Χ. Τσαρούχη, τόμος Ι, Αθήνα 1969, τόμος ΙΙ, Αθήνα 1970.

Με την αλλαγή του πνεύματος των εισαγωγικών εξετάσεων και τη βαθμιαία εγκατάλειψη της Γεωμετρίας ως εξεταστέας ύλης για την εισαγωγή στα Α.Ε.Ι., αυτή η εκδοτική έξαρση της Γεωμετρίας του Τριγώνου όχι μόνο δεν ξαναπαρατηρήθηκε, αλλά τα θέματα τα οποία αυτή πραγματεύεται αποτελούν σήμερα προβλήματα μόνο για μαθηματικούς διαγωνισμούς!





Εντελώς εκτός του εκδοτικού κλίματος εμφανίζεται το 1996 ο πρώτος τόμος του έργου με τίτλο «Γεωμετρία του Τριγώνου» του Γεωργίου Καπέτη από τις εκδόσεις Ζήτη της Θεσσαλονίκης και το 2002 εκδόθηκε ο δεύτερος τόμος του ίδιου έργου. Η δημοσίευση αυτής της προσπάθειας ήταν ένα εκδοτικό τόλμημα, διότι το αναγνωστικό μαθηματικό κοινό είχε στρέψει σε άλλα ζητήματα τα ενδιαφέροντά του. Ο ίδιος ο συγγραφέας δεν ήταν γνωστός στο μαθηματικό κοινό και είναι βέβαιο ότι δεν έγινε καμία προσπάθεια προβολής του έργου του από κανέναν. Παρ' όλα αυτά, όπως θα φανεί στη συνέχεια πρόκειται για την πληρέστερη έκδοση της Γεωμετρίας του Τριγώνου που διαθέτουμε στην ελληνική γλώσσα ακόμη και με τα αυστηρότερα διεθνή κριτήρια. Πριν αναφερθούμε στο ίδιο το έργο, θεωρούμε απαραίτητο να αναφερθούμε στον συγγραφέα του, ο οποίος δυστυχώς δεν βρίσκεται πλέον στη ζωή.

Ο Γεώργιος Καπέτης γεννήθηκε το 1932 στο Λιβάδι του Ολύμπου. Ενώ ήταν πολύ μικρός, η οικογένεια του μετακόμισε στην Κατερίνη, όπου ο πατέρας

του εργάστηκε εκεί ως αρτεργάτης. Εξαιρετικός μαθητής αποφοιτώντας από το εξατάξιο Γυμνάσιο Κατερίνης είχε την φιλοδοξία να φοιτήσει στο Πολυτεχνείο Αθηνών, αλλά οι οικονομικές δυνατότητες της οικογένειάς του δεν επέτρεψαν την πραγματοποίησή της. Έδωσε εξετάσεις στο μαθηματικό Τμήμα του Α.Π.Θ. στο οποίο πέρασε εύκολα χωρίς να παρακολουθήσει φροντιστηριακά μαθήματα. Έλαβε το πτυχίο του μαθηματικού με «άριστα» και με την εκπλήρωση της στρατιωτικής του θητείας ως εφέδρου αξιωματικού του Πυροβολικού διορίστηκε το 1959 ως μαθηματικός στην Δημόσια Μέση εκπαίδευση. Δίδαξε σε διάφορα Γυμνάσια και Λύκεια της χώρας (Θεσσαλία, Αιτωλοακαρνανία, Πιερία, Σέρρες, Θεσσαλονίκη, Χαλκιδική). Το 1969 νυμφεύθηκε συνάδελφό του φυσικό με την οποία απόκτησε δύο κόρες, σήμερα πτυχιούχους Α.Ε.Ι. Συνταξιοδοτήθηκε ως Γυμνασιάρχης χωρίς να επιδιώξει την άνοδο στη διοικητική ιεραρχία της Εκπαίδευσης. Είχε αφιερώσει τον χρόνο του στη μελέτη και στην έρευνα σε θέματα Μαθηματικών. Αλληλογραφούσε με γαλλικές κυρίως βιβλιοθήκες από τις οποίες ελάμβανε άρθρα, περιοδικά και βιβλία για θέματα της Γεωμετρίας του Τριγώνου. Ορισμένα μάλιστα δυσεύρετα άρθρα και εργασίες ελάμβανε μέσω του γαλλικού ερευνητικού κέντρου CNRS. Με τη βοήθεια της συζύγου του μετέφραζε και στη συνέχεια επεξεργάζονταν το υλικό που είχε στη διάθεσή του, δίνοντας τις δικές του προεκτάσεις, γενικεύσεις και συνθέσεις. Συνεπώς το δίτομο έργο του «Γεωμετρία του Τριγώνου» είναι προϊόν μακρόχρονης ενασχόλησης με το αντικείμενο, είναι αποτέλεσμα δημιουργικής και συνθετικής επεξεργασίας ενός όγκου πληροφοριών σε σημείο που προκαλεί δέος για τον χρόνο που έχει απαιτηθεί για μία τέτοια προσπάθεια. Σύμφωνα με μαρτυρίες του οικογενειακού του περιβάλλοντος, ο Γ. Καπέτης δεν είχε μονομερή ενασχόληση με την Γεωμετρία, αλλά μελετούσε συστηματικά, Φιλοσοφία, Ιστορία και αρχαίους έλληνες συγγραφείς. Όμως η υγεία του τα τελευταία χρόνια της ζωής του δεν ήταν τόσο καλή, ώστε να του επιτρέπει να εργάζεται πάνω στα ερευνητικά του ενδιαφέροντα όσο χρόνο αυτός ήθελε. Στις 15 Μαρτίου του 2003 η καρδιά του σταμάτησε να κτυπά[6].

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε το έργο του Γ. Καπέτη «Η Γεωμετρία του Τριγώνου». Κύριο μέλημά μας είναι να γίνει κατανοητή η σημασία της προσπάθειάς του και η συνεισφορά του στη διεθνή έρευνα του συγκεκριμένου αντικειμένου. Για να γίνει όμως αυτό θεωρούμε απαραίτητο να παραθέσουμε ορισμένες επιπλέον πληροφορίες για τη διαδρομή της Γεωμετρίας του Τριγώνου και των σχέσεών της με τον επιστημονικό κλάδο της Γεωμετρίας.

Μετά την κλασσική Γεωμετρία των Ελλήνων γεωμετρών που ήταν η Γεωμετρία των συνθετικών μεθόδων και αποδείξεων ακολούθησε μετά το 1600 η Γεωμετρία των καρτεσιανών συντεταγμένων. Η ανάπτυξη της Γεωμετρίας αυτής παρ΄ ότι βοήθησε στην απόδειξη θεωρημάτων που ήταν δύσκολο να αποδει-

[6] Θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια του Γ. Καπέτη για την παροχή βασικών πληροφοριών σχετικών με τη ζωή και το έργο του.

χθούν με την κλασσική Γεωμετρία, την έκανε λιγότερο ελκυστική και σε κάποιο βαθμό επέφερε έναν ερευνητικό κορεσμό. Συγκεκριμένα η χρησιμοποίηση ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων (των οποίων η επιλογή μπορεί να είναι αυθαίρετη) με τη βοήθεια των οποίων γίνεται ο υπολογισμός των διαφόρων στοιχείων ενός προβλήματος οδηγούσε βεβαίως στον εντοπισμό ενός γεωμετρικού τόπου και απαντούσε στο ερώτημα ποια είναι η μορφή του, αλλά αυτός ο υπολογισμός ήταν εντελώς ψυχρός και δεν αναδείκνυε συνήθως τη σχέση του γεωμετρικού τόπου με αξιοσημείωτα στοιχεία του αρχικού σχήματος.

Η αναθέρμανση του ενδιαφέροντος για τη Γεωμετρία συντελέστηκε με τη λεγόμενη ανάπτυξη της Γεωμετρίας του Τριγώνου. Θεωρούμε ότι υπάρχει μια γενικευμένη παρεξήγηση σχετικά με τη χρήση αυτού του όρου. Ο μη ειδήμων ακούγοντας τον όρο Γεωμετρία του Τριγώνου νομίζει ότι επειδή γνωρίζει τη γραμματική σημασία των λέξεων, κατανοεί και την μαθηματική σημασία αυτών. Έτσι καταλήγει στο συμπέρασμα ότι Γεωμετρία του Τριγώνου σημαίνει μια εξειδικευμένη και σε βάθος μελέτη του τριγώνου. Αυτή η όψη της όμως είναι δευτερεύουσα, επειδή αν κάποιος μελετήσει σε βάθος τη Γεωμετρία του Τριγώνου θα διαπιστώσει ότι οι νέες γνώσεις του τον μεταφέρουν σε ένα άλλο πολύ ανώτερο επίπεδο κατανόησης της Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα η Γεωμετρία αυτή που είναι αναλυτική έχει τη δυνατότητα να γίνεται συγχρόνως και συνθετική και ονομάζεται Γεωμετρία του Τριγώνου διότι δεν χρησιμοποιεί πλέον δύο καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο, αλλά τρεις καθαρά τριγωνικές συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες αυτές είναι συγκεκριμένες και όχι αυθαίρετες. Κυρίως είναι οι λεγόμενες **βαρυκεντρικές** συντεταγμένες που είναι τα προσανατολισμένα εμβαδά των τριγώνων που σχηματίζονται από το σημείου P με τις τρεις πλευρές του τριγώνου αναφοράς. Αυτή η σύνδεση των συντεταγμένων κατά μοναδικό τρόπο με το τρίγωνο αναφοράς διευκολύνει ένα γεωμετρικό τόπο να είναι άμεσα αναγνωρίσιμος αν πρόκειται π.χ. για τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ή για την ευθεία του Euler ή την υπερβολή του Jerabek ή δίνει σχεδόν άμεση απάντηση στο ερώτημα αν ένα σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία του Euler ή πάνω στην ευθεία του βαρύκεντρου και του έκκεντρου του τριγώνου. Αυτή η Γεωμετρία συνδυάζει την ομορφιά της Συνθετικής και τη δύναμη της Αναλυτικής και για αυτόν τον λόγο θεωρούμε ότι όσα χρόνια και αν περάσουν είναι σε θέση να παράγει νέα ευρήματα. Αυτή τη Γεωμετρία ο πρώτος που την έκανε γνωστή στην Ελλάδα είναι ο Γεώργιος Καπέτης.

Αντιγράφουμε ένα σύντομο απόσπασμα από τον πρόλογο του ίδιου του συγγραφέα, στον οποίο περιγράφεται σύντομα, αλλά σαφέστατα ο σκοπός του έργου:

> *«Ο σκοπός του γράφοντος είναι αφ΄ ενός να παρουσιάσει μία κατά το δυνατόν συγκροτημένη εικόνα της Γεωμετρίας του Τριγώνου με βάση αυτά που έχει υπ΄ όψη του, απ΄ όσα μέχρι τώρα εγράφησαν, προσθέτοντας και δικά του στοιχεία, αφ΄ ετέρου χρησιμοποιώντας τα διάφορα συστήματα συντεταγμένων και με νέες προτάσεις (ή στοιχεία) να συντε-*

λέσει στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού της Γεωμετρίας που έφθασε ως τα μέσα σχεδόν του 20ου αιώνα».

Πράγματι, χωρίς να γίνεται κάποιου είδους κριτική εκ μέρους του Καπέτη σε παλαιότερες ελληνικές εκδόσεις Γεωμετρίας του Τριγώνου, το αδύνατο σημείο τους ήταν η έλλειψη συγκροτημένης εικόνας του μαθηματικού αυτού κλάδου, ίσως επειδή εκδόθηκαν υπό την πίεση του χρόνου και σε άλλες συνθήκες, με σκοπό να καλύψουν ή να εξαντλήσουν θέματα εισαγωγικών εξετάσεων κλπ.

Ένα μέρος του πρώτου τόμου[7] αποτελεί –και δεν μπορούσε να γίνει αλλιώς– θέματα που συναντώνται σε κάθε βιβλίο της Γεωμετρίας του Τριγώνου, δηλαδή περιέχει τις βασικές προτάσεις, επεκτείνεται στα θεωρήματα του Μενελάου, των Ceva και Descartes στις γενικεύσεις και στα αντίστροφα αυτών των θεωρημάτων. Περιγράφονται και μελετώνται οι ιδιότητες των βασικών σημείων, ευθειών και κύκλων του Τριγώνου, η ευθεία Simson, η ευθεία Steiner, τα σημεία του Nagel, τα σημεία Gergonne, οι κύκλοι Feuerbach. Ακολουθεί ένας πληρέστατος κατάλογος των μετρικών σχέσεων του Τριγώνου[8]. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι ισογώνιες ευθείες, τα ισογώνια σημεία και οι συμμετροδιάμεσοι του Τριγώνου. Ουσιαστικά ο Γ. Καπέτης προβάλλει και αναδεικνύει το έργου του Emile Lemoine. Μελετώνται οι κύκλοι του Απολλώνιου και του Brocard. Στη συνέχεια παρουσιάζεται με δεξιοτεχνία ένα πολύ δύσκολο εγχείρημα, η μελέτη της Γεωμετρίας του Τριγώνου με τη βοήθεια των συντεταγμένων. Συγκεκριμένα μελετά τις ιδιότητες του Τριγώνου με τη βοήθεια των λογοσυντεταγμένων[9], των βαρυκεντρικών συντεταγμένων[10], των καθετικών[11] και άλλων συστημάτων συντεταγμένων. Μελετά και βρίσκει τους τύπους μετατροπής των σχέσεων από το ένα είδος συντεταγμένων σε άλλο είδος. Εισάγει και άλλα είδη συντεταγμένων όπως τις γωνιακές, τις γωνιοποδικές, τις τριπολικές κλπ. Μελετά τις κωνικές τομές με τη βοήθεια των τριγωνικών συντεταγμένων, ενώ γίνεται εκτενής μελέτη των τριγωνικών μετασχηματισμών. Αναπτύσσει την έννοια της αντιστροφής σε σημεία, τρίγωνα και κύκλους. Το τελευταίο μέρος του Α΄ τόμου συμπλη-

[7] Έως και την σελίδα 71.

[8] Σελίδες 34 έως 47.

[9] Πρόκειται για τριάδες αριθμών κ, λ, μ με κ·λ·μ = 1, οι οποίοι εκφράζουν το λόγο της εσωτερικής διαίρεσης των αντίστοιχων πλευρών ενός τριγώνου από σημεία.

[10] Πρόκειται για τριάδες αριθμών κ, λ μ με κ + λ + μ = Ε, όπου Ε το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ, οι οποίοι εκφράζουν τη σχέση των εμβαδών ΣΑΒ, ΣΑΓ, ΣΒΓ με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ για τυχαίο σημείο Σ.

[11] Πρόκειται για τριάδες αριθμών κ λ, μ για τις οποίες ισχύει α·κ + β·λ + γ·μ = Ε, όπου Ε το εμβαδόν ενός τριγώνου. Οι αριθμοί κ, λ, μ εκφράζουν τις αποστάσεις ενός σημείου Σ από τις πλευρές α, β, γ αντίστοιχα του τριγώνου.

ρώνεται από ορισμένες προβολικές ιδιότητες των ευθειών, των γωνιών, των σημείων κλπ, ενώ εξαιρετικά χρήσιμοι είναι για τον μελετητή οι πίνακες με τα χαρακτηριστικά σημεία, τις ευθείες, τους κύκλους ενός τριγώνου και τις εκφράσεις των αντίστοιχων βαρυκεντρικών τους συντεταγμένων.

Στον δεύτερο τόμο του έργου αναπτύσσεται διεξοδικά ο μετασχηματισμός του Lemoine[12] και προβάλλονται εφαρμογές του για την παραγωγή νέων σχέσεων στα τρίγωνα, όπως σε θέματα εμβαδών, ενώ πραγματοποιούνται γενικεύσεις μετρικών σχέσεων που είχαν περιληφθεί στον Α΄ τόμο. Στον δεύτερο επίσης τόμο μελετώνται κύκλοι οι οποίοι σχετίζονται με το Τρίγωνο, η δύναμη σημείου ως προς κύκλο, κύκλοι που παράγονται από άλλους κύκλους του Τριγώνου και δέσμες κύκλων[13]. Στη συνέχεια εξετάζεται η παράλληλη προβολή και οι μετασχηματισμοί κωνικών τομών υπό την επίδραση της παράλληλης προβολής. Μελετώνται επίσης οι εφαπτόμενες κωνικές και οι περιγραμμένες κωνικές των σχημάτων που σχετίζονται με το Τρίγωνο.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Το έργο του Γ. Καπέτη τα τελευταία χρόνια είχε εκτιμηθεί πλήρως από τη διεθνή κοινότητα των ερευνητών της Γεωμετρίας του Τριγώνου. Το διεθνές ηλεκτρονικό περιοδικό Forum Geometricorum[14] τον περιλάμβανε στον κατάλογο των advisors, θέση εξόχως τιμητική και ταυτόχρονα ενδεικτική της θετικής αξιολόγησης του έργου του. Αλλά και οι μελετητές – ερευνητές είχαν εκτιμήσει πολύ το έργο του. Για παράδειγμα ο Steve Sigur καθηγητής του Πανεπιστημίου της Ατλάντα των ΗΠΑ αναφέρει «διαβάζω το βιβλίο του Γ. Καπέτη με μεγάλο ενθουσιασμό … έχω μάθει πάρα πολλά από αυτό το βιβλίο … χρησιμοποιεί νέες – τουλάχιστον σε εμένα υπολογιστικές τεχνικές»[15]. Ο ίδιος αναφέρει «αγαπητοί φίλοι, ασχολούμαι με μια νέα τεχνική και με ένα νέο θεώρημα που ανακάλυψα στο πάρα πολύ σπουδαίο βιβλίο του Καπέτη για τη Γεωμετρία του Τριγώνου». Επίσης ο Γάλλος Bernard Gilbert γράφει: «αυτή η έλλειψη αναφέρεται από τον Καπέτη, δείχνοντας μια ωραία μέθοδο κατασκευής των αξόνων της κωνικής ..»[16]. Θεωρούμε ότι το έργο του είναι ένα ανεξάντλητο ορυχείο, η έρευνα του οποίου - λόγω των ιδεών και μεθόδων που περιέχει - θα αποδώσει νέες ανα-

[12] Αυτός παρουσιάζεται στις σελίδες 5 έως και 95.
[13] Τα θέματα καλύπτουν τις σελίδες 97 έως 179.
[14] Η ηλεκτρονική διεύθυνσή του είναι:http//forumgeom.fau.edu
Ας σημειωθεί ότι στους κριτές του περιοδικού συγκαταλέγονται ο Ανδρέας Χατζηπολάκης από την Αθήνα και ο Μιχάλης Λάμπρου καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Ηρακλείου Κρήτης. Σημαντικές έρευνες έχει δημοσιεύσει ο μαθηματικός Νίκος Δεργιαδές από τη Θεσσαλονίκη.
[15] Γράμματά του στο περιοδικό Forum Geometricorum στις 11 και 14 Αυγούστου 2003.
[16] Γράμμα του στο ίδιο περιοδικό την 11 Αυγούστου 2003.

καλύψεις. Αυτές θα είναι και τα ουσιαστικά πιστοποιητικά της μεγάλης αξίας του Γ. Καπέτη και τα ισχυρά κίνητρα για προώθηση της μαθηματικής έρευνας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ένα ενδιαφέρον άρθρο για τη Γεωμετρία του Τριγώνου είναι του Philip Davis συγγραφέα του βιβλίου «*Η μαθηματική εμπειρία*», το οποίο εκδόθηκε και στα ελληνικά. Πρόκειται για το έργο: Davis Philip. *The Rise, Fall, and Possible Transfiguration of Triangle Geometry: A Mini-history*. Δημοσιεύτηκε στο περιοδικό American Mathematical Monthly. Μάρτιος 1995, σελίδες 204-214.

Σημαντικό για την παρουσίαση της γενικής ανάπτυξης της Γεωμετρίας θεωρείται το λήμμα του ρώσου Ακαδημαϊκού Αλεξάντρ Ντ. Αλεξαντρόφ στη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια με τίτλο «*Γεωμετρία*», ελληνική έκδοση τόμος 7ος, σελίδες 146-154.

Κλασικό θεωρείται το κείμενο για τη Συνθετική Γεωμετρία στο βιβλίο Cajori Florian: *A History of Mathematics*. Chelsea Pub. N.Y. πρώτη έκδοση 1893 με πολλές ανατυπώσεις και τρίτη έκδοση το 1980. Σε αυτό υπάρχει το άρθρο με τίτλο «Στοιχειώδης Γεωμετρία του Τριγώνου και του Κύκλου».

Berkhan G. & Meyer W. (1913-1931): *Neuere Dreiecksgeometrie Encyclopedia der Mathematischen Wissenschaften*. Leipzing. Teubner. Πρόκειται για πολύτομο έργο.

Johnson R.A. (1929): *Modern Geometry – An Elementary Treatise on the Geometry of Triangle and the Circle*. Houghton, Mifflin.

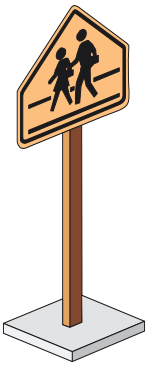
Johnson R.A. (1960): *Advanced Euclidean Geometry*. N.Y. Dover.

Lalesco T. (1952): *La geometrie du triangle*. Ed. J. Gabay.

Καπέτης Γεώργιος (1996):*Γεωμετρία του Τριγώνου*. Τόμος Α. Θεσσαλονίκη. Εκδόσεις Ζήτη.

Καπέτης Γεώργιος (2002): *Γεωμετρία του Τριγώνου*. Τόμος Β. Θεσσαλονίκη. Εκδόσεις Ζήτη.

Επισημάνσεις - Διευκρινίσεις πάνω στη Σχολική ύλη



Παραθέτουμε παρακάτω δύο μικρά αλλά πολύ ουσιαστικά σχόλια και δύο αντίστοιχες ασκήσεις που αφορούν το πεδίο ορισμού και την παραγώγιση συνάρτησης που ορίζεται από ορισμένο ολοκλήρωμα. Θεωρούμε ότι τα παρακάτω σχόλια είναι πολύ χρήσιμα στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης επειδή στο σχολικό βιβλίο δε δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα, και η λύση των αντίστοιχων ασκήσεων (του σχολικού βιβλίου) αφήνεται στην κρίση και την οξυδέρκεια των μαθητών με αποτέλεσμα να τους δημιουργούνται πολλά ερωτηματικά. Με τα σχόλια που ακολουθούν δίνονται με σύντομο και περιεκτικό τρόπο οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα.

Το άρθρο που ακολουθεί μας έστειλε ο συνάδελφος Δημήτρης Γεωργακίλας από την Καλαμάτα και τα σχετικά σχόλια και οι ασκήσεις περιέχονται στο βιβλίο του ίδιου ***ΑΝΑΛΥΣΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ***, εκδόσεις **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ του Χάρη Βαφειάδη**, Θεσσαλονίκη 2003, στις σελίδες 313,314, 325 και 350.

Πεδίο ορισμού – Παράγωγος συνάρτησης της μορφής: $F(x)=\int_{A(x)}^{B(x)} f(t)\,dt$, όπου t ανήκει στο διάστημα Δ.

Γεωργακίλας Δημήτρης
Μαθηματικός - Συγγραφέας, Καλαμάτα

Σχόλιο 1

- Για την εύρεση του πεδίου ορισμού της F απαιτούμε, η f να ορίζεται και να είναι συνεχής στο διάστημα ολοκλήρωσης με άκρα τις A(x) και B(x). Τούτο συμβαίνει για τις τιμές τον x για τις οποίες τα άκρα A(x) και B(x) ανήκουν στο διάστημα Δ.
- Για την εύρεση της παραγώγου της F διασπάμε το ολοκλήρωμα σε διαφορά ολοκληρωμάτων, επιλέγοντας μια σταθερά α. Η επιλογή του α γίνεται έτσι ώστε, η συνάρτηση f να είναι συνεχής στα αντίστοιχα διαστήματα ολοκλήρωσης. Έχουμε τότε:

$$F(x)=\int_{A(x)}^{\alpha} f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{B(x)} f(t)\,dt=\int_{\alpha}^{B(x)} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{A(x)} f(t)\,dt \quad \text{και}$$

$$F'(x)=f(B(x))\cdot B'(x)-f(A(x))\cdot A'(x)$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση: $F(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{t^2-1}\,dt$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την F.

Λύση:

α) Έστω $f(t)=\sqrt{t^2-1}$, της οποίας πεδίο ορισμού είναι το:

$$A_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

Απαιτούμε στο διάστημα ολοκλήρωσης η f να ορίζεται και να είναι συνεχής.

Για να συμβαίνουν αυτά πρέπει το διάστημα ολοκλήρωσης να είναι υποσύνολο του συνόλου A_f, δηλαδή τα άκρα –1 και x του ολοκληρώματος να ανήκουν στο ίδιο διάστημα.

Επειδή το $-1\in(-\infty,-1]$ πρέπει και το $x\in(-\infty,-1]$.

Επομένως η συνάρτηση F ορίζεται στο $(-\infty,-1]$.

β) Για κάθε $x\in(-\infty,-1]$ έχουμε:

$$F'(x)=\left(\int_{-1}^{x}\sqrt{t^2-1}\,dt\right)'=\sqrt{x^2-1}>0,\ \text{για κάθε } x\in(-\infty,-1).$$

Η F είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.

Επομένως η F έχει μέγιστο στο $x_0=-1$ το $F(-1)=\int_{-1}^{-1}\sqrt{t^2-1}\,dt=0$.

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $G(x)=\int_{x}^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt$, όπου 0 < t < 1.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και την G′(x).

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)$.

Λύση:

α) Έστω $f(t) = \frac{1}{\ln t}$ με $0 < t < 1$.

Απαιτούμε στο διάστημα ολοκλήρωσης:

- η f να ορίζεται και
- να είναι συνεχής.

Για να συμβαίνουν αυτά πρέπει το διάστημα ολοκλήρωσης να είναι υποσύνολο του (0, 1).

Παρατηρούμε ότι αν $0 < x < 1$ τότε $0 < x^2 < 1$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της G είναι το $A = (0, 1)$.

Για να βρούμε την παράγωγο της G επιλέγουμε σταθερά $\alpha \in A$.

Τότε: $G(x) = \int_x^\alpha \frac{1}{\ln t}dt + \int_\alpha^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt = -\int_\alpha^x \frac{1}{\ln t}dt + \int_\alpha^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$ (1)

Έστω $G_1(x) = \int_\alpha^x \frac{1}{\ln t}dt$ και $G_2(x) = \int_\alpha^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$.

Είναι: $G_1'(x) = \frac{1}{\ln x}$ και

$$G_2'(x) = \left[G_1(x^2)\right]' = G_1'(x^2)\cdot(x^2)' = \frac{1}{\ln x^2}\cdot 2x = \frac{1}{2\ln x}\cdot 2x = \frac{x}{\ln x}.$$

Από την (1) έχουμε: $G'(x) = -G_1'(x) + G_2'(x) = -\frac{1}{\ln x} + \frac{x}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

β) Η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{\ln t}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1), διότι:

$$f'(t) = -\frac{(\ln t)'}{(\ln t)^2} = -\frac{1}{t(\ln t)^2} < 0$$

Επειδή $x \to 0^+$, έστω $x \in (0, 1)$, οπότε $x^2 < x$.
Τότε, για κάθε t, με $x^2 < t < x$ ισχύει:

$$f(x^2) > f(t) > f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x^2} > f(t) > \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow \frac{1}{2\ln x} > f(t) > \frac{1}{\ln x}.$$

Άρα $\int_{x^2}^x \frac{1}{2\ln x}dt > \int_{x^2}^x f(t)dt > \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln x}dt \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2\ln x}(x - x^2) > -G(x) > \frac{1}{\ln x}(x - x^2) \Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{2\ln x} < G(x) < \frac{x^2 - x}{\ln x} \quad (2)$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x^2-x)\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right]=0$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, από τη (2) συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=0$.

Παράδειγμα 3

α) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(x)+f'(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $f(x)=c\cdot e^{-x}$, όπου c σταθερός πραγματικός.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_0^x\left[f^2(t)+\left(f'(t)\right)^2\right]dt=\alpha^2-f^2(x),\ \text{όπου } \alpha>0 \qquad (1)$$

Λύση:

α) Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της $f(x)+f'(x)=0$ με e^x έχουμε:

$$e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow [e^x\cdot f(x)]'=0$$

Άρα $e^x\cdot f(x)=c$, όπου c σταθερός πραγματικός.
Επομένως, $\boldsymbol{f(x)=c\cdot e^{-x}}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Προφανώς τα μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
Άρα η (1) είναι ισοδύναμη με το ζεύγος των σχέσεων που προκύπτουν

- Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (1)
- Αν θέσουμε στην (1) όπου x = 0 (*βλέπε το παρακάτω σχόλιο*).

Έχουμε:

$$f^2(x)+\left[f'(x)\right]^2=-2f(x)\cdot f'(x) \Leftrightarrow f^2(x)+\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f'(x)=0$$

$$\left[f(x)+f'(x)\right]^2=0 \Leftrightarrow f(x)+f'(x)=0 \quad (2),$$

οπότε, σύμφωνα με το ερώτημα (α) είναι $f(x)=c\cdot e^{-x}$ (3).

Από την (1), για x = 0, προκύπτει:

$$\alpha^2-f^2(0)=0 \Leftrightarrow f^2(0)=\alpha^2 \qquad (4).$$

Εξ' άλλου από την (3) για x = 0 παίρνουμε f(0) = c.

Άρα, με αντικατάσταση στην (4), έχουμε:

$$c^2 = \alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} c = -\alpha \text{ ή } c = \alpha$$

Επομένως έχουμε τις συναρτήσεις: $\begin{cases} f(x) = -\alpha e^{-x}, x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ f(x) = \alpha e^{-x}, \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Σχόλιο 2

Με αφορμή το προηγούμενο θέμα γεννιέται το ερώτημα αν είναι πράγματι απαραίτητη η επαλήθευση κατά την επίλυση εξισώσεων με ολοκληρώματα.

• Έστω ότι έχουμε την εξίσωση: $A(x) = B(x)$, $x \in \Delta$ (Δ διάστημα) (1)
της οποίας τα μέλη είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και τη συνθήκη:

$$A(x_0) = B(x_0) \quad (2).$$

θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A'(x) = B'(x), x \in \Delta \quad (3) \\ A(x_0) = B(x_0) \end{cases}$$

Πράγματι: Αν ισχύει η $A(x) = B(x)$, είναι φανερό ότι ισχύει $A'(x) = B'(x)$.

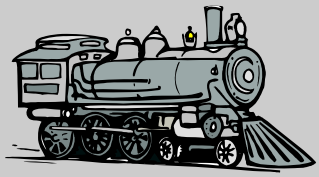
Έστω $A'(x) = B'(x)$, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $A(x) = B(x) + c$, οπότε για $x = x_0$ προκύπτει:

$$A(x_0) = B(x_0) + c \Leftrightarrow c = 0 \text{ λόγω της (2).}$$

Επομένως, όταν παραγωγίζουμε τα μέλη της εξίσωσης (1), τότε η (3) που προκύπτει δεν είναι ισοδύναμη της (1).

Εφοδιασμένη όμως με τη συνθήκη (2) διατηρεί την ισοδυναμία. Δηλαδή οι συναρτήσεις που επαληθεύουν τις (2) και (3) είναι και λύσεις της αρχικής (1).

Συνεπώς δεν είναι απαραίτητη η επαλήθευση κατά την επίλυση προβλημάτων, όπως στο προηγούμενο θέμα. Κατά συνέπεια, σε τέτοιου είδους προβλήματα, που θα συναντάμε στο εξής, θα θεωρούμε δεδομένη την παραπάνω ισοδυναμία.



Μία πρακτική εφαρμογή του ιστογράμματος συχνοτήτων

Τσιτούρης Γιάννης
Μαθηματικός, Ν. Σμύρνη, Αθήνα

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων έχει στην πράξη μεγάλο ενδιαφέρον. Μία πρακτική εφαρμογή του ιστογράμματος συχνοτήτων, μπορούμε να πούμε ότι περιγράφεται παρακάτω.

Έστω 20 τρένα στο Πακιστάν, τα οποία μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν ένα αξιόπιστο δείγμα για ένα πλήθος 288 τρένων, που έχει η χώρα αυτή.

Παρατηρούμε το μέσο χρόνο (σε λεπτά) των καθυστερήσεων στις αφίξεις, σε καθένα από τα 20 αυτά τρένα, κατά τη διάρκεια ενός χρόνου.

X	v_i
[0, 5)	8
[5, 10)	4
[10, 15)	3
[15, 20)	4
[20, 25)	1
	v = 20

Ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις και σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα συχνοτήτων.

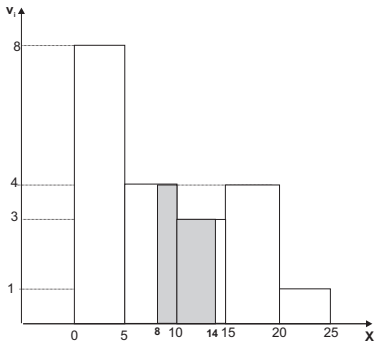
Σχηματίστε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και με τη βοήθεια αυτού υπολογίστε πόσα περίπου από τα 288 τρένα της χώρας βρίσκονται σε χρόνους καθυστέρησης από 8 ως 14 λεπτά.

ΛΥΣΗ:

Αν θεωρήσουμε ότι το μήκος βάσης του κάθε ιστού είναι μία μονάδα, τότε το εμβαδόν του παριστάνει τη συχνότητα της κλάσης του, βρίσκουμε το εμβαδόν (Ε) του γραμμοσκιασμένου μέρους:

$$E = \frac{2}{5}\cdot 4 + \frac{4}{5}\cdot 3 = \frac{8}{5} + \frac{12}{5} = 4\,.$$

Άρα, αφού στα 20 τρένα τα 4 βρίσκονται σε χρόνους ανάμεσα σε 8 και 14 λεπτά.



Στα 288 τρένα, το ζητούμενο πλήθος Μ θα είναι: $M = 288\cdot\frac{4}{20} \cong 57{,}6$, δηλαδή περίπου 58 τρένα.

Στοιχειώδη εναντίον Ανωτέρων Μαθηματικών

Δεργιαδές Νίκος
Καθηγ. Πειραματικού Σ.Π.Θ.

Λάμπρου Μιχάλης
Καθηγ. Πανεπιστημίου Κρήτης

Φιλοκαλοῦμεν μετ' εὐτελείας

(Θουκυδίδου,'Ιστορίαι, Β΄ 40)

1) Στον περίφημο επιτάφιό του ο Περικλής, σε ένα σημείο της αγόρευσής του όπου επαινεί τις αρετές των Αθηναίων, περιλαμβάνει, κατά την μαρτυρία του Θουκυδίδη, τη φράση **"φιλοκαλούμεν μετ' ευτελείας"**. Το νόημά της το αποδίδει πολύ εύστοχα ο Ελευθέριος Βενιζέλος στην μετάφρασή του της **Ιστορίας** ως "είμαστε εραστές του ωραίου αλλά και φίλοι συγχρόνως της απλότητας".

Στο παρόν άρθρο, με γνώμονα το παραπάνω εγκώμιο της απλότητας, θα εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό πρόβλημα. Το χαρακτηριστικό του είναι ότι θα το επιλύσουμε χρησιμοποιώντας τα λιτά εργαλεία των στοιχειωδών μαθηματικών αλλά το οποίο, περιέργως, τα ανώτερα μαθηματικά αντιμετωπίζουν με σαφώς δυσκολότερο τρόπο.

Εδώ όταν μιλάμε για "στοιχειώδη μαθηματικά" εννοούμε τα μαθηματικά που διδασκόμαστε στο Λύκειο. Σε αντιδιαστολή, με τον όρο "ανώτερα μαθηματικά" εννοούμε αυτά που διδάσκονται σε Πανεπιστημιακό επίπεδο και, ως εκ τούτου, οι κάτοχοί τους είναι λιγότεροι.

Είναι γεγονός ότι, συνήθως, είναι ευκολότερο να επιλύσει κανείς ένα πρόβλημα με χρήση ανώτερων μαθηματικών παρά να περιορίζεται μόνο στα στοιχειώδη. Ο κανόνας όμως αυτός έχει εξαιρέσεις, και εδώ θα μας απασχολήσει ακριβώς μια τέτοια περίπτωση. Στο τέλος του άρθρου δίνουμε ερμηνεία του γεγονότος, ώστε να κατανοηθεί η αιτία του φαινομένου.

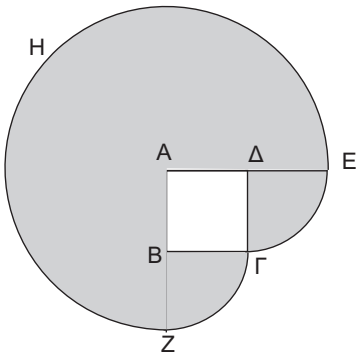
Ας αρχίσουμε με ένα πρόβλημα του οποίου η λύση είναι άμεση και απλή.

Πρόβλημα:

Μία τετράγωνη στάνη ΑΒΓΔ (σχήμα 1) με περίμετρο 2s είναι περιφραγμένη με φράκτη και περιβάλλεται από μεγάλη έκταση όπου μπορεί να βοσκήσει ένα πρόβατο. Το πρόβατο δεσμεύεται από σχοινί μήκους s, που το ένα άκρο του είναι δεμένο στο σημείο Α του φράκτη και το άλλο άκρο του συγκρατεί το πρόβατο. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μέσα στην οποία μπορεί να βοσκήσει το πρόβατο.

Λύση:

Είναι φανερό ότι εξ αιτίας του φράκτη η περιοχή όπου μπορεί να κινηθεί το πρόβατο είναι ο κυκλικός τομέας ΑΕΗΖΑ, ίσος με τα τρία τέταρτα κύκλου ακτίνας ΑΕ = ΑΖ = s, καθώς και, εξ αιτίας της δίπλωσης του σχοινιού στα σημεία Β και Δ του φράκτη, τα τεταρτοκύκλια ΒΓΖΒ, ΔΓΕΔ ακτίνας: $BZ = B\Gamma = \Delta E = \Delta\Gamma = \frac{s}{2}$.



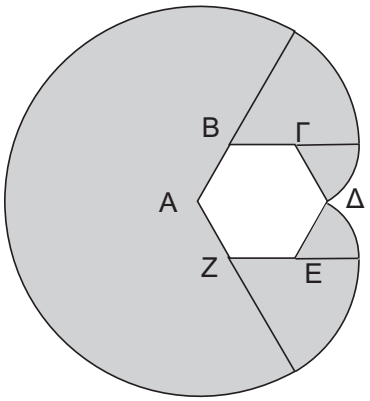
Σχήμα 1

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \frac{3}{4}\pi s^2 + 2\cdot\frac{1}{4}\pi\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{7}{8}\pi\cdot s^2 \qquad \blacksquare$$

2) Άσκηση:

Επιλύστε το ανάλογο πρόβλημα όταν το σχήμα της στάνης είναι, αντί για τετράγωνο, ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ περιμέτρου 2s (σχήμα 2).



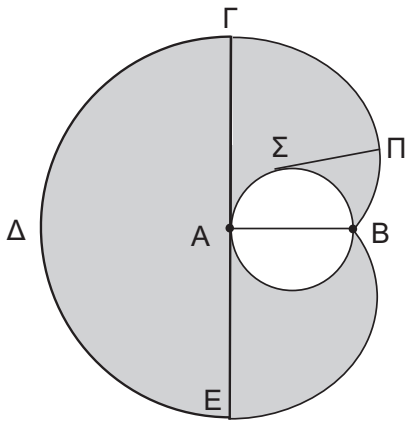
Σχήμα 2

Υπόδειξη:

Κάντε χρήση του γεγονότος ότι η κάθε πλευρά του εξαγώνου είναι $\frac{1}{3}s$ και οι εξωτερικές του γωνίες είναι $\frac{\pi}{3}$ ακτίνια.

Η σωστή απάντηση είναι $\frac{23}{27}\pi s^2$.

Αν τώρα αλλάξουμε την υπόθεσή μας, ότι η στάνη είναι τετράγωνη ή εξάγωνη και ζητήσουμε να δούμε τί γίνεται στην περίπτωση που η στάνη είναι κυκλική, πάλι με περίμετρο 2s, και το σχοινί δένεται στο σημείο Α του κυκλικού φράκτη, θα διαπιστώσουμε εύκολα ότι το πρόβατο μπορεί να κινηθεί άνετα μέσα στο ημικύκλιο ΑΓΔΕΑ (Σχήμα 3) ακτίνας s.
Αν θελήσει όμως να προχωρήσει περισσότερο τότε το σχοινί θα αρχίσει να τυλίγεται γύρω από τον κυκλικό φράκτη μέχρι το σημείο π.χ. Σ και θα τεντωνόταν εφαπτομενικά στον κυκλικό φράκτη σαν ευθύγραμμο τμήμα ΣΠ.



Σχήμα 3

Θα αναγκαστεί λοιπόν το πρόβατο να κινείται πάνω στα καμπύλα τμήματα ΓΒ και ΕΒ τα οποία όμως τώρα δεν έχουν κανένα τους τμήμα κυκλικό όπως στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

3) Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν πρέπει να προσθέσουμε το εμβαδόν $\frac{1}{2}\pi\cdot s^2$ του ημικυκλίου ΑΓΔΕΑ ακτίνας s, στο εμβαδόν του χωρίου ΑΓΠΒΕΑ και να αφαιρέσουμε το εμβαδόν πR^2 της στάνης. Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται στο πώς θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου ΑΓΠΒΕΑ.

Λόγω συμμετρίας, το προαναφερθέν χωρίο είναι το διπλάσιο του ΑΓΠΒΑ, οπότε το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του εμβαδού του τελευταίου.
Ακολουθούν δύο απόπειρες με ανώτερα μαθηματικά: Όποιος δεν ενδιαφέρεται για τις λεπτομέρειες ή δεν γνωρίζει τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται, μπορεί να διαβάσει τις επόμενες δύο ενότητες επί τροχάδην αλλά να συνεχίσει την προσεκτική μελέτη από την ενότητα **"Μετ' ευτελείας"**.

Πρώτη απόπειρα:

Αυτός που γνωρίζει περισσότερα από τα μαθηματικά που διδάσκονται στο Λύκειο οδηγείται κατά φυσιολογικό τρόπο να χρησιμοποιήσει πολικές συντεταγμένες.

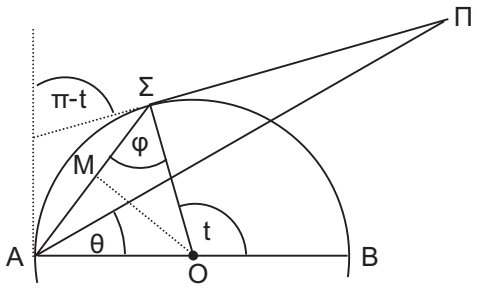
Ορίζουμε αρχή το σημείο Α και αρχικό άξονα τον ΑΒ.

Αν οι πολικές συντεταγμένες του Π είναι (ρ, θ), δηλαδή ΑΠ = ρ και $\widehat{ΒΑΠ}$ = θ, το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta$.

Χρειάζεται να εκφράσουμε τα ρ και θ συναρτήσει μιας παραμέτρου, και αυτή θα είναι η γωνία φ της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΣ (σχήμα 4). Έχουμε ότι:

$\widehat{ΑΣΠ} = \frac{\pi}{2}$ + φ, ότι $\widehat{ΑΟΣ}$ = π − 2φ

και ότι το μήκος του τόξου ΑΣ ισούται με (π − 2φ)R , όπου R η ακτίνα του κύκλου.



Σχήμα 4

Το R είναι βέβαια σταθερό, και συγκεκριμμένα, αφού 2πR = 2s, είναι R = $\frac{s}{\pi}$.

Τώρα, ΑΣ = 2ΜΣ = 2Rσυνφ

και ΣΠ = s − (π − 2φ)R = 2φR

Ο νόμος των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΣΠ μας δίνει:

$$\rho^2 = ΑΠ^2 = ΑΣ^2 + ΣΠ^2 - 2ΑΣ\cdot ΣΠ\cdot συν\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$$
$$= 4R^2\,συν^2\varphi + 4\varphi^2R^2 - 2\cdot 2R συνφ\cdot 2\varphi R(-ημφ)$$
$$= 4R^2\,(συν^2\varphi + \varphi^2 + \varphi\cdot ημ2\varphi),$$

οπότε έχουμε παράσταση του ρ συναρτήσει του φ.

Ο νόμος των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΣΠ δίνει:

$$\frac{ΑΠ}{ημ(\frac{\pi}{2}+\varphi)} = \frac{ΣΠ}{ημ(\varphi-\theta)} \qquad \text{ή} \qquad \rho ημ(\varphi-\theta) = 2R\varphi συνφ \qquad \text{ή}$$

$$\theta = \varphi - τοξημ\frac{2R\varphi συνφ}{\rho} = \varphi - τοξημ\frac{\varphi συνφ}{\sqrt{συν^2\varphi+\varphi^2+\varphi\cdot ημ2\varphi}}.$$

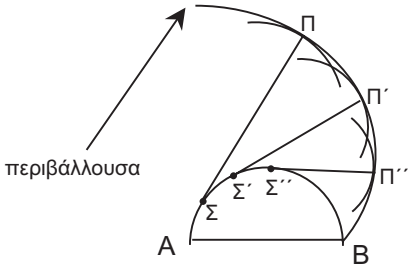
4) Οι παραστάσεις των ρ και θ συναρτήσει του φ που βρήκαμε, μπορούν τώρα να αντικατασταθούν στο $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta$ και να διεκπεραιωθεί η ολοκλήρωση.

Είναι όμως σαφές ότι προκύπτουν ιδιαίτερα επίπονες πράξεις που, μοιραία, δεν τελεσφορούν. Άλλωστε, το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι δυσεπίλυτο ακόμη και με χρήση υπολογιστικών πακέτων όπως τα ισχυρά Mathematica και MapleV, τα οποία αδυνατούν να δώσουν πρακτικό αποτέλεσμα. Ωθούμαστε, λοιπόν, στο να εγκαταλείψουμε αυτή την προσέγγιση στο πρόβλημα.

Δεύτερη απόπειρα:

Μετά την αποτυχία της μεθόδου με χρήση πολικών συντεταγμένων, ας δούμε τι γίνεται με χρήση καρτεσιανών.

Ο πρώτος στόχος είναι να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου Π του ορίου της περιοχής που κινείται το πρόβατο. Η εν λόγω περιοχή προσδιορίζεται αν παρατηρήσουμε ότι όταν το σχοινί είναι τεντωμένο, η κίνηση του προβάτου τείνει να γίνει εφαπτομενικά των κύκλων με κέντρο τις διάφορες θέσεις του Σ και αντίστοιχες ακτίνες ΣΠ.



Σχήμα 5

Δηλαδή η κίνηση του προβάτου όταν το σχοινί είναι τεντωμένο γίνεται κατά μήκος μιάς καμπύλης που στα ανώτερα μαθηματικά ονομάζεται **περιβάλλουσα** των κύκλων (σχήμα 5).

Η **περιβάλλουσα** ενός συστήματος καμπυλών (εδώ πρόκειται για τους κύκλους κέντρων Σ και ακτίνων ΣΠ) είναι η καμπύλη που τις εφάπτεται. Πρόκειται για μία έννοια που έχει μελετηθεί ευρέως στην Θεωρία Καμπυλών και ο καθιερωμένος τρόπος εύρεσης της εξίσωσής της είναι ο ακόλουθος:

Έστω $F(x, y, \varphi) = 0$ οι εξισώσεις ενός συστήματος καμπυλών.

Στην περίπτωσή μας είναι οι κύκλοι:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - 4R^2\varphi^2 = 0,$$

όπου (x_o , y_o) οι συντεταγμένες του κέντρου τους Σ, δηλαδή:

$$x_o = \text{ΑΣ}\sigma\upsilon\nu\varphi = 2R\sigma\upsilon\nu^2\varphi \quad \text{και} \quad y_o = \text{ΑΣ}\eta\mu\varphi = 2R\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Σύμφωνα με τη θεωρία, η εξίσωση της περιβάλλουσας προσδιορίζεται από την επίλυση ως προς x και y του συστήματος $\begin{cases} F(x,y,\varphi)=0 \\ \dfrac{d}{d\varphi}F(x,y,\varphi)=0 \end{cases}$

(όπου η παράγωγος ως προς φ θεωρεί τα x και y σταθερά).

Στην προκείμενη περίπτωση το σύστημα είναι, μετά από απλές αναγωγές, το:

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 4R^2\varphi^2 = 0 \\ (x - x_0)\eta\mu 2\varphi - (y - y_0)\sigma\upsilon 2\varphi - 2R\varphi = 0 \end{cases}$$

Η επίλυση του συστήματος ως προς x και y είναι μεν εφικτή, δίνει όμως πολύπλοκες παραστάσεις x = x(φ), y = y(φ).

Πάντως με χρήση αυτών και σύμφωνα με την θεωρία, το ζητούμενο εμβαδόν ΑΓΠΒΑ δίνεται από κάποιους γενικούς τύπους που εκφράζουν το εμβαδόν ως ολοκλήρωμα.

Π.χ. κατάλληλος τέτοιος είναι ο:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\varphi)y'(\varphi)d\varphi$ ή, ακόμη καλύτερα, ο $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x(\varphi)y'(\varphi) - x'(\varphi)y(\varphi)\right)d\varphi$.

(Το όριο ολοκλήρωσης εδώ είναι το εύρος των τιμών της φ, που είναι από 0 έως $\frac{\pi}{2}$).

Ο υπολογισμός όμως των δύο αυτών ολοκληρωμάτων είναι σισύφιο έργο οπότε, όπως και στην πρώτη απόπειρα, η μέθοδος ναυαγεί.

Υπερπήδηση εμποδίων.

Πριν συνεχίσουμε, σπεύδουμε να επισημάνουμε ότι δεν πρέπει ο αναγνώστης να βγάλει, από τα παραπάνω, το συμπέρασμα ότι τα ανώτερα μαθηματικά αποτυγχάνουν να επιλύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα. Το μόνο συμπέρασμα είναι ότι, αν ακολουθήσει κανείς καθιερωμένη μεθοδολογία χωρίς κάποιο ιδιαίτερο τέχνασμα, τότε οδηγείται σε δύσβατα μονοπάτια, αν όχι σε αδιέξοδα.

Εν πάσει περιπτώσει, δεν φαίνεται να μπορεί να απαλλαγεί κανείς από ένα ολοκλήρωμα στο τελευταίο βήμα, και το μόνο που μπορεί να ελπίζει είναι να κάνει τέτοια επιλογή παραμέτρου (στην θέση της φ παραπάνω) ώστε να οδηγηθεί τόσο σε απλή μορφή εξισώσεων όσο σε προσπελάσιμο ολοκλήρωμα. Μία κατάλληλη επιλογή είναι η ακόλουθη, την οποία αφήνουμε ως άσκηση.

Άσκηση:

Αν θέσουμε $\widehat{\Sigma O B}$ = t, (σχ. 4), δείξτε ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του Π είναι:

$$\mathbf{x(t) = R(1 + \sigma\upsilon t + t\eta\mu t),\quad y(t) = R(\eta\mu t - t\sigma\upsilon t).}$$

Υπόδειξη:

Το τόξο ΑΣ ισούται με R(π – t), οπότε ΣΠ = Rt. Επίσης, αφού ΣΠ⊥ΟΣ, η γωνία που σχηματίζει η ΣΠ με τον άξονα των y είναι π – t.

Στην περίπτωση αυτή, το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right)dt$, που εμφανίζεται για την εύρεση του ζητούμενου εμβαδού ΑΓΠΒΑ είναι προσπελάσιμο (χρειάζεται μόνο ολοκλήρωση κατά μέρη). Δεν υπάρχει λόγος να κάνουμε τις πράξεις εδώ.

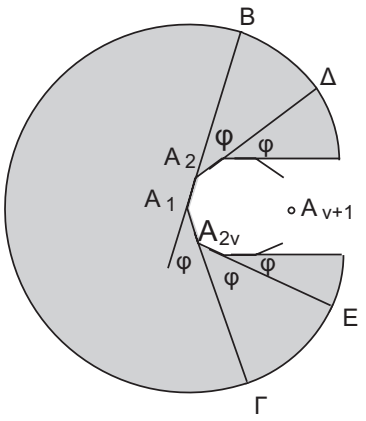
Πάντως η τελική απάντηση είναι: $\frac{\pi^3R^2}{6}+\frac{\pi R^2}{2}$ και άρα η περιοχή που έχει πρόσβαση το πρόβατο βγαίνει να είναι $\frac{5}{6}\pi s^2$.

Για να συνοψίσουμε, διαπιστώνει κανείς ότι ούτε η τελευταία μεθοδολογία, αν και δίνει απάντηση σχετικά ευκολότερα από τις δύο προηγούμενες, δεν έχει το στοιχείο της απλότητας. Σε τελευταία ανάλυση, χρησιμοποιεί μεθόδους του Απειροστικού Λογισμού και το θεμελιώδες Θεώρημα που έμειναν αναπόδεικτα στο Λύκειο. Αντιθέτως, αμέσως από κάτω αναπτύσσουμε μία μέθοδο με στοιχειώδη μαθηματικά που είναι όχι μόνο απλούστερη αλλά απαιτεί μόνο γνώση ορίων και το εμβαδόν του κύκλου.

Μετ' ευτελείας.

Η κεντρική ιδέα είναι να εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα, αλλά αντί του κύκλου να αρχίσουμε την προσέγγισή του από κανονικό πολύγωνο με πλήθος πλευρών 2ν και περίμετρο πάλι 2s.

Αν μπορούσε να βρεθεί στη περίπτωση αυτή το εμβαδό $E_{2\nu}$ της ζητουμένης περιοχής τότε παίρνοντας το $\lim_{\nu\to\infty}E_{2\nu}$ καταλήγουμε στο ζητούμενο εμβαδό για την περίπτωση της κυκλικής στάνης.



Σχήμα 6

Πράγματι αν $A_1A_2\ldots A_{\nu+1}\ldots A_{2\nu}$ (σχήμα 6) είναι η στάνη σχήματος κανονικού πολυγώνου με 2ν πλευρές και το σχοινί είναι δεμένο στο σημείο A_1 του φράκτη τότε η εξωτερική γωνία φ του πολυγώνου είναι $\frac{2\pi}{2\nu}=\frac{\pi}{\nu}$, και το πρόβατο μπορεί να κινηθεί

εντός του τομέα $BA_1Γ$ γωνίας $π + φ$ και ακτίνας $A_1B = s$.
Μπορεί επίσης να κινηθεί:

εντός δύο ίσων τομέων $BA_2Δ$, $ΓA_{2ν}E$ γωνίας $φ$ και ακτίνας $A_2Δ = \frac{ν-1}{ν}\cdot s$,

εντός δύο ίσων τομέων γωνίας $φ$ και ακτίνας $\frac{ν-2}{ν}\cdot s$ κ.ο.κ.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E_{2ν} = \frac{π+φ}{2π}πs^2 + 2\sum_{κ=1}^{ν-1}\frac{φ}{2π}π\left(\frac{ν-κ}{ν}s\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2ν}\right)πs^2 + \frac{πs^2}{ν^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(ν-1)^2\right]$$

(είναι γνωστός ο τύπος $1^2+2^2+\ldots+κ^2 = \frac{κ(κ+1)(2κ+1)}{6}$)

$$= \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2ν}+\frac{(ν-1)(2ν-1)}{6ν^2}\right]πs^2$$

$$= \frac{5ν^2+1}{6ν^2}πs^2.$$

Ο τύπος δίνει το σωστό αποτέλεσμα ακόμα και στην περίπτωση κανονικού πολυγώνου με περιττό πλήθος πλευρών.

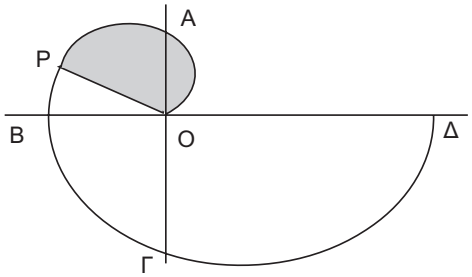
Π.χ. για ισόπλευρο τρίγωνο θέτουμε $ν = \frac{3}{2}$ και βρίσκουμε $E_3 = \frac{49}{54}πs^2$.

(Το γεγονός αυτό το αφήνουμε ως άσκηση)

Επομένως η ζητούμενη περιοχή για την περίπτωση της κυκλικής στάνης είναι: $E = \lim_{ν\to\infty} E_{2ν} = \frac{5}{6}πs^2$, ένα αποτέλεσμα που δεν μπόρεσαν να μας δώσουν, τουλάχιστον με αυτή την απλότητα, τα ανώτερα μαθηματικά.

5) Παραλλαγή.

Στο **Περί Ελίκων** ο Αρχιμήδης βρίσκει το εμβαδόν μιάς περιστροφής της έλικας, δηλαδή, με σύγχρονη ορολογία, της καμπύλης $ρ = cθ$ σε πολικές συντεταγμένες (Σχήμα 7), όπου c σταθερά.



Σχήμα 7

(Στο **Περί Ελίκων** η σταθερά c είναι 1, αλλά τα μαθηματικά δεν αλλάζουν για την γενικότερη περίπτωση που χρειαζόμαστε εδώ).

Συγκεκριμένα δείχνει ότι το εμβαδόν ΟΑΡΒΓΔ ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του κύκλου ακτίνας ΟΔ (**Περί Ελίκων**, πρότασις 24).

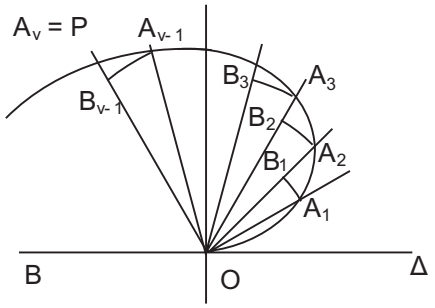
Ωστόσο με μία τετριμμένη παραλλαγή της μεθόδου του, μπορούμε να δείξουμε, γενικότερα, ότι το εμβαδόν ΟΑΡΟ ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού τομέα γωνίας ΔΟΡ σε κύκλο ακτίνας ΟΡ.

(Παρακάτω θα κάνουμε χρήση μόνο της περίπτωσης που το Ρ είναι συμπίπτει με το Β, οπότε ο εν λόγω τομέας είναι ημικύκλιο).

Η μέθοδος του Αρχιμήδη είναι να προσεγγίσει το χωρίο που καταλαμβάνει η έλιξ, με κυκλικούς τομείς.

Περιληπτικά, η μέθοδός του είναι ουσιαστικά η εξής:

Έστω $\widehat{POΔ} = \theta_o$.
Φέρουμε διαδοχικές ημιευθείες OA_1, OA_2, …, OA_v σχηματίζοντας γωνία $\frac{1}{v}\theta_o$ μεταξύ τους (σχήμα 8), οπότε είναι $\widehat{ΔOA_κ} = \frac{κ}{v}\theta_o$ $(1 \le κ \le v)$.



Σχήμα 8

Επειδή η έλιξ είναι εξ ορισμού η καμπύλη ρ = cθ, έχουμε ότι $OA_κ = c\frac{κ}{v}\theta_o$ και, ειδικά, $OP = c\theta_o$.

Σχηματίζουμε τώρα τους τομείς $OA_κB_κ$ $(1 \le κ \le v)$, που φυσικά έχουν εμβαδόν:

$$(OA_κB_κ) = \frac{1}{2}(OA_κ)^2 \cdot \frac{1}{v}\theta_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2κ^2}{v^3}\theta_o^3 .$$

Το συνολικό εμβαδόν E_v των τομέων προσεγγίζει, καθώς το v τείνει στο άπειρο, το ζητούμενο εμβαδόν της έλικας.

Έχουμε:

$$E_v = \frac{1}{2} \cdot \sum_{κ=1}^{v-1} \frac{c^2κ^2}{v^3}\theta_o^3 = \frac{c^2\theta_o^3}{2v^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + (v-1)^2).$$

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \ldots + (v-1)^2$ που είδαμε στην στοιχειώδη μέθοδο αντιμετώπισης του προβλήματος του προβάτου.

Στο **Περί Ελίκων** η διαδικασία (με σύγχρονα σύμβολα) που ακολουθείται κατόπιν είναι ουσιαστικά η εξής:

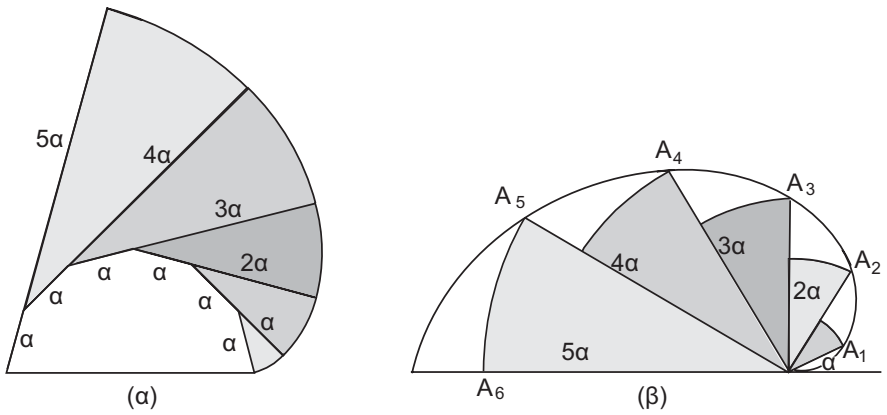
Αφού, $E_v = \frac{c^2\theta_o^3}{2v^3} \cdot \frac{1}{6}(v-1)v(2v-1)$, έχουμε

$$E = \lim_{v\to\infty} E_v = \frac{c^2\theta_o^3}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(c\theta_o)^2\,\theta_o = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}OP^2\cdot\theta_o$$

δηλαδή το εμβαδόν Ε ισούται με το $\frac{1}{3}$ του τομέα ακτίνας ΟΡ και γωνίας θ_o, όπως εζητείτο.

Παρατηρούμε ότι οι προσδιορισμοί των δύο διαφορετικών εμβαδών που εμφανίστηκαν εδώ, έχουν ουσιαστικές ομοιότητες. Στα μαθηματικά όμως υπάρχει ένας άγραφος κανόνας που λέι ότι:
"Αν δύο τεχνικές απόδειξης, σε διαφορετικά δεδομένα, μιμούνται η μία την άλλη, τότε υπάρχει βαθύτερη αιτία που τις συνδέει, και την οποία αιτία οφείλει να αναζητήσει ο μαθηματικός."

Πραγματικά, θα δούμε ότι οι τομείς που εμφανίστηκαν στον προσδιορισμό του εμβαδού της περιοχής κίνησης του προβάτου είναι ακριβώς οι ίδιοι με τους τομείς στην εύρεση του εμβαδού τομέα της έλικας.



Σχήμα 9

Στο Σχήμα 9 έχουμε ένα κανονικό $2v$-γωνο πλευράς $\alpha = \frac{s}{v}$ και την έλικα $\rho = c\theta$.

Στο συγκεκριμένο σχήμα έχουμε πάρει ν = 6, αλλά ο συλλογισμός επεκτείνεται για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Επίσης το c έχει επιλεγεί ώστε να είναι $OA_1 = \alpha$ (δηλαδή $c = \frac{s}{\pi}$ που σημαίνει ίση με την ακτίνα του κύκλου της στάνης).

Οι γωνίες των τομέων είναι, και στις δύο περιπτώσεις $\frac{\pi}{\nu}$ ενώ οι ακτίνες τους είναι α, 2α, 3α, … , (ν – 1)α αντίστοιχα.

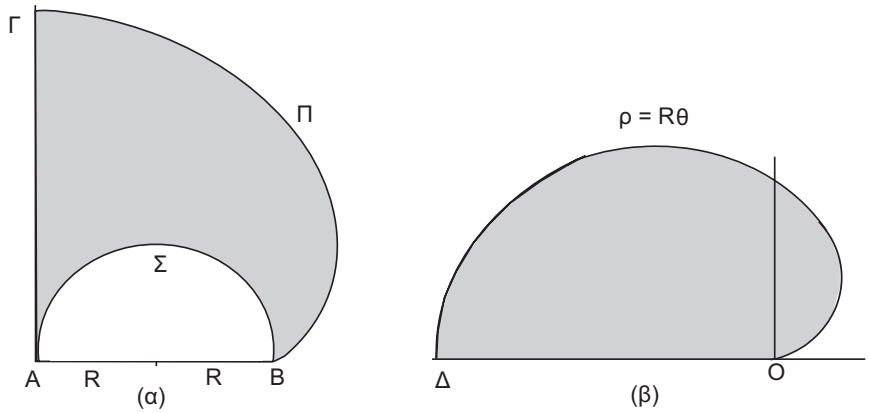
Παρατηρούμε ότι οι ν – 1 τομείς των δύο σχημάτων είναι, αντίστοιχα, οι ίδιοι.

Συμπεραίνουμε ότι, αν γνωρίζουμε την μέθοδο υπολογισμού του εμβαδού της έλικας του Αρχιμήδη, δεν υπάρχει λόγος να κάνουμε εκ νέου τους υπολογισμούς. Είναι απλούστερο να κάνουμε αναγωγή στα γνωστά.

Για να συνοψίσουμε, παίρνοντας όριο καθώς $\nu \to \infty$, εύκολα αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα για την περιοχή κίνησης του προβάτου, που τόσο μας δυσκόλεψε παραπάνω:

Θεώρημα:

Η περιοχή ΑΓΠΒΣΑ (Σχήματα 3 και 10α) στην περίπτωση κυκλικής στάνης ακτίνας R, ισούται με το εμβαδό που περικλείει μισή περιφορά της έλικας ρ = Rθ (Σχήμα 10β) που με τη σειρά του ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ΟΔ.



Σχήμα 10

6) Επίλογος.

Ας έρθουμε σε μία ερμηνεία του φαινομένου όπου η στοιχειώδης αντιμετώπιση του
προβλήματος εύρεσης εμβαδού αποδείχθηκε απλούστερη από άλλες με χρήση καλύτερων εργαλείων.

Ο προσδιορισμός ενός εμβαδού γίνεται συνήθως με τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος. Το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι ορισμένο, δηλαδή της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, ενώ συνήθως η μέθοδος υπολογισμού του γίνεται με την εύρεση της αντίστοιχης αντιπαραγώγου. Με άλλα λόγια, βρίσκουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ κάνοντας χρήση του Θεμελιώδους Θεωρήματος (Θ.Θ.) του Απειροστικού Λογισμού.

Το τελευταίο, που οφείλεται στους Νεύτωνα και Leibnitz, είναι ένα πολύ ισχυρό και καθολικό εργαλείο υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Αντιθέτως, πριν από την ανακάλυψη του Θ.Θ., ο προσδιορισμός του εμβαδού μιάς καμπύλης γινόταν με ειδικά τεχνάσματα, διαφορετικά από καμπύλη σε καμπύλη, που απαιτούσαν διαμερίσεις σε "μικρά τμήματα", εύρεση ενός αθροίσματος σε κλειστή μορφή και λήψη ορίου: ουσιαστικά, δηλαδή, υπολογισμός ενός ολοκληρώματος μέσω του ορίου των αντίστοιχων αθροισμάτων Riemann. Παραδείγματος χάριν οι μέθοδοι του Αρχιμήδη εύρεσης του εμβαδού της έλικας ή ορισμένων άλλων καμπυλών, ήσαν ακριβώς τέτοιες μέθοδοι.

Από την άλλη, αυτό αποδεικνύεται και ο περιορισμός της διαδικασίας, λόγω της έλλειψης καθολικότητας και λόγω των δυσκολιών που υπεισέρχονται μόλις οι καμπύλες γίνουν πιο πολύπλοκες. Λόγου χάριν, ο Αρχιμήδης γνώριζε το εμβαδόν κάτω από την $y = x^2$, όχι όμως της $y = x^3$ ή, γενικότερα, της $y = x^n$ που για εμάς σήμερα, λόγω του Θ.Θ., δεν παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία από την πρώτη. Επίσης ο ίδιος γνώριζε το εμβαδόν επιφανείας σφαίρας που (με σύγχρονη ορολογία) απαιτεί το $\int \eta\mu x dx$, αλλά χρησιμοποίησε ευφυέστατα τεχνάσματα για να υπολογίσει το αντίστοιχο "άθροισμα Riemann" $\sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \eta\mu\frac{\kappa\pi}{\nu}$ που το προσεγγίζει. Σήμερα, με το Θ.Θ., το ίδιο ολοκλήρωμα είναι απλή υπόθεση αφού έχει αντιπαράγωγο $-\sigma\upsilon\nu x$.

Από την άλλη, δεν πρέπει να βγάλει κανείς το συμπέρασμα ότι οι καθολικές μέθοδοι είναι η πανάκεια που αντιμετωπίζει όλες τις καταστάσεις.

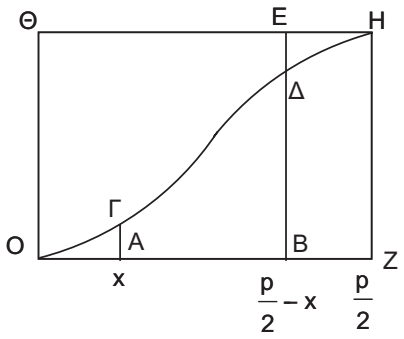
Για τα εμβαδά που μας ενδιαφέρουν εδώ, θα δούμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου, για τον προσδιορισμό τους, δηλαδή ουσιαστικά για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, **δεν απαιτείται** η εύρεση του αντίστοιχου αορίστου ολοκληρώματος $\int f(x)dx$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος θέλει να βρεί το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη:

$$y = \eta\mu^2 x \text{ στο } \left[\mathbf{0}, \frac{\pi}{2}\right]$$

αλλά δεν μπορεί να υπολογίσει το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^2 x dx$.



Σχήμα 11

Παρ' όλα αυτά, θα δούμε, ότι μπορεί να προσδιορίσει το ζητούμενο εμβαδόν, δηλαδή ουσιαστικά να υπολογίσει

το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$.

Πράγματι το γράφημα της $y = \eta\mu^2 x$ στο $\left[\mathbf{0}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι μία καμπύλη όπως στο Σχήμα 11. Αν το Α έχει τετμημένη x και το Β απέχει από το Ζ όσο το Α από το Ο (δηλαδή η τετμημένη του Β είναι $\frac{\pi}{2} - x$), τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι ΑΓ = ΔΕ

(είναι ΑΓ = $\eta\mu^2 x$, ενώ ΔΕ = ΒΕ–ΒΔ = $1 - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x$).

Από αυτό εξετάζοντας όλες τις δυνατές θέσεις του Α, είναι απλό να διαπιστωθεί ότι το χωρίο ΟΖΗΔΓΟ είναι ίσο με το ΟΓΔΗΘΟ.

Προφανώς λοιπόν το ζητούμενο χωρίο ΟΖΗΔΓΟ είναι το $\frac{1}{2}$ του παραλληλογράμμου ΟΖΗΘ, και άρα ισούται με $\frac{1}{2}$ ΟΖ·ΟΘ = $\frac{\pi}{4}$.

Συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\frac{\pi}{4}$ και, συγχρόνως, βρίσκουμε $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx = \frac{\pi}{4}$, χωρίς χρήση αντιπαραγώγου.

Ίσως το παράδειγμα είναι απλό, αλλά να δύο λίγο πιο δύσκολα τα οποία δίνουν και ιδέες για να κατασκευάσει κανείς όσο δύσκολα παραδείγματα επιθυμεί.

Άσκηση:

Να βρεθούν τα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες:

α) $y = \ln(1 + \varepsilon\varphi x)$ στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ **β) $y = \frac{x^2}{1+e^x}$ στο [–1, 1]**

Υπόδειξη:

α) Αν $f(x) = \ln(1 + \varepsilon\varphi x)$ τότε:

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1 - \varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi x}\right)$$

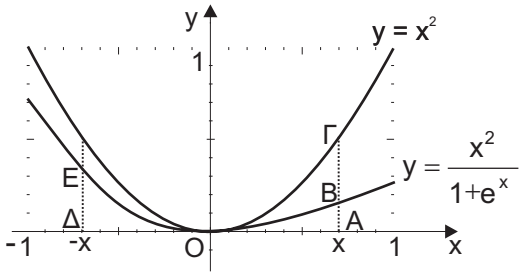
$$= \ln\frac{2}{1+\varepsilon\varphi x} = \ln 2 - f(x)$$

Εύκολα αποδεικνύεται τώρα ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\frac{1}{2}$ του ορθογωνίου πλευρών $\frac{\pi}{4}$ και ln2.

Η απάντηση στο πρόβλημα είναι $\frac{1}{8}\pi\cdot\ln 2$.

β) Σχεδιάζουμε τα γραφήματα της: $f(x) = \frac{x^2}{1+e^x}$ και της $f(x) = x^2$ (σχήμα 12).

Αν το Α έχει τετμημένη x και το Δ είναι το συμμετρικό του ως προς Ο, τότε έχουμε:



Σχήμα 12

$$AB + \Delta E = f(x) + f(-x) = \frac{x^2}{1+e^x} + \frac{x^2 e^x}{1+e^x} = x^2 = A\Gamma.$$

Συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με το εμβαδόν κάτω από την $y = x^2$ στο [0, 1]. Το τελευταίο που ήταν γνωστό στον Αρχιμήδη, ισούται με $\frac{1}{3}$).

Ας επανέλθουμε στο θέμα μας: Το πρόβλημα που εμφανίζεται στα παραδείγματα των εμβαδών $\eta\mu^2 x$, $\ln(1 + \varepsilon\varphi x)$, $\frac{x^2}{1+e^x}$ είναι μικρογραφία της περίπτωσης του αρχικού εμβαδού. Εκεί η εύρεση του ολοκληρώματος ήταν επίπονη, πλήν όμως η κατάλληλη διαμέριση του χωρίου που το προσεγγίζει ως άθροισμα Riemann είναι απλή, και συγκρίσιμη με άλλο γνωστό χωρίο. ■

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ Σ.Ε.

(1) Μπορείτε να δείτε παράδειγμα παρόμοιου υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος (με τη βοήθεια εμβαδών) στο βιβλίο **ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ του Θ. Καζαντζή, εκδ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ**, σελ. 59 (Υπολογισμός του $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\varepsilon\varphi^{\sqrt{2}}x}$).

(2) Με ορολογία του Ολοκληρωτικού Λογισμού θα λέγαμε, ισοδύναμα, ότι ο υπολογισμός του $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\varepsilon\varphi x)\,dx$ μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του τύπου:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx \qquad \textbf{(1)}$$

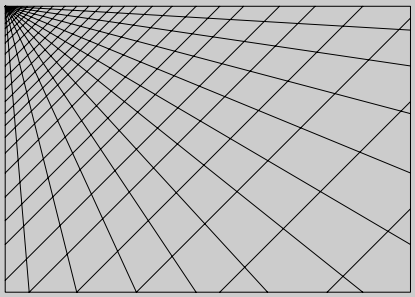
(βλέπε: **ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ, Θ. Καζαντζή,** σελ. 191),

οπότε: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\ln(1+\varepsilon\varphi x)}_{f(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - f(x))\,dx \Rightarrow$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 \quad \text{άρα} \quad I = \frac{\pi}{8}\ln 2\,.$$

Αντίστοιχα, ο υπολογισμός του $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^x}\,dx$, μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του τύπου: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx$, που είναι ειδική περίπτωση του τύπου (1) και της σχέσης: $f(x) + f(-x) = x^2$, όπου $f(x) = \frac{x^2}{1+e^x}$,

άρα: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(-x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx \Rightarrow 2I = \frac{2}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{3}$.



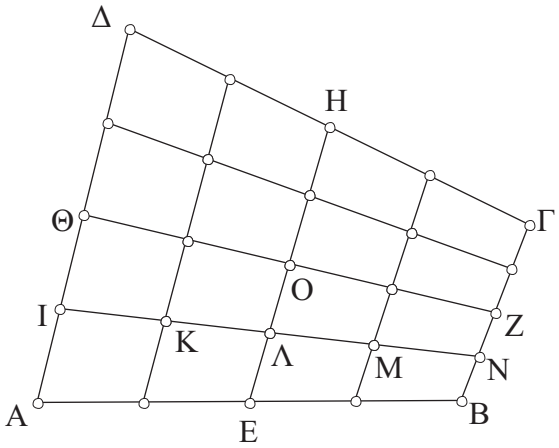
ΠΛΕΓΜΑΤΑ

Νίκος Ιωσηφίδης
Μαθηματικός, Βέροια

Ιστορικό

Παρουσιάζουμε παρακάτω ένα σημαντικό θεώρημα με πολλές εφαρμογές. Στην «ανακάλυψη» του θεωρήματος μας οδήγησε τυχαία μια οπτική παρατήρηση.

Συνδέουμε τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Το τετράπλευρο χωρίζεται έτσι σε 4 τετράπλευρα. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα 4 νέα τετράπλευρα. Δημιουργείται έτσι το παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε (οπτικά) ότι τα σημεία Ι, Κ, Λ, Μ, Ν είναι συνευθειακά. Γνωρίζουμε ότι τα ευθ. τμήματα που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών τετραπλεύρου διχοτομούνται. Έτσι ισχύει: ΙΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ. Δηλαδή αν διαιρέσουμε τις πλευρές ενός τετραπλεύρου σε 4 ίσα μέρη και συνδέσουμε τα αντίστοιχα σημεία, τα ευθ. τμήματα που συνδέουν τα σημεία των διαιρέσεων διαιρούνται σε 4 ίσα μέρη.

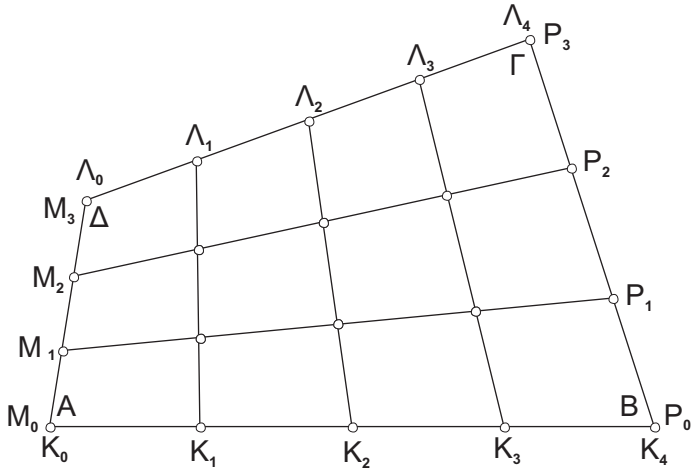
Η πρόταση αυτή που αποτελεί τη βάση για την παρακάτω εργασία ισχύει γενικότερα. Η εργασία αυτή ασχολείται με την παραπάνω πρόταση στην γενική της μορφή και τις πάμπολλες εφαρμογές της. Εδώ περιοριστήκαμε στις πιο βασικές από αυτές.

Έστω το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 1).[1] Διαιρούμε τις απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ σε 4 ίσα μέρη με τα σημεία $K_0 \equiv A$, K_1, K_2, K_3, $K_4 \equiv B$ της ΑΒ και $\Lambda_0 \equiv \Delta$, Λ_1, Λ_2, Λ_3, $\Lambda_4 \equiv \Gamma$ της ΔΓ.

Διαιρούμε επίσης τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ σε 3 ίσα μέρη με τα σημεία $M_0 \equiv A$, M_1, M_2, $M_3 \equiv \Delta$ της ΑΔ και $P_0 \equiv B$, P_1, P_2, $P_3 \equiv \Gamma$ της ΒΓ.
Ενώνουμε τα αντίστοιχα σημεία, δηλαδή φέρνουμε τα ευθ. τμήματα $K_1\Lambda_1$, $K_2\Lambda_2$, $K_3\Lambda_3$, M_1P_1, M_2P_2.

Το σύνολο όλων αυτών των ευθ. τμημάτων και των πλευρών του τετραπλεύρου λέγεται πλέγμα 4×3 ή πλέγμα 3×4.

Εντελώς όμοια ορίζεται το πλέγμα ν×κ ή κ×ν. Δηλαδή:

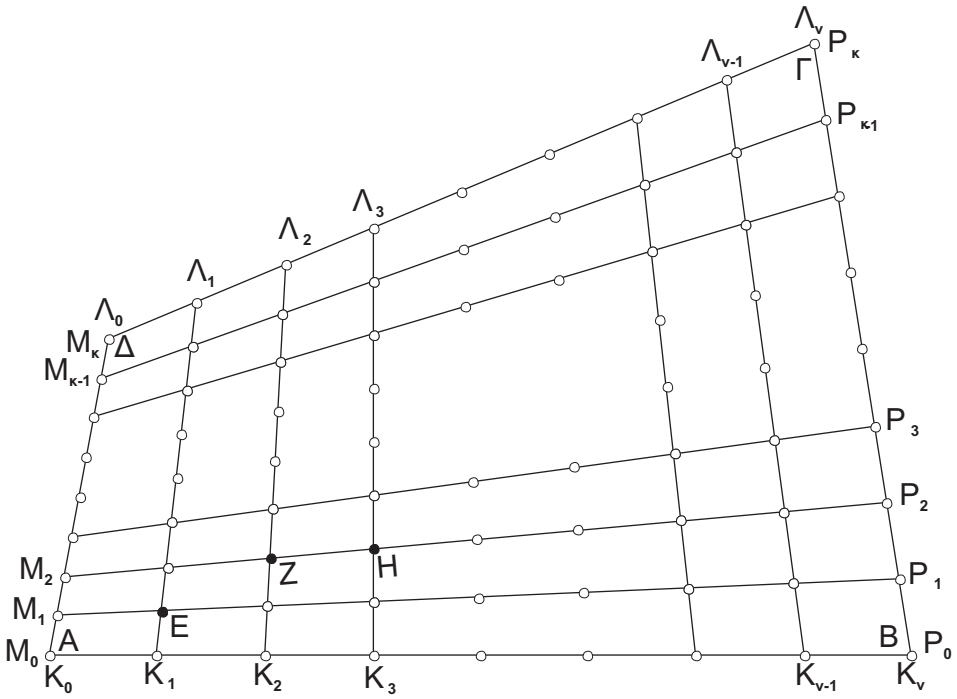


Σχήμα 1

Ορισμοί:

1) Διαιρούμε τις δύο απέναντι πλευρές τετραπλεύρου σε ν ίσα μέρη και τις άλλες δύο σε κ ίσα μέρη και ενώνουμε τα αντίστοιχα σημεία διαίρεσης. Το σύνολο όλων αυτών των ευθ. τμημάτων και των πλευρών του τετραπλεύρου λέγεται **πλέγμα ν×κ** ή **πλέγμα κ×ν** (σχ 2).

[1] Αν και κάποιες προτάσεις που ακολουθούν ισχύουν και σε μη κυρτά τετράπλευρα, εδώ θα αναφερόμαστε μόνο σε κυρτά και η λέξη «κυρτά» θα παραλείπεται.



Σχήμα 2

Στον παραπάνω ορισμό εννοείται ότι η διαίρεση των πλευρών θα γίνεται έτσι ώστε τα αντίστοιχα σημεία των απέναντι πλευρών να είναι τα πλησιέστερα προς την ίδια πλευρά. Π.χ τα K_1, $Λ_1$ είναι τα πλησιέστερα σημεία στην πλευρά ΑΔ και τα M_1, P_1 είναι τα πλησιέστερα σημεία στην πλευρά ΑΒ.

2) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ από το οποίο δημιουργήθηκε το πλέγμα, λέγεται **πλαίσιο** του πλέγματος.

3) Τα ευθ. τμήματα που συνδέουν τα αντίστοιχα σημεία των διαιρέσεων (συμπεριλαμβανομένων και των πλευρών του πλαισίου) λέγονται **γραμμές** του πλέγματος.
Είναι φανερό ότι σ' ένα πλέγμα ν×κ υπάρχουν:

$$(ν+1)+(κ+1) = \mathbf{ν+κ+2\ γραμμές}.$$

4) Οι γραμμές του πλέγματος που συνδέουν το ένα ζεύγος απέναντι πλευρών του πλαισίου (συμπεριλαμβανομένων και των πλευρών του πλαισίου) λέγονται **οριζόντιες** και οι άλλες γραμμές λέγονται **κατακόρυφες**.

Έτσι στο πλέγμα του σχ 2 οριζόντιες είναι οι $M_0P_0 \equiv AB$, M_1P_1, M_2P_2, ..., $M_\kappa P_\kappa \equiv \Delta\Gamma$ και κατακόρυφες οι $K_0\Lambda_0 \equiv A\Delta$, $K_1\Lambda_1$, $K_2\Lambda_2$, ..., $K_\nu\Lambda_\nu \equiv B\Gamma$ ή αντίστροφα, οι πρώτες είναι οι κατακόρυφες γραμμές και οι δεύτερες είναι οι οριζόντιες.
Με το σύμβολο **ΑΒΓΔ(ν×κ)** θα ονομάζουμε οριζόντια την ΑΒ και κατακόρυφη την ΑΔ.

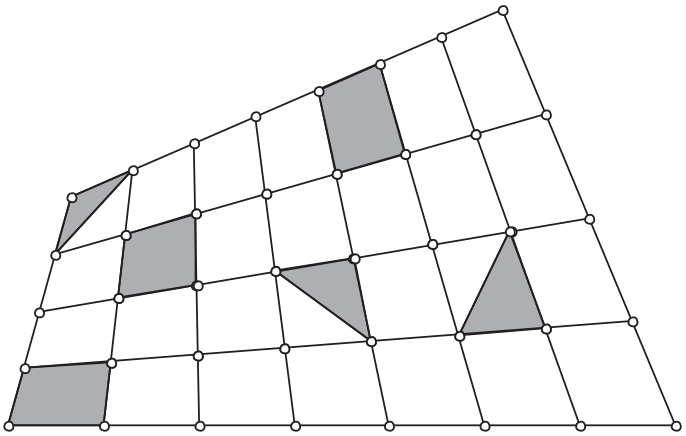
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Αφού οι οριζόντιες γραμμές μπορούν να θεωρηθούν κατακόρυφες (οπότε οι κατακόρυφες θεωρούνται οριζόντιες), κάθε πρόταση που αφορά τις οριζόντιες γραμμές ενός πλέγματος θα ισχύει και για τις κατακόρυφες.

5) Οι οριζόντιες γραμμές θα ονομάζονται **σχεδόν παράλληλες**. Το ίδιο και οι κατακόρυφες γραμμές. Για να δηλώσουμε π.χ ότι οι γραμμές M_1P_1 και M_2P_2 είναι σχεδόν παράλληλες θα γράφουμε **M_1P_1/σχ/M_2P_2**.

6) Τα σημεία τομής των οριζοντίων με τις κατακόρυφες γραμμές ενός πλέγματος ονομάζονται **κόμβοι** του πλέγματος.
Έτσι στο σχ. 2 κόμβοι του πλέγματος είναι τα σημεία Ε, Ζ, Η, αλλά και τα Α, Β, Γ, Δ.

7) Κάθε τετράπλευρο που περιορίζεται μεταξύ δύο διαδοχικών οριζοντίων γραμμών και δύο διαδοχικών κατακόρυφων γραμμών ενός πλέγματος λέγεται **στοιχειώδες τετράπλευρο**.

Έτσι στο σχ. 3 τα σκιασμένα τετράπλευρα είναι στοιχειώδη. Με τη συντομογραφία **στ4** θα εννοούμε στοιχειώδες τετράπλευρο.

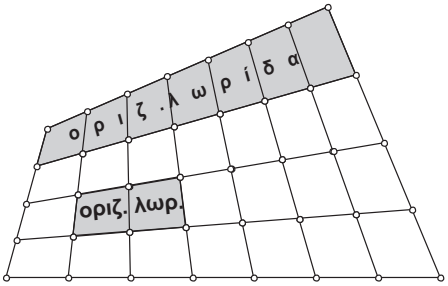


Σχήμα 3

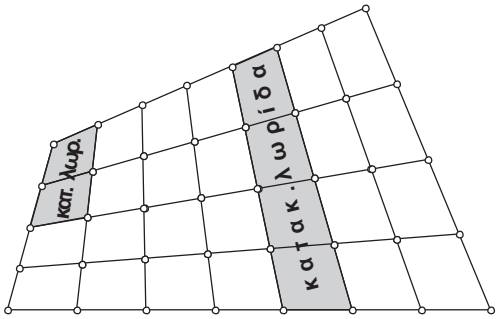
Είναι φανερό ότι σε κάθε πλέγμα ν×κ υπάρχουν ν·κ στοιχειώδη τετράπλευρα.

8) Μία διαγώνιος στ4 διαιρεί το στ4 σε δύο τρίγωνα. Καθένα από τα τρίγωνα αυτά λέγεται **στοιχειώδες τρίγωνο**.
Έτσι στο σχ. 3 τα σκιασμένα τρίγωνα είναι στοιχειώδη τρίγωνα.
Με τη συντομογραφία **στ3** θα εννοούμε στοιχειώδες τρίγωνο.

9) Κάθε πλέγμα ρ×1 λέγεται **λωρίδα**.
Έτσι στα σχ. 4 και 5 τα σκιασμένα πλέγματα είναι λωρίδες.
Μία λωρίδα ρ×1 θα ονομάζεται ρ-λωρίδα.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

10) Στο πλέγμα ΑΒΓΔ(ν×κ) οι κ λωρίδες που περιέχονται μεταξύ οριζοντίων γραμμών λέγονται **οριζόντιες λωρίδες** και οι ν λωρίδες που περιέχονται μεταξύ κατακόρυφων γραμμών λέγονται **κατακόρυφες λωρίδες**.

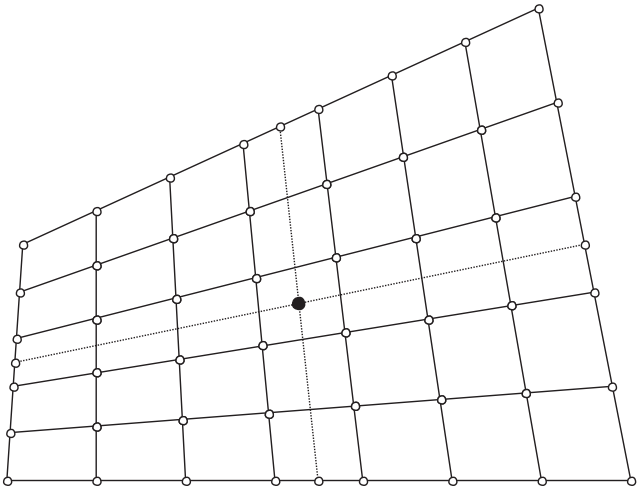
Στα παρακάτω, η συντομογραφία **ορ.λ** θα σημαίνει οριζόντια λωρίδα και η συντομογραφία **κατ.λ** θα σημαίνει κατακόρυφη λωρίδα.

Είναι φανερό ότι αν ο ν είναι περιττός στο πλέγμα ΑΒΓΔ(ν×κ) υπάρχει κεντρική κατ.λ, ενώ αν ο ν είναι άρτιος υπάρχουν δύο κεντρικές κατ.λ. Το ίδιο ισχύει και για τις ορ.λ.
Όταν λοιπόν οι ν και κ είναι περιττοί (ισοδύναμα ν·κ = περιττός) υπάρχει κεντρικό στ4 που είναι η τομή των δύο κεντρικών λωρίδων.

11) **Κέντρο** ενός πλέγματος λέγεται το σημείο τομής των ευθ. τμημάτων που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του πλαισίου του.

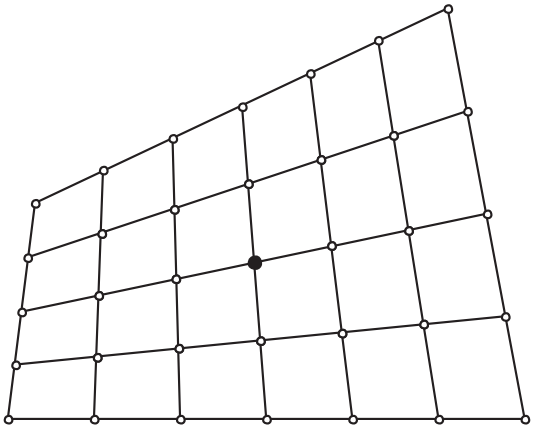
Είναι φανερό ότι:

- αν ν, κ περιττοί, το κέντρο του πλέγματος είναι εσωτερικό σημείο του κεντρικού στ4. (σχ. 6)



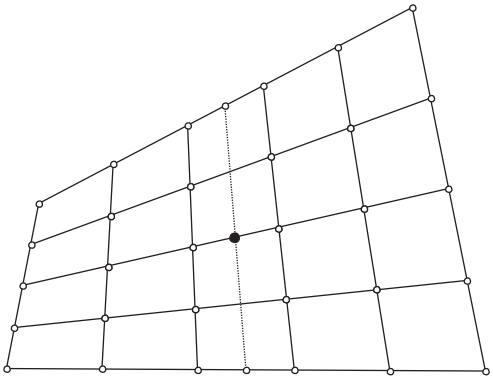
Σχήμα 6

- Αν ν, κ άρτιοι, το κέντρο ταυτίζεται με έναν κόμβο. (σχ. 7)



Σχήμα 7

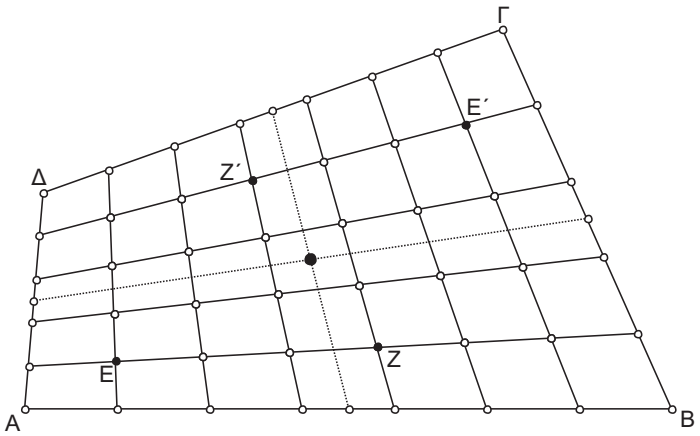
- Αν ν = άρτιος και κ = περιττός ή αντίστροφα, το κέντρο του πλέγματος βρίσκεται σε μια γραμμή του πλέγματος, δεν είναι όμως κόμβος. (σχ. 8)



Σχήμα 8

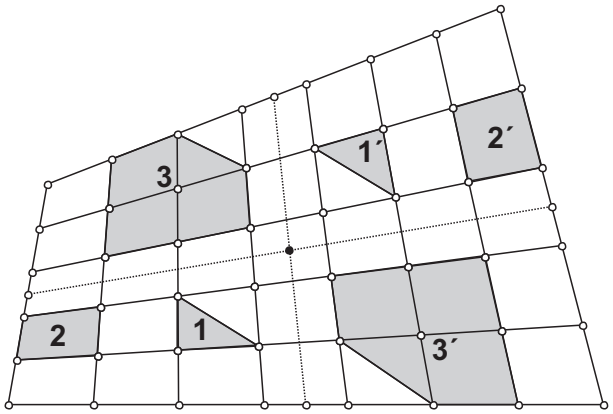
12) Δύο κόμβοι ενός πλέγματος λέγονται **συμμετρικοί** όταν κατέχουν συμμετρικές θέσεις ως προς το κέντρο του πλέγματος.

Εδώ δηλαδή ο όρος «συμμετρικοί» δεν επέχει τη γνωστή αυστηρή έννοια του όρου. Η χρησιμοποίηση όμως του όρου δεν θα επιφέρει καμία σύγχυση στη θεωρία που ακολουθεί.
Έτσι στο πλέγμα του σχ. 9, συμμετρικά ζεύγη κόμβων είναι τα (Ε, Ε΄), (Ζ, Ζ΄), (Α, Γ), (Β, Δ).



Σχήμα 9

Δύο πολύγωνα που έχουν ως κορυφές συμμετρικούς κόμβους λέγονται **συμμετρικά**.
Έτσι στο σχ. 10, συμμετρικά είναι τα στ3 1 και 1΄, τα στ4 2 και 2΄ καθώς και τα γραμμοσκιασμένα πεντάγωνα 3 και 3΄.



Σχήμα 10

Στα επόμενα όταν λέμε συμμετρικοί κόμβοι ή συμμετρικά πολύγωνα θα παραλείπουμε να λέμε ως προς το κέντρο του πλέγματος.

Για την απόδειξη των προτάσεων που ακολουθούν θα αποδείξουμε πρώτα κάποιες άλλες βοηθητικές προτάσεις που θα αναφέρονται ως λήμματα και συντομογραφικά ως **Λ**. Οι προτάσεις στα πλέγματα θα αναφέρονται συντομογραφικά ως **Π**.

Λ1. (Βασική πρόταση)

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, ώστε:

$$\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{EB}} = \frac{\mathbf{\Delta H}}{\mathbf{H\Gamma}} = \lambda \text{ και } \frac{\mathbf{A\Theta}}{\mathbf{\Theta\Delta}} = \frac{\mathbf{BZ}}{\mathbf{Z\Gamma}} = \mu .$$

Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΕΗ και ΘΖ, τότε:

$$\frac{\mathbf{\Theta K}}{\mathbf{KZ}} = \lambda \text{ και } \frac{\mathbf{EK}}{\mathbf{KH}} = \mu .$$

Απόδειξη:

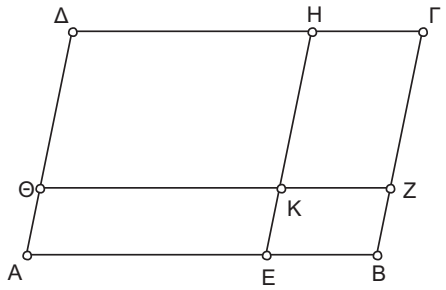
Διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

α) ΑΒ//ΔΓ και ΑΔ//ΒΓ (σχ 11)

Είναι φανερό ότι:
ΘΚ = ΑΕ, ΚΖ = ΕΒ, ΕΚ = ΑΘ, ΚΗ = ΘΔ,

άρα: $\frac{\Theta K}{KZ} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{\Theta K}{KZ} = \lambda$

και $\frac{EK}{KH} = \frac{A\Theta}{\Theta\Delta} \Rightarrow \frac{EK}{KH} = \mu$



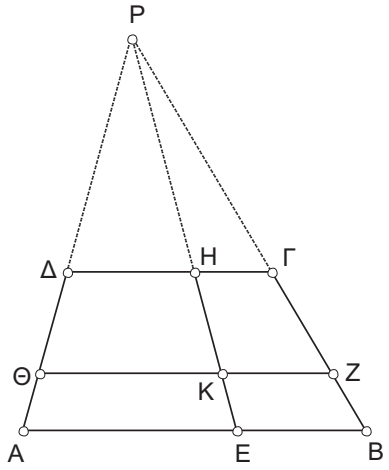
Σχήμα 11

β) ΑΒ//ΔΓ ενώ $A\Delta \not\parallel B\Gamma$ (σχ. 12) δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Επειδή ΑΒ//ΔΓ και $\frac{AE}{EB} = \frac{\Delta H}{H\Gamma}$, οι ευθείες ΑΔ, ΕΗ και ΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο Ρ (κεντρική δέσμη ευθειών).

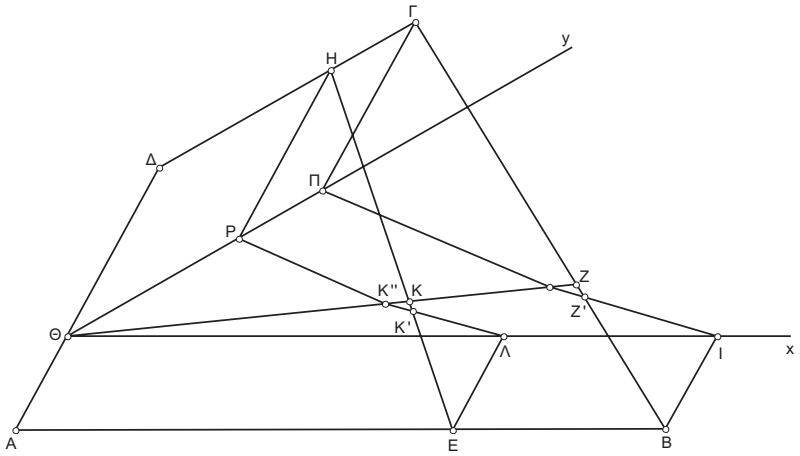
Είναι επίσης ΘΖ//ΑΒ διότι,

$\frac{A\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$. Άρα $\frac{\Theta K}{KZ} = \frac{AE}{EB} = \lambda$



Σχήμα 12

γ) ΑΒ ∦ ΔΓ και ΑΔ ∦ ΒΓ (σχ. 13)



Σχήμα 13

Φέρνουμε από το Θ τις ημιευθείες Θχ//ΑΒ και Θψ//ΔΓ.
Φέρνουμε ακόμη τις ΒΙ//ΑΔ, ΕΛ//ΑΔ, ΓΠ//ΑΔ, ΗΡ//ΑΔ
(Ι, Λ∈Θχ, Π, Ρ∈Θψ) και τις ΙΠ και ΛΡ.

Έστω $I\Pi \cap B\Gamma = Z'$, $\Lambda P \cap EH = K'$ και $\Lambda P \cap \Theta Z = K''$.

Θα αποδείξουμε ότι $Z' \equiv Z$ και $K' \equiv K'' \equiv K$.

Πράγματι, επειδή ΒΙ//ΓΠ, τα τρίγωνα ΒΙΖ΄ και ΓΠΖ΄ είναι όμοια,

άρα $\frac{BZ'}{Z'\Gamma} = \frac{BI}{\Gamma\Pi}$

Όμως ΒΙ = ΑΘ και ΓΠ = ΘΔ άρα $\frac{BZ'}{Z'\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Delta} = \mu$ και επειδή $\frac{BZ}{Z\Gamma} = \mu$,

δηλαδή: $\frac{BZ}{Z\Gamma} = \frac{BZ'}{Z'\Gamma} \Rightarrow Z' \equiv Z$

Τώρα από τα όμοια τρίγωνα ΒΙΖ και ΓΠΖ: $\frac{IZ}{Z\Pi} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = \mu$ (1)

Είναι επίσης: $\frac{\Theta\Lambda}{\Lambda I} = \frac{AE}{EB} = \lambda$ και $\frac{\Theta P}{P\Pi} = \frac{\Delta H}{H\Gamma} = \lambda$ άρα $\frac{\Theta\Lambda}{\Lambda I} = \frac{\Theta P}{P\Pi} \Rightarrow P\Lambda // \Pi I$

Από την κεντρική δέσμη των ευθειών Θχ, ΘΖ και Θψ έχουμε:

$$\frac{\Lambda K''}{K''P} = \frac{IZ}{Z\Pi} \overset{(1)}{=} \mu \quad (2)$$

Επίσης, επειδή ΕΛ//ΗΡ, από τα όμοια τρίγωνα ΕΛΚ΄ και ΗΡΚ΄

έχουμε: $\frac{\Lambda K'}{K'P} = \frac{EK'}{K'H} = \frac{E\Lambda}{HP}$

Όμως ΕΛ = ΑΘ και ΗΡ = ΘΔ άρα $\frac{ΛK'}{K'P}=\frac{EK'}{K'H}=\frac{AΘ}{ΘΔ}=μ$ (3)

Από τις (2) και (3) προκύπτει: $\frac{ΛK'}{K'P}=\frac{ΛK''}{K''P}\Rightarrow K'\equiv K''$ άρα $K'\equiv K''\equiv K$,

οπότε από την (3) έχουμε $\frac{EK}{KH}=μ$. Όμοια: $\frac{ΘK}{KZ}=λ$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το λήμμα μπορεί να πάρει και την εξής μορφή:

Αν $\frac{AE}{AB}=\frac{ΔH}{ΔΓ}=λ$ και $\frac{AΘ}{AΔ}=\frac{BZ}{BΓ}=μ$ τότε: $\frac{ΘK}{ΘZ}=λ$ και $\frac{EK}{EH}=μ$.

2η απόδειξη (Διανυσματική)

Δίνουμε εδώ μια άλλη απόδειξη που δεν έχει την ανάγκη της διάκρισης των περιπτώσεων της προηγούμενης απόδειξης. Η απόδειξη δείχνει ότι η ίδια πρόταση ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο. Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί γενικότερα ως εξής:

Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και τα σημεία: Ε του ΑΒ, Ζ του ΒΓ, Η του ΓΔ και Θ του ΔΑ τέτοια ώστε: $\frac{AE}{EB}=\frac{ΔH}{HΓ}=λ$ και $\frac{AΘ}{ΘΔ}=\frac{BZ}{ZΓ}=μ$. Τότε τα ευθ. τμήματα ΕΗ και ΘΖ τέμνονται υποχρεωτικά σε εσωτερικό τους σημείο Κ και ισχύει: $\frac{ΘK}{KZ}=λ$ και $\frac{EK}{KH}=μ$.

Απόδειξη:

Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο για αρχή (σχ. 13α). Επειδή $\frac{AE}{EB}=λ$ θα είναι:

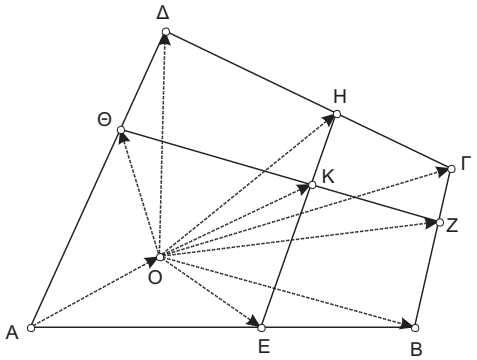
$$\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OA}+λ\overrightarrow{OB}}{1+λ} \quad (1)$$

Όμοια:

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OΔ}+λ\overrightarrow{OΓ}}{1+λ} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OΘ}=\frac{\overrightarrow{OA}+μ\overrightarrow{OΔ}}{1+μ} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{\overrightarrow{OB}+μ\overrightarrow{OΓ}}{1+μ} \quad (4)$$



Σχήμα 13α

Αν K_1 είναι το σημείο του ΘΖ τέτοιο ώστε $\frac{\Theta K_1}{K_1 Z} = \lambda$ και K_2 είναι το σημείο του ΕΗ τέτοιο ώστε $\frac{EK_2}{K_2 H} = \mu$ θα είναι:

$$\overrightarrow{OK_1} = \frac{\overrightarrow{O\Theta} + \lambda\overrightarrow{OZ}}{1+\lambda} \overset{(3),(4)}{=} \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \lambda\mu\overrightarrow{O\Gamma} + \mu\overrightarrow{O\Delta}}{(1+\lambda)(1+\mu)} \quad (5) \qquad \text{και}$$

$$\overrightarrow{OK_2} = \frac{\overrightarrow{OE} + \mu\overrightarrow{OH}}{1+\mu} \overset{(1),(2)}{=} \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \lambda\mu\overrightarrow{O\Gamma} + \mu\overrightarrow{O\Delta}}{(1+\lambda)(1+\mu)} \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) προκύπτει: $\overrightarrow{OK_1} = \overrightarrow{OK_2}$ άρα $K_1 \equiv K_2$

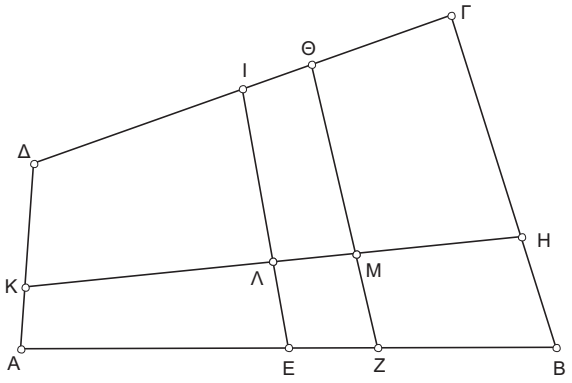
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Από την ίδια διανυσματική απόδειξη προκύπτει ότι η πρόταση ισχύει και όταν τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ δεν είναι υποχρεωτικά εσωτερικά των αντίστοιχων τμημάτων, αλλά βρίσκονται στις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα και ισχύει: $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{\overrightarrow{\Delta H}}{\overrightarrow{H\Gamma}} = \lambda$ και $\frac{\overrightarrow{A\Theta}}{\overrightarrow{\Theta\Delta}} = \frac{\overrightarrow{BZ}}{\overrightarrow{Z\Gamma}} = \mu$ οπότε οι ευθείες ΕΗ και ΘΖ τέμνονται υποχρεωτικά σε κάποιο σημείο Κ και ισχύει: $\frac{\overrightarrow{\Theta K}}{\overrightarrow{KZ}} = \lambda$ και $\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KH}} = \mu$.

Π1. (Θεώρημα μηκών)

Κάθε οριζόντια γραμμή πλέγματος διαιρείται από τις κατακόρυφες γραμμές σε ίσα μέρη.

Απόδειξη:

Έστω το πλέγμα ΑΒΓΔ(ν×κ), (σχ. 14), ΚΗ μια οριζόντια γραμμή και ΕΙ, ΖΘ δύο διαδοχικές κατακόρυφες. Θα αποδείξουμε ότι: ΛΜ = $\frac{1}{\nu}$ΚΗ



Σχήμα 14

Πράγματι, αν $ΑΕ = \frac{λ}{ν}ΑΒ$ και $ΑΖ = \frac{λ+1}{ν}ΑΒ$ τότε, σύμφωνα με την παρατήρηση του Λ1, θα είναι και:

$$ΚΛ = \frac{λ}{ν}ΚΗ \quad \text{και} \quad ΚΜ = \frac{λ+1}{ν}ΚΗ \quad \text{άρα} \quad ΛΜ = ΚΜ - ΚΛ = \frac{1}{ν}ΚΗ$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση του ορισμού 4, η ίδια πρόταση ισχύει και για τις κατακόρυφες γραμμές, δηλαδή κάθε κατακόρυφη γραμμή πλέγματος διαιρείται από τις οριζόντιες γραμμές σε ίσα μέρη.

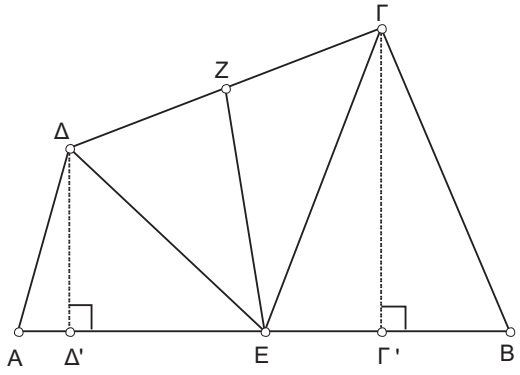
Λ2.

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\textbf{εμβ(ΑΕΖΔ) = εμβ(ΕΒΓΖ)} \Leftrightarrow \textbf{ΑΒ//ΔΓ}$$

Απόδειξη:

Φέρνουμε τις ΕΓ, ΕΔ και τα ύψη ΔΔ΄ και ΓΓ΄ των τριγώνων ΔΑΕ και ΓΕΒ (σχ. 15).



Σχήμα 15

Στο τρίγωνο ΕΓΔ η ΕΖ είναι διάμεσος, άρα (ΕΔΖ) = (ΕΖΓ) επομένως:

(ΑΕΖΔ) = (ΕΒΓΖ) $\Leftrightarrow$ (ΔΑΕ) + (ΕΔΖ) = (ΓΕΒ) + (ΕΓΖ) $\Leftrightarrow$

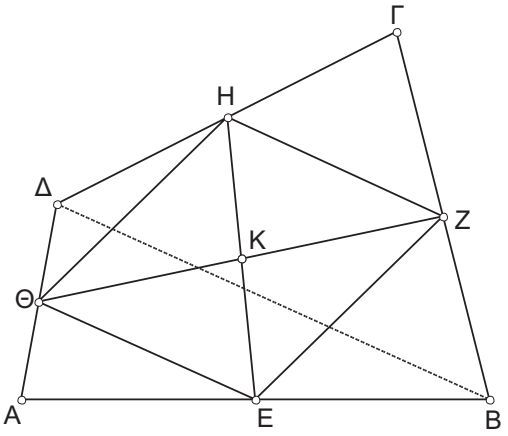
(ΔΑΕ) = (ΓΕΒ) $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}ΑΕ.ΔΔ΄ = \frac{1}{2}ΕΒ.ΓΓ΄ \Leftrightarrow ΔΔ΄ = ΓΓ΄ \Leftrightarrow$ ΔΓ//ΑΒ

Λ3.

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα και Κ = ΕΗ∩ΘΖ.
Ισχύει: (ΑΕΚΘ) + (ΓΗΚΖ) = (ΒΖΚΕ) + (ΔΘΚΗ).

Απόδειξη:

Έστω (ΑΒΓΔ) = Ε (σχ. 16). Είναι γνωστό ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παρ/μου με εμβαδό ίσο με $\frac{1}{2}$Ε.



Σχήμα 16

Επομένως:
(ΚΕΖ) = (ΚΖΗ) = (ΚΗΘ) =
$= (\text{ΚΘΕ}) = \frac{1}{4}(\text{ΕΖΗΘ}) = \frac{1}{8}\text{Ε}$ (1)

Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΕΘ και ΑΒΔ έχουν τη γωνία Α κοινή, άρα:

$$\left.\begin{array}{l}(\text{ΑΕΘ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΔ}) \text{ όμοια} \\ (\text{ΓΗΖ}) = \frac{1}{4}(\text{ΓΔΒ})\end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} (\text{ΑΕΘ}) + (\text{ΓΗΖ}) = \frac{1}{4}[(\text{ΑΒΔ}) + (\text{ΓΒΔ})] = \frac{1}{4}\text{Ε} \quad (2)$$

Επομένως:

$(\text{ΑΕΚΘ}) + (\text{ΓΗΚΖ}) = (\text{ΑΕΘ}) + (\text{ΚΘΕ}) + (\text{ΓΗΖ}) + (\text{ΚΖΗ}) \overset{(1),(2)}{=}$

$= \frac{1}{4}\text{Ε} + \frac{1}{8}\text{Ε} + \frac{1}{8}\text{Ε} = \frac{1}{2}\text{Ε}$ οπότε και (ΒΖΚΕ) + (ΔΘΚΗ) = $\frac{1}{2}$Ε.

άρα (ΑΕΚΘ) + (ΓΗΚΖ) = (ΒΖΚΕ) + (ΔΘΚΗ)

Π2.

Σε κάθε ν-λωρίδα

α) Το άθροισμα των εμβαδών δύο συμμετρικών στ3 είναι σταθερό και ίσο με το $\frac{1}{\nu}$ του εμβαδού της λωρίδας.

β) Το άθροισμα των εμβαδών δύο συμμετρικών στ4 είναι σταθερό και ίσο με τα $\frac{2}{\nu}$ του εμβαδού της λωρίδας.

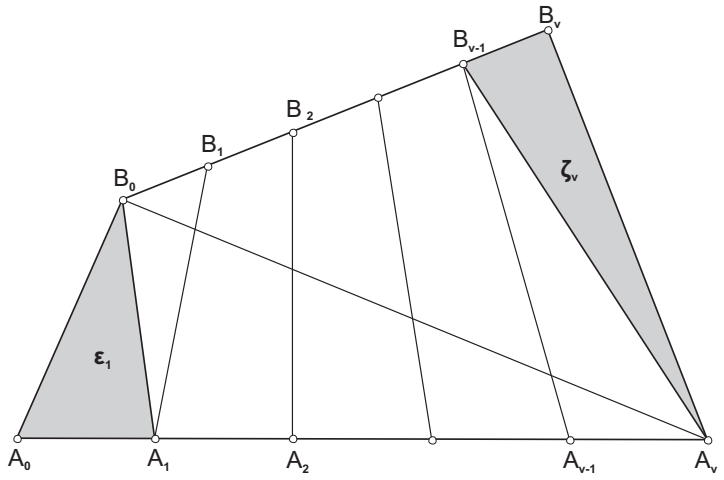
γ) Αν ν = περιττός, το εμβαδό του κεντρικού στ4 της ν-λωρίδας είναι ίσο με το $\frac{1}{\nu}$ του εμβαδού της λωρίδας.

Απόδειξη:

α) Έστω η ν-λωρίδα (σχ. 17α) και τα ακριανά στ3 $A_0A_1B_0$ και $A_vB_{v-1}B_v$. Ονομάζουμε $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_v$ τα εμβαδά των τριγώνων που έχουν βάσεις τις $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{v-1}A_v$ και κορυφές τα σημεία $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{v-1}$ αντίστοιχα και $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_v$ τα εμβαδά των τριγώνων που έχουν βάσεις τις $B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_{v-1}B_v$ και κορυφές τα σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_v$ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\varepsilon_1 + \zeta_v = \varepsilon_2 + \zeta_{v-1} = \ldots = \varepsilon_{v-1} + \zeta_2 = \varepsilon_v + \zeta_1 = \frac{1}{v} E_v$$

όπου E_v το εμβαδό της ν-λωρίδας.



Σχήμα 17α

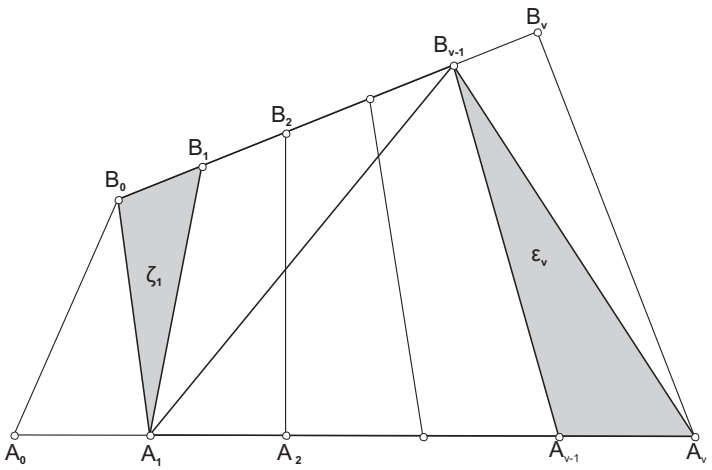
Η απόδειξη είναι όμοια αν επιλέξουμε ως $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_v$, τα εμβαδά των στ3 με βάσεις τις $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{v-1}A_v$ και αντίστοιχες κορυφές $B_1, B_2, \ldots, B_{v-1}B_v$ και ως $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_v$ τα εμβαδά των τριγώνων με βάσεις: $B_0B_1, B_1B_2, \ldots, B_{v-1}B_v$ και αντίστοιχες κορυφές τις $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{v-1}$.

Φέρνουμε τη διαγώνιο B_0A_v. Τα τρίγωνα $B_0A_0A_1$ και $B_0A_0A_v$ έχουν κοινό ύψος από το B_0.

Επειδή $(A_0A_1) = \frac{1}{v}(A_0A_v)$, θα είναι $(B_0A_0A_1) = \frac{1}{v}(B_0A_0A_v)$ ή $\varepsilon_1 = \frac{1}{v}(B_0A_0A_v)$.

Όμοια από τα τρίγωνα $A_vB_vB_{v-1}$ και $A_vB_vB_0$ έχουμε: $\zeta_v = \frac{1}{v}(A_vB_vB_0)$,

άρα $\varepsilon_1+\zeta_v = \frac{1}{v}[(B_0A_0A_v)+(A_vB_vB_0)] = \frac{1}{v}E_v$



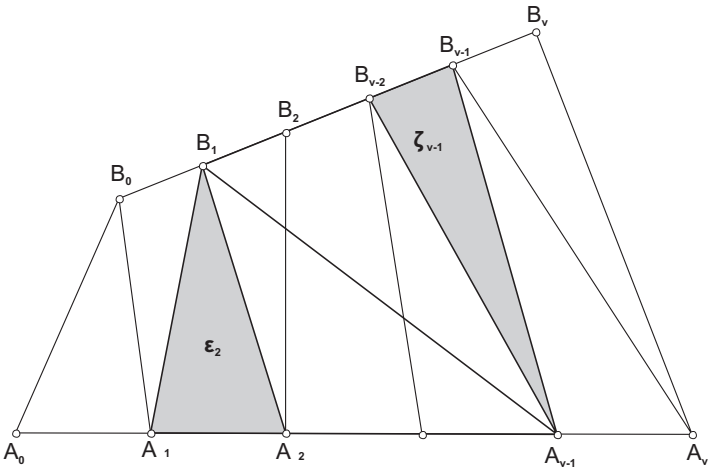
Σχήμα 17β

Αν αφαιρέσουμε τα τρίγωνα αυτά από τη ν-λωρίδα προκύπτει η (ν – 1) λωρίδα $A_1A_\nu B_{\nu-1}B_0$ (σχ. 17β) με εμβαδό $E_{\nu-1} = E_\nu - \frac{1}{\nu}E_\nu = \frac{\nu-1}{\nu}E_\nu$

Σύμφωνα με αυτά που μόλις αποδείξαμε, είναι:

$\zeta_1 = \frac{1}{\nu-1}(A_1B_{\nu-1}B_0)$ και $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu-1}(B_{\nu-1}A_1A_\nu)$ άρα

$\zeta_1+\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu-1}[(A_1B_{\nu-1}B_0)+(B_{\nu-1}A_1A_\nu)] = \frac{1}{\nu-1}E_{\nu-1} = \frac{1}{\nu-1}\cdot\frac{\nu-1}{\nu}E_\nu = \frac{1}{\nu}E_\nu$



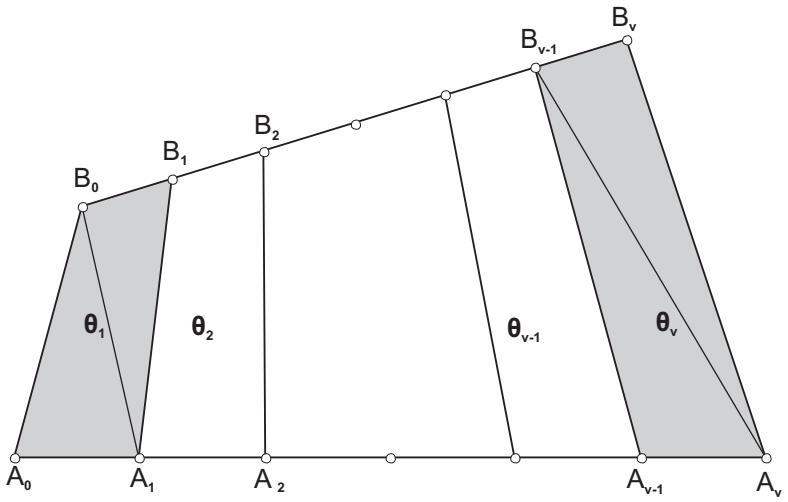
Σχήμα 17γ

Αφαιρώντας τώρα τα τρίγωνα $A_1B_1B_0$ και $B_{\nu-1}A_{\nu-1}A_\nu$ προκύπτει η (ν-2) λωρίδα $A_1A_{\nu-1}B_{\nu-1}B_1$ (σχ. 17γ) με εμβαδό:

$$E_{v-2} = \frac{v-1}{v}E_v - \frac{1}{v}E_v = \frac{v-2}{v}E_v$$ και ισχύει πάλι:

$$\varepsilon_2+\zeta_{v-1} = \frac{1}{v-2}E_{v-2} = \frac{1}{v-2}\cdot\frac{v-2}{v}E_v = \frac{1}{v}E_v$$ κ.ο.κ

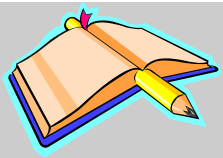
β) Δύο συμμετρικά στ4 αποτελούνται (το καθένα) από δύο συμμετρικά στ3, (σχ. 18)άρα για τα εμβαδά τους $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_v$ ισχύει: $\theta_1+\theta_v = \frac{2}{v}E$



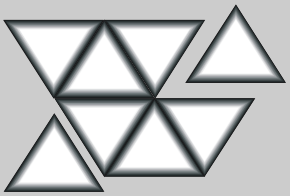
Σχήμα 18

γ) Αν ν = περιττός υπάρχει κεντρικό στ4 που αποτελείται από δύο συμμετρικά στ3. Άρα το εμβαδό του τετραπλεύρου αυτού σύμφωνα με το (α) είναι ίσο με $\frac{1}{v}E_v$

Συνεχίζεται, στο επόμενο τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.



Συνάδελφοι, μαθητές:
Ενισχύστε τον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ με άρθρα και ασκήσεις. Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ έχει την ανάγκη όλων σας.



Διάταξη - Ολυμπιάδες

Στεργίου Μπάμπης
Μαθηματικός, Συγγραφέας, Χαλκίδα

ΜΕΡΟΣ 1ο

Ιδιότητες της διάταξης

Α. α. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε:

♦ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ ♦ $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

♦ $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq 0$ ♦ $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \leq 0$

β. Ισχύει ότι:

Αν $\alpha, \beta > 0$, τότε $\alpha + \beta > 0$ και $\alpha\beta > 0$.

Β. Για τη διάταξη ξεχωρίζουν οι ιδιότητες:

α. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$. (*Μεταβατική ιδιότητα*)

β. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

γ. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

δ. Αν $\alpha > \beta$, τότε: ♦ $\alpha\gamma > \beta\gamma$, αν $\gamma > 0$ ♦ $\alpha\gamma < \beta\gamma$, αν $\gamma < 0$

ε. $\alpha + \gamma > \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha > \beta$

στ. Ισχύει: ♦ $\alpha^{2\nu+1} > \beta^{2\nu+1} \Leftrightarrow \alpha > \beta$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$

♦ $\alpha^{2\nu} > \beta^{2\nu} \Leftrightarrow |\alpha| > |\beta|$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

ζ. Αν $\alpha > \beta > 0$, τότε: ♦ $\alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ ♦ $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

Οι προηγούμενες ιδιότητες είναι θεμελιώδεις και θα εφαρμόζονται στη λύση των ασκήσεων χωρίς καμία αναφορά ή διευκρίνηση.

ΣΧΟΛΙΟ: Τονίζουμε ότι δύο ανισότητες με την ίδια φορά, ούτε αφαιρούνται ούτε διαιρούνται κατά μέλη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι $\frac{(\alpha+\beta)^4}{16} \le \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \le \frac{\alpha^4+\beta^4}{2}$ **για κάθε** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ:

Η ανισότητα είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{(\alpha+\beta)^4}{16} \le \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} & (1) \\ \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \le \frac{\alpha^4+\beta^4}{2} & (2) \end{cases}$$

♦ Η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{(\alpha+\beta)^4}{16} \le \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)^4 \le 4(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3) \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)^4 \le 4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)^4 \le 4(\alpha+\beta)^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \Leftrightarrow$$
$$4(\alpha+\beta)^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) - (\alpha+\beta)^4 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)^2[4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) - (\alpha+\beta)^2] \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)^2[4\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2 - (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)] \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)^2(4\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)^2(3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$3(\alpha+\beta)^2(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$3(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2 \ge 0,$$

η οποία ισχύει, διότι $(\alpha+\beta)^2 \ge 0$ και $(\alpha-\beta)^2 \ge 0$.

♦ Η σχέση (2) γίνεται:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \le \frac{\alpha^4+\beta^4}{2} \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3) \le 2(\alpha^4+\beta^4) \Leftrightarrow$$
$$\alpha^4+\alpha\beta^3+\alpha^3\beta+\beta^4 \le 2\alpha^4+2\beta^4 \Leftrightarrow$$
$$2\alpha^4+2\beta^4-\alpha^4-\alpha\beta^3-\alpha^3\beta-\beta^4 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha^3-\beta^3) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$2(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \geq 2\cdot 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2(2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2[(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+\alpha^2+\beta^2] \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2[(\alpha+\beta)^2+\alpha^2+\beta^2] \geq 0,$$

που ισχύει, διότι $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ και $(\alpha+\beta)^2+\alpha^2+\beta^2 \geq 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta+\gamma}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma^2+\alpha^2} \leq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

Πότε ισχύει το ίσον;

ΛΥΣΗ:

Για θετικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

Πραγματικά:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} \overset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$$

η οποία ισχύει.

Από τις σχέσεις:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right),\ \frac{\beta+\gamma}{\beta^2+\gamma^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \text{ και } \frac{\gamma+\alpha}{\gamma^2+\alpha^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

με πρόσθεση παίρνουμε:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta+\gamma}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma^2+\alpha^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta+\gamma}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma^2+\alpha^2} \leq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

ΜΕΡΟΣ 2ο

Βασικές ανισότητες

Ένα από τα πιο αγαπημένα κεφάλαια στους μαθηματικούς διαγωνισμούς και στις Ολυμπιάδες Μαθηματικών είναι οι ανισότητες. Αν ξεφυλλίσει κάποιος βιβλία με θέματα μαθηματικών διαγωνισμών, θα εκπλαγεί από τη συχνότητα με την οποία τίθενται θέματα με ανισότητες.

Ο λόγος είναι απλός! Για την απόδειξη ανισοτήτων απαιτείται συχνά έξυπνη έως και ευφυής εφαρμογή των βασικών ανισοτήτων αλλά και συνδυασμός αυτών με άλλες αλγεβρικές ιδιότητες.

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του αντικειμένου, θα αποφύγουμε όμως περιπτώσεις που βασίζονται σε ύλη μεγαλυτέρων τάξεων (χρήση παραγώγων κ.λπ).

Α. Οι πιο βασικές ανισότητες είναι οι παρακάτω:

α. ♦ $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$, για κάθε $\alpha > 0$ ♦ $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$, για κάθε $\alpha < 0$

♦ $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$, αν οι α και β είναι ομόσημοι

♦ $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$, αν οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

β. Ισχύει ότι:

♦ $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$

♦ $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$ και $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$

♦ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$

♦ $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in R$

♦ $(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma$.

ΣΧΟΛΙΟ: *Η ανισότητα $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2$ είναι βασική και η απόδειξή της ανάγεται στη σχέση $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geq 0$, η οποία προφανώς ισχύει.*

γ. Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι:

♦ $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$ $(\alpha,\beta>0)$

♦ $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$, $(\alpha,\beta > 0)$

♦ $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \dfrac{\alpha+\beta}{4}$ και $\dfrac{4}{\alpha+\beta} \leq \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$, $(\alpha,\beta > 0)$

Β. α. Για τις πλευρές α, β και γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι:

♦ $\alpha < \beta+\gamma$, $\beta < \gamma+\alpha$ και $\gamma < \alpha+\beta$

♦ $|\beta-\gamma| < \alpha < \beta+\gamma$, $|\gamma-\alpha| < \beta < \alpha+\gamma$ και $|\alpha-\beta| < \gamma < \alpha+\beta$

(τριγωνική ανισότητα)

β. Για τυχαία σημεία Α, Β και Γ του επιπέδου ισχύει ότι:

$$|AB-A\Gamma| \leq B\Gamma \leq AB+A\Gamma$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν α, β, γ ≥ 0, να αποδειχθεί ότι:

α. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma) \geq \left(\beta+\sqrt{\alpha\gamma}\right)^2$

β. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq \left(\alpha+\sqrt{\beta\gamma}\right)\left(\beta+\sqrt{\gamma\alpha}\right)\left(\gamma+\sqrt{\alpha\beta}\right)$

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

ΛΥΣΗ:

α. Εργαζόμαστε με τη μέθοδο των ισοδυναμιών. Έτσι:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma) \geq \left(\beta+\sqrt{\alpha\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta^2+\beta\gamma \geq \beta^2+\alpha\gamma+2\beta\sqrt{\alpha\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma \geq 2\beta\sqrt{\alpha\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\beta(\alpha+\gamma) \geq 2\beta\sqrt{\alpha\gamma} \overset{\beta\geq 0}{\Leftrightarrow} \alpha+\gamma \geq 2\sqrt{\alpha\gamma} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\gamma)^2 \geq \left(2\sqrt{\alpha\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma \geq 4\alpha\gamma \Leftrightarrow$$

$\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\gamma)^2 \geq 0$, η οποία ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \gamma$ ή $\beta = 0$.

β. Με βάση το πρώτο ερώτημα ισχύει ότι:

♦ $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma) \geq \left(\beta+\sqrt{\gamma\alpha}\right)^2 \geq 0$ ♦ $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq \left(\gamma+\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \geq 0$

♦ $(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) \geq \left(\alpha+\sqrt{\beta\gamma}\right)^2 \geq 0$

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων αυτών παίρνουμε:

$$(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2 \geq \left(\beta+\sqrt{\gamma\alpha}\right)^2\left(\gamma+\sqrt{\alpha\beta}\right)^2\left(\alpha+\sqrt{\beta\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq \left(\alpha+\sqrt{\beta\gamma}\right)\left(\beta+\sqrt{\gamma\alpha}\right)\left(\gamma+\sqrt{\alpha\beta}\right)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Υπενθυμίζουμε ότι:

♦ Μόνο ανισότητες με μη αρνητικά μέλη μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε, χωρίς να αλλάξει η φορά.

♦ Ισχύει ότι $\alpha^2 \geq \beta^2 \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$, μόνο αν $\alpha, \beta \geq 0$.
Διαφορετικά γράφουμε: $\alpha^2 \geq \beta^2 \Leftrightarrow |\alpha| \geq |\beta|$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί με αβ = 1, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha^2 + 2002\alpha + 1)(\beta^2 + 2002\beta + 1) \geq 2004^2$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ΛΥΣΗ:

Παρατηρούμε ότι:

♦ $\alpha^2 + 2002\alpha + 1 \geq 2004\alpha$ (1)

αφού αυτή είναι ισοδύναμη με την:

$\alpha^2 + 2002\alpha + 1 - 2004\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \geq 0$

η οποία ισχύει.

♦ $\beta^2 + 2002\beta + 1 \geq 2004\beta$ (2)

αφού είναι ισοδύναμη με την $(\beta-1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Οι σχέσεις (1) και (2) με πολλαπλασιασμό δίνουν:

$$(\alpha^2 + 2002\alpha + 1)(\beta^2 + 2002\beta + 1) \geq 2004\alpha \cdot 2004\beta \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2 + 2002\alpha + 1)(\beta^2 + 2002\beta + 1) \geq 2004^2$$

αφού $\alpha\beta = 1$. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta = 1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5η

Αν $x + y + \omega = 2$, να αποδειχθεί ότι:

$$x^2 + y^2 + \omega^2 + 4 \geq 4(xy + y\omega + \omega x).$$

ΛΥΣΗ:

Επειδή $x + y + \omega = 2$, θα είναι $(x + y + \omega)^2 = 4$.

Άρα, θέτοντας όπου 4 το $(x + y + \omega)^2$, η δοσμένη ανισότητα γίνεται:

$$x^2 + y^2 + \omega^2 + (x + y + \omega)^2 \geq 4(xy + y\omega + \omega x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + \omega^2 + x^2 + y^2 + \omega^2 + 2xy + 2y\omega + 2\omega x \geq 4xy + 4y\omega + 4\omega x \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + \omega^2 - 2y\omega) + (\omega^2 + x^2 - 2\omega x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - y)^2 + (y - \omega)^2 + (\omega - x)^2 \geq 0$$

η οποία ισχύει διότι κάθε όρος στο πρώτο μέλος είναι μη αρνητικός.

ΜΕΡΟΣ 3ο

Ο συμβολισμός $\sum$

Θεωρούμε το άθροισμα: $A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_v$

Ένας απλός τρόπος για να παραστήσουμε το άθροισμα Α, είναι να γράψουμε: $A = \sum_{i=1}^{v} \alpha_i$

Στο $\sum_{i=1}^{v} \alpha_i$ ο δείκτης i παίρνει τις τιμές από 1 έως ν.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + \alpha_{\kappa+2} + \ldots + \alpha_\mu = \sum_{i=\kappa}^{\mu} \alpha_i$$

Το σύμβολο $\sum$ έχει τις εξής απλές ιδιότητες:

- $\sum_{i=1}^{v} (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^{v} \alpha_i + \sum_{i=1}^{v} \beta_i$ και $\sum_{i=1}^{v} \alpha_i (\beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=1}^{v} \alpha_i \beta_i + \sum_{i=1}^{v} \alpha_i \gamma_i$
- $\sum_{i=1}^{v} (\lambda \alpha_i) = \lambda \sum_{i=1}^{v} \alpha_i$ και $\sum_{i=1}^{v} \alpha = \nu\alpha$

Αξιοσημείωτες ανισότητες

Κάθε **δυνατός μαθητής και λάτρης των Μαθηματικών Ολυμπιάδων** βασίζεται στις παρακάτω σημαντικότατες ανισότητες, που σηκώνουν και το βάρος του άρθρου αυτού.

Α. α. Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, τότε:

- $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$
- $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \geq 9\alpha\beta\gamma$
- $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2$ και $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2$

β. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_v > 0$, τότε:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_v}{v} \geq \sqrt[v]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_v} \geq \frac{v}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_v}}$$

Η ισότητα ισχύει όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους. Το πρώτο κλάσμα λέγεται αριθμητικός, το δεύτερο γεωμετρικός και το τρίτο αρμονικός μέσος των $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_v$.
Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή και ως ανισότητα Cauchy ή ανισότητα του Αριθμητικού – Γεωμετρικού – Αρμονικού (ανισότητα των μέσων)

Β. Ισχύει ότι:

- $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$, για κάθε $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$
- $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + \omega^2) \geq (\alpha x + \beta y + \gamma\omega)^2$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega \in \mathbb{R}$
- $(\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9$, όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$
- $\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_v^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_v^2\right) \geq (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_v\beta_v)^2$

που είναι γνωστή ως ***ανισότητα των Buniakowski–Cauchy–Schwarz (Β – C – S).***

Η ισότητα ισχύει όταν: $\alpha_i = \lambda\beta_i$, για κάθε $i \in \{1, 2, ..., v\}$.

Η ανισότητα Β – C – S μπορεί να γραφεί πιο κομψά ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{v} \alpha_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{v} \beta_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{v} \alpha_i\beta_i\right)^2$$

Γ. Αν $p, q > 1$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v \geq 0$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v \geq 0$, τότε:

$$\left(\alpha_1^p+\alpha_2^p+\ldots+\alpha_v^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\beta_1^q+\beta_2^q+\ldots+\beta_v^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_v\beta_v$$

ή πιο κομψά:

$$\left(\sum_{i=1}^{v}\alpha_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{v}\beta_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{v}\alpha_i\beta_i$$ ***(ανισότητα Hölder)***

Η ισότητα ισχύει αν $\beta_i = \lambda\alpha_i^{p-1}$.

Δ. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v \geq 0$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v \geq 0$, τότε:

$$\left(\sum_{i=1}^{v}\alpha_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{v}\beta_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{v}(\alpha_i+\beta_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ ***(ανισότητα Minkowsky)***

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\beta_i = \lambda\alpha_i$, δηλαδή αν οι α_i και β_i είναι ανάλογοι.

Ε. Αν ισχύει:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_v \quad \text{και} \quad \beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_v \quad \text{ή}$$

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_v \quad \text{και} \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_v$$

τότε:

$$\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_v\beta_v}{v} \geq \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_v}{v}\cdot\frac{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_v}{v} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}\alpha_i\beta_i \geq \left(\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}\alpha_i\right)\left(\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}\beta_i\right)$$ ***(ανισότητα Tschebychev)***

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_v$ και $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_v$.

ΣΤ.α. Αν $x, y, \omega > 0$ και $v \in \mathbb{N}^*$, τότε:

$$x^v(x-y)(x-\omega)+y^v(y-\omega)(y-x)+\omega^v(\omega-x)(\omega-y) \geq 0$$

(ανισότητα Schur)

Η ισότητα ισχύει μόνον όταν $x = y = \omega$.

β. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v \geq 0$, τότε:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_v) \geq 1+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_v)$$

(ανισότητα Weierstrass)

γ. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί και μικρότεροι του 1, τότε:

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_v) \geq 1-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_v)$$

(ανισότητα Weierstrass)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6η

Αν α, β, γ ≥ 0, να αποδειχθεί ότι

$$(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) \le \alpha\beta\gamma.$$

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε: $x = -\alpha+\beta+\gamma$, $y = \alpha-\beta+\gamma$ και $\omega = \alpha+\beta-\gamma$.

Έτσι:

- $x+y = 2\gamma \Leftrightarrow \gamma = \dfrac{x+y}{2}$
- $y+\omega = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{y+\omega}{2}$
- $\omega+x = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{\omega+x}{2}$

Η ανισότητα γίνεται:

$$xy\omega \le \frac{y+\omega}{2}\cdot\frac{\omega+x}{2}\cdot\frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x+y)(y+\omega)(\omega+x) \ge 8xy\omega \qquad (1)$$

Από τις σχέσεις: $x+y = 2\gamma \ge 0$, $y+\omega = 2\alpha \ge 0$ και $\omega+x = 2\beta \ge 0$, προκύπτει ότι το πολύ ένας από τους x, y, ω είναι μικρότερος από το μηδέν.

- Αν λοιπόν $x < 0$, η (1) ισχύει προφανώς. Όμοια, αν $y < 0$ ή $\omega < 0$.
- Αν $x, y, \omega \ge 0$, τότε από τις σχέσεις:
  - $x+y \ge 2\sqrt{xy}$, $y+\omega \ge 2\sqrt{y\omega}$ και $\omega+x \ge 2\sqrt{\omega x}$,

με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει η (1).

Έτσι, η (1) ισχύει σε κάθε περίπτωση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7η

Αν α, β, γ, x, y και ω είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha x}+\frac{1}{\beta y}+\frac{1}{\gamma\omega} \ge \frac{36}{(\alpha+x)^2+(\beta+y)^2+(\gamma+\omega)^2}$$

(Baltic way, 1992)

ΛΥΣΗ:

Από την προφανή ανισότητα $(\alpha+x)^2 \ge 4\alpha x$ παίρνουμε: $\dfrac{1}{\alpha x} \ge \dfrac{4}{(\alpha+x)^2}$

Επομένως:

$$\frac{1}{\alpha x}+\frac{1}{\beta y}+\frac{1}{\gamma\omega}\geq\frac{4}{(\alpha+x)^2}+\frac{4}{(\beta+y)^2}+\frac{4}{(\gamma+\omega)^2}$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{(\alpha+x)^2}+\frac{1}{(\beta+y)^2}+\frac{1}{(\gamma+\omega)^2}\geq\frac{9}{(\alpha+x)^2+(\beta+y)^2+(\gamma+\omega)^2} \qquad (1)$$

ή γενικότερα:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\geq\frac{9}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \qquad (2)$$

για κάθε $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Όμως:

- $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$
- $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\geq 3\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\beta^2\gamma^2\gamma^2\alpha^2}=3\cdot\sqrt[3]{\alpha^4\beta^4\gamma^4}$

Οι παραπάνω ανισότητες δίνουν:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)\geq 9\cdot\sqrt[3]{\alpha^6\beta^6\gamma^6}=9\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Άρα:

$$\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\geq\frac{9}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\geq\frac{9}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

Ισχύει λοιπόν η σχέση (2), συνεπώς και η σχέση (1) και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8η

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}\geq\frac{3}{2}$$

(Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1995)

ΛΥΣΗ:

Η άσκηση αυτή προτάθηκε από τη Ρωσία στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα του Καναδά.

Θέτουμε: $\alpha = \frac{1}{x},\ \beta = \frac{1}{y}$ και $\gamma = \frac{1}{\omega}$

οπότε: $\alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\omega} = 1 \Leftrightarrow xy\omega = 1$ (1)

Είναι: $$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)} + \frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)} + \frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{y^3}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3y\omega}{y+\omega} + \frac{xy^3\omega}{x+\omega} + \frac{xy\omega^3}{x+y} \geq \frac{3}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{y+\omega} + \frac{y^2}{\omega+x} + \frac{\omega^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

διότι $xy\omega = 1$.

Η ανισότητα B – C – S δίνει:

$$\left[\left(\sqrt{y+\omega}\right)^2 + \left(\sqrt{\omega+x}\right)^2 + \left(\sqrt{x+y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{x}{\sqrt{y+\omega}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\omega+x}}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\sqrt{x+y}}\right)^2\right] \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{y+\omega}\cdot\frac{x}{\sqrt{y+\omega}} + \sqrt{\omega+x}\cdot\frac{y}{\sqrt{\omega+x}} + \sqrt{x+y}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{x+y}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$[(y+\omega)+(\omega+x)+(x+y)]\left(\frac{x^2}{y+\omega} + \frac{y^2}{\omega+x} + \frac{\omega^2}{x+y}\right) \geq (x+y+\omega)^2 \Leftrightarrow$$

$$2(x+y+\omega)\left(\frac{x^2}{y+\omega} + \frac{y^2}{\omega+x} + \frac{\omega^2}{x+y}\right) \geq (x+y+\omega)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{y+\omega} + \frac{y^2}{\omega+x} + \frac{\omega^2}{x+y} \geq \frac{x+y+\omega}{2}$$

Αλλά: $x+y+\omega \geq 3\cdot\sqrt[3]{xy\omega} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x+y+\omega \geq 3$

Άρα: $$\frac{x^2}{y+\omega} + \frac{y^2}{\omega+x} + \frac{\omega^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x = y = \omega$.

Μια βασική ανισότητα

Έστω α, β και γ θετικοί αριθμοί και x, y και ω τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

Τότε: $$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}\geq\frac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \textbf{(A)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\geq\frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta} \qquad (1)$$

Πραγματικά είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\geq\frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow(\beta x^2+\alpha y^2)(\alpha+\beta)\geq\alpha\beta(x+y)^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta x^2+\beta^2x^2+\alpha^2y^2+\alpha\beta y^2\geq\alpha\beta x^2+2\alpha\beta xy+\alpha\beta y^2\Leftrightarrow$$

$$\beta^2x^2+\alpha^2y^2-2\alpha\beta xy\geq 0\Leftrightarrow(\beta x-\alpha y)^2\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

Με βάση την ανισότητα (1) παίρνουμε:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}\geq\frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}\geq\frac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9η

Αν α, β, γ > 0 και α·β·γ = 1, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}\geq\frac{3}{2}$$

(ΔΜΟ, 1995)

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $\alpha=\frac{1}{x}$, $\beta=\frac{1}{y}$ και $\gamma=\frac{1}{\omega}$, οπότε: $\alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow xy\omega = 1$

Η αποδεικτέα ανισότητα γίνεται: $$\frac{x^2}{y+\omega}+\frac{y^2}{\omega+x}+\frac{\omega^2}{x+y}\geq\frac{3}{2} \qquad (1)$$

Σύμφωνα με την ανισότητα (Α) θα είναι:

$$\frac{x^2}{y+\omega}+\frac{y^2}{\omega+x}+\frac{\omega^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+\omega)^2}{2(x+y+\omega)}=\frac{x+y+\omega}{2} \geq \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{xy\omega}=\frac{3}{2}$$

αφού $x+y+\omega \geq 3\cdot\sqrt[3]{xy\omega}$ και $xy\omega = 1$ για κάθε $x, y, \omega > 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 10η

Αν α, β, γ > 0 και α + β + γ = 1, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1} \geq 1$$

ΛΥΣΗ:

Σύμφωνα με τη βασική ανισότητα (Α) είναι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1} \geq \frac{[(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)]^2}{(\alpha+\beta+\gamma)+3}=$$

$$=\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)+3}=\frac{4\cdot 1^2}{1+3}=1.$$

Έτσι, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 11η

Αν α, β, γ > 0 και αβγ = 1, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$$

(Θέμα διαγωνισμών)

ΛΥΣΗ:

Για τις τριάδες: $\left(\sqrt{\beta+\gamma}, \sqrt{\gamma+\alpha}, \sqrt{\alpha+\beta}\right)$, $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta+\gamma}}, \frac{\beta}{\sqrt{\gamma+\alpha}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha+\beta}}\right)$

η ανισότητα B – C – S δίνει:

$$\left[(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)+(\alpha+\beta)\right]\left[\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right] \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$2(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \geq \frac{3}{2},$$

διότι $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} = 1$, δηλαδή $\alpha + \beta + \gamma \geq 3$.

Άλλος τρόπος:

Η βασική ανισότητα (Α) δίνει:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)+(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{2(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \geq \frac{3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{2} = \frac{3}{2},$$

αφού $\alpha\beta\gamma = 1$.

ΜΕΡΟΣ 4ο

Μερικές Ασκήσεις και Προβλήματα για Λύση

1. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha^2 + 4\beta^2 \geq 4\alpha\beta$, για κάθε αριθμό $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β. $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 \geq 0$

2. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta} \geq 6$ **β.** $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma$

3. Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{4}$ **β.** $\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

γ. $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$ **δ.** $\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$

4. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta)$ **β.** $(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4) \geq \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2$

γ. $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2} \leq \dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2}$ **δ.** $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2} \leq \dfrac{\alpha^4+\beta^4}{2}$

5. Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \leq \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, $\left((\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\neq 0\right)$

β. $\dfrac{1}{\alpha+\beta}+\dfrac{1}{\beta+\gamma}+\dfrac{1}{\gamma+\alpha} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)$, $(\alpha\beta\gamma \neq 0)$

γ. $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\dfrac{\beta+\gamma}{\beta^2+\gamma^2}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\gamma^2+\alpha^2} \leq \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$, $(\alpha\beta\gamma \neq 0)$

(Θέματα διαγωνισμών – 2001)

6. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, τότε:

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \alpha) \geq 16\alpha\beta\gamma\delta.$$

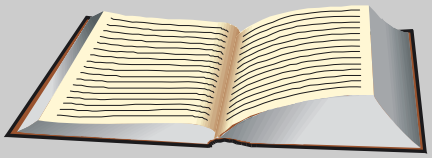
7. Αν $x, y, \omega > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^4}{y\omega^3}+\frac{y^4}{\omega x^3}+\frac{\omega^4}{xy^3} \geq 3$$

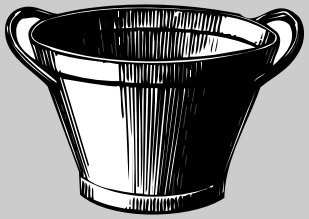
8. Αν x, y και ω είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{x^3+y^3+xy\omega}+\frac{1}{y^3+\omega^3+xy\omega}+\frac{1}{\omega^3+x^3+xy\omega} \leq \frac{1}{xy\omega}$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης – 2003)



Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ φιλοδοξεί να ικανοποιήσει όλους τους αναγνώστες του.



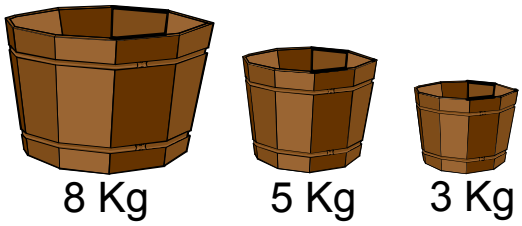
Το παιγνίδι με τα καρδάρια

Δόρτσιος Κώστας,
Μαθηματικός, Σχ. Σύμβουλος Κοζάνης
Ζεμπίλης Κώστας,
Πολ. Μηχανικός – Τοπογράφος, Γρεβενά

Στην κουβέντα που είχαμε κάποτε συντροφιά με ένα γέρο κτηνοτρόφο, νιώσαμε τη χαρά να επαληθεύσουμε για πολλοστή φορά, πως η σοφία και η καθαρότητα του πνεύματος βρίσκεται στους ανθρώπους που ζουν και αγωνίζονται αρμονικά με τη φύση και το περιβάλλον, σ' αυτούς που παρατηρούν και στοχάζονται με το δικό τους τρόπο ο οποίος είναι λιτός, καθαρός και γεμάτος ποιητικότητα. Τα μαθηματικά γι' αυτούς δεν είναι άχαρες εξισώσεις ούτε μεγαλοπρεπής συμβολισμός αλλά βίωμα και εργαλείο καθημερινότητας.

Στη κουβέντα μας αυτή λοιπόν ο παππούς αυτός μας έθεσε το παρακάτω πρόβλημα:

Έχω τρία καρδάρια(*) που μπορούν να χωρέσουν 8, 5 και 3 κιλά γάλα. Το πρώτο περιέχει 8 κιλά γάλα και τα υπόλοιπα είναι άδεια. Θέλω τώρα με τα καρδάρια αυτά και μόνο να κρατήσω στο πρώτο καρδάρι 4 κιλά γάλα. Μπορώ να το πετύχω και πώς;



Κατόπιν μας άφησε για λίγο μόνους πηγαίνοντας προς το κοπάδι του και στα αγαπημένα του ζώα. Δεν προλάβαμε να σκεφτούμε και σε λίγο νάτος πάλι. Χωρίς άλλο λόγο και χωρίς να κομπάζει, μας είπε τη λύση.

(*)*Στη βουκολική γλώσσα:* ***καρδάρι****= κάδος= ξύλινο ή χάλκινο δοχείο, με τη βοήθεια του οποίου μετρούσαν τις ποσότητες του γάλακτος οι κτηνοτρόφοι.*

Η λύση του περιγράφεται με τα παρακάτω βήματα:

Αρχικά:	**8**	**0**	**0**
1^0	**5**	**0**	**3**
2^0	**5**	**3**	**0**
3^0	**2**	**3**	**3**
4^0	**2**	**5**	**1**
5^0	**7**	**0**	**1**
6^0	**7**	**1**	**0**
7^0	**4**	**1**	**3**

Έτσι στο πρώτο καρδάρι απέμειναν 4 κιλά γάλα!

Στη συνέχεια για μας απέμεινε η δουλειά να δούμε το γιατί συμβαίνει να έχουμε τόσα βήματα και να δικαιολογήσουμε τη λύση που μας έδωσε ο παππούς.

Πράγματι τότε είδαμε πως ο Διόφαντος είχε το λόγο. Θυμηθήκαμε τις διοφαντικές εξισώσεις από το Γυμνάσιο.

Είπαμε λοιπόν:

Πρέπει οπωσδήποτε με τη βοήθεια των δύο δοχείων των 5 και των 3 κιλών να πετύχουμε να μείνει στο δοχείο των 8 κιλών ένα υπόλοιπο ίσο με 4.

Άρα, αν υποθέσουμε ότι θα αφαιρέσουμε x φορές, ποσότητες γάλακτος από το μεγάλο δοχείο, χρησιμοποιώντας το δοχείο των 3 κιλών και ψ φορές, προσθέτοντας στο μεγάλο δοχείο, ποσότητες γάλακτος, με το δοχείο των 5 κιλών ώστε να μείνουν τελικά στο μεγάλο δοχείο 4 κιλά, τότε έχουμε φτιάξει την εξίσωση:

$$\mathbf{8 - 3x + 5y = 4}\ (1)$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση ως προς τον x έχουμε:

$$\mathbf{x = \frac{4 + 5y}{3}}$$

και αν δώσουμε στο y την τιμή 1, τότε βρίσκουμε κατά το γνωστό τρόπο ότι x = 3 (θεμελιώδης λύση).

Άρα θα χρησιμοποιήσουμε το δοχείο των τριών κιλών 3 φορές και το δοχείο των πέντε 1 φορά.

Μένει τώρα να δούμε γιατί έχουμε 7 συνολικά βήματα.
Πράγματι παρατηρούμε πως αφού χρησιμοποιούμε τα δοχεία 3+1 = 4 φορές θα έπρεπε να είχαμε 4 βήματα.

Όμως επειδή κάθε φορά η ποσότητα του μικρού δοχείου μετακινείται στο δοχείο των 5 κιλών έτσι περιμένουμε να έχουμε διπλάσιο αριθμό βημάτων, δηλαδή 8. Έχουμε όμως 7 βήματα γιατί στο τελευταίο βήμα δεν γίνεται αυτό.

Αν αντί να λύσουμε την εξίσωση (1) λύσουμε την:

$$\mathbf{8 - 5y + 3x = 4} \quad (2)$$

τότε θα έχουμε διαφορετικό τρόπο λύσης αφαιρώντας πρώτα ποσότητες των 5 κιλών και προσθέτοντας αντίστοιχες των 3 κιλών.

Η λύση της (2) είναι: x = 2 και y = 2 και τα βήματα πάλι επτά.

Αυτά θα είναι:

Βήματα	Δοχείο Α	Δοχείο Β	Δοχείο Γ
	8	0	0
1^0	3	5	0
2^0	3	2	3
3^0	6	2	0
4^0	6	0	2
5^0	1	5	2
6^0	1	4	3
7^0	4	4	0

΄Ετσι πετύχαμε μια ακόμα λύση!

Ήταν καλοκαίρι και είχαμε διάθεση. Ο παππούς είχε φύγει αλλά εμείς συνεχίζαμε. Έβγαιναν όλο και καινούργια πράγματα.

Θυμηθήκαμε πως η εξίσωση αx + βy = γ, με α, β, γ$\in\mathbb{Z}$ και με (α, β) = 1 έχει ακέραιες λύσεις.

Άρα αμέσως προκύπτουν πάμπολα παρόμοια προβλήματα.

Για παράδειγμα:

> ***Έχω τρία δοχεία των 15, 7 και των 5 κιλών. Το πρώτο είναι γεμάτο με κάποιο υγρό. Ζητώ με τη βοήθεια των δύο άλλων δοχείων να μείνουν στο πρώτο 8 κιλά.***

Λύση:

Έχουμε την εξίσωση: 15 – 5x + 7y = 8 $\Leftrightarrow$ x = 7 και y = 4
και με βήματα 2·(7 + 4) – 1 = 21.

Σχηματικά πάλι θα έχουμε:

Βήματα	Δοχείο Α	Δοχείο Β	Δοχείο Γ
	15	0	0
1^0	10	0	5
2^0	10	5	0
3^0	5	5	5
4^0	5	7	3
5^0	12	0	3
6^0	12	3	0
7^0	7	3	5
8^0	7	7	1
9^0	14	0	1
10^0	14	1	0
11^0	9	1	5
12^0	9	6	0
13^0	4	6	5
14^0	4	7	4
15^0	11	0	4
16^0	11	4	0
17^0	6	4	5
18^0	6	7	2
19^0	13	0	2
20^0	13	2	0
21^0	8	2	5

Έτσι στο πρώτο δοχείο έμειναν 8 κιλά μετά από 21 βήματα.

Σημείωση: Πρέπει βέβαια το ποσό που θέλουμε να απομένει στο τέλος να είναι μικρότερο της τιμής: **ποσό του Α – (ποσό του Β + ποσό του Γ)**

Τέλος η προσπάθεια μπορεί να συνεχισθεί και με περισσότερα από τρία δοχεία. Αυτό θα γίνει όταν ξαναβρεθούμε με το γέροντα βοσκό.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Σ.Ε.

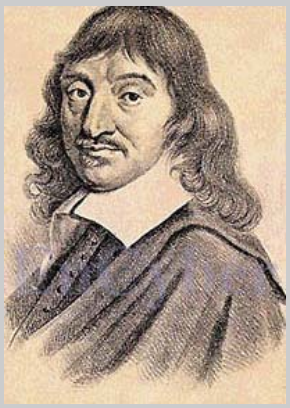
Οι κ.κ. Κ. Δόρτσιος και Κ. Ζεμπίλης ερμηνεύουν, μέσω της Θεωρίας Αριθμών, την πρακτική, διαισθητική, επίλυση προβλημάτων, που συνήθως αντιμετωπίζονται με την απλή διαδικασία: "δοκιμής-λάθους-δοκιμής ...". Ως εκ τούτου η εργασία τους έχει ιδιαίτερη "μαθηματική" αξία. Πρακτική λύση στο παραπάνω, αρχικό, πρόβλημα υπάρχει (και) στο βιβλίο του Br. Bolt "Μαθηματικές Σπαζοκεφαλιές", εκδόσεις ΚΑΤΟΠΤΡΟ.

72. Κρασο... προβλήματα

Δύο κρασοπότες αγόρασαν μια νταμιτζάνα που περιέχει 8 κιλά κρασί και θέλουν να το μοιράσουν στα ίσα μεταξύ τους. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν είναι ότι διαθέτουν δύο μόνο μικρότερα δοχεία με χωρητικότητα 5 κιλά και 3 κιλά αντίστοιχα. Πώς θα καταφέρουν να κάνουν τη μοιρασιά;

Ευκλείδης ή Καρτέσιος;

Γιάννης Απλακίδης
Μαθηματικός,
Βέροια



...Οι Έλληνες είχαν θεμελιώσει τα Μαθηματικά ως μια γεωμετρική επιστήμη. Το 17ο αιώνα μετασχηματίστηκαν σε αλγεβρική επιστήμη. Στον ζεστό θρόνο της γεωμετρίας, ο Ντεκάρτ εγκατέστησε θριαμβευτικά την άλγεβρα.

ΝΤΕΝΙ ΓΚΕΤΖ
«Το θεώρημα του παπαγάλου»
Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ

Με αφορμή τις ασκήσεις που προτείνονται στο βιβλίο των Μαθηματικών της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου και ιδιαίτερα αυτές που αφορούν την παραβολή θα προσπαθήσουμε να «επαναφέρουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία στο ζεστό της θρόνο».

Θα προτείνουμε μια σειρά από λύσεις στις ασκήσεις αυτές, σαφώς συντομότερες και ευκολότερες, βασισμένες σε θεωρήματα της κλασσικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Στόχος μας είναι να διευρύνουμε λίγο τον προβληματισμό γύρω από τον τρόπο αντιμετώπισης των συγκεκριμένων προβλημάτων, ώστε οι μέθοδοι τόσο της Αναλυτικής όσο και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας να μην αποτελούν παράλληλες οδούς που η μια αποκλείει την άλλη.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο βασικές προτάσεις

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ σε σημείο $M(x_o, y_o)$ με $x_o \neq 0$ τέμνει τον xx' σε σημείο $M'(-x_o, 0)$.

Απόδειξη:

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ σε σημείο $M(x_o, y_o)$ με $x_o \neq 0$ είναι $yy_o = p(x+x_o)$. Για $y = 0$ έχουμε $p(x+x_o) = 0$ οπότε $x = -x_o$ άρα $M'(-x_o, 0)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Έστω σημείο Α της παραβολής $y^2 = 2px$. Η εφαπτομένη στο Α τέμνει τον xx' στο Β. Η προβολή του Α στη διευθετούσα είναι το Γ. Τότε το ΕΑΓΒ είναι ρόμβος.

Απόδειξη:

Βλ. την λύση της άσκησης Β7 που ακολουθεί.

ΑΣΚΗΣΗ Β7

Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$. Φέρνουμε την εφαπτομένη της παραβολής στο Α, που τέμνει τον άξονα xx' στο Β και την παράλληλη από το Α στον άξονα xx' που τέμνει την διευθετούσα στο Γ. Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ρόμβος με κέντρο στον άξονα yy'.

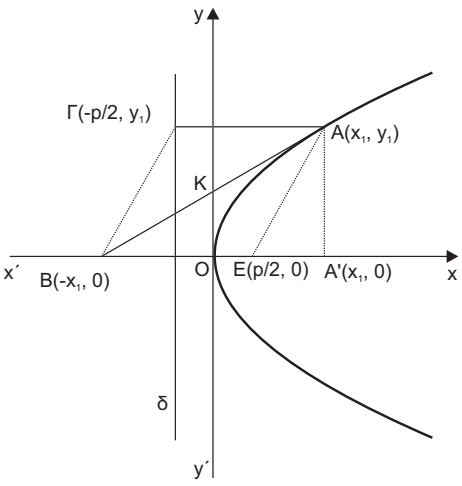
Λύση:

ΑΓ = ΑΕ (ορισμός παραβολής)

$BE = x_1 + \frac{p}{2} = A\Gamma$

ΒΕ // ΑΓ

Αρα ΒΕ //= ΑΓ άρα ΓΑΕΒ παραλληλόγραμμο και, αφού ΑΓ = ΑΕ,
το ΑΓΒΕ θα είναι ρόμβος
Στο τρίγωνο ΑΒΑ΄ το Ο είναι μέσο του ΒΑ΄ και ΟΚ // ΑΑ΄, άρα το Κ είναι μέσο του ΑΒ.
Άρα το κέντρο του ρόμβου ανήκει στον yy'.



ΑΣΚΗΣΗ Β2

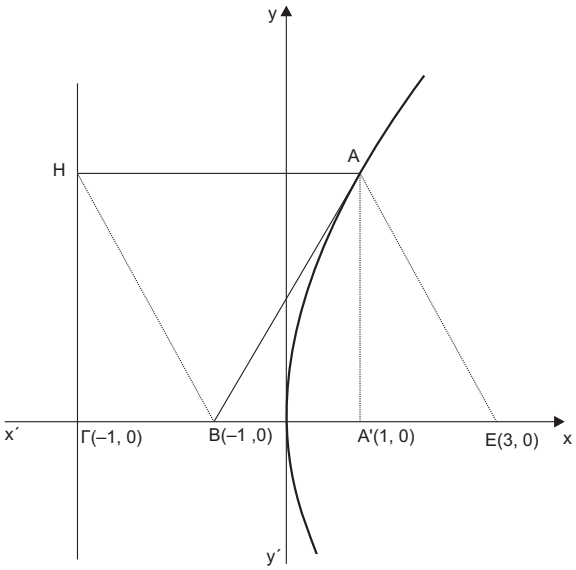
Έστω η παραβολή $y^2 = 12x$. Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο $A\left(1, 2\sqrt{3}\right)$ τέμνει τον xx΄ στο σημείο Β, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισόπλευρο.

Λύση:

Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με ΕΑ = ΕΒ αφού ΑΗΕΒ ρόμβος

Αλλά ισχύει και ΑΕ = ΑΒ αφού ΑΑ΄ μεσοκάθετος του ΒΕ.

Άρα ΑΒΕ ισόπλευρο



ΑΣΚΗΣΗ Β6

Αν η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο Α τέμνει τη διευθετούσα στο Β και τον άξονα yy΄ στο σημείο Κ να δειχθεί ότι: α) $\widehat{AEB} = 90^o$ β) $EK \perp AB$ γ) $EK^2 = KA \cdot KB$

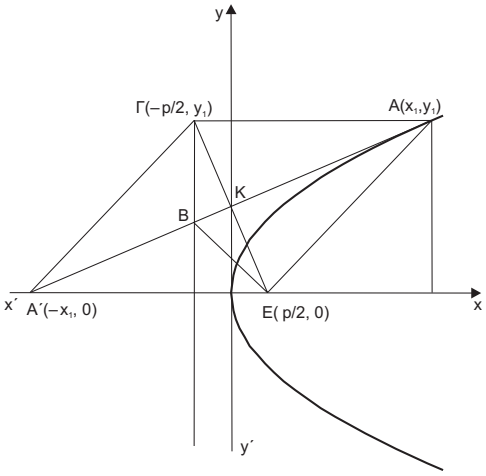
Λύση:

α) Από τη άσκηση Β7, προκύπτει ότι το ΑΕΑ΄Γ είναι ρόμβος. Τα τρίγωνα ΒΓΑ και ΒΕΑ είναι ίσα, αφού έχουν:

- ΑΓ = ΑΕ (ΑΓΒΕ ρόμβος)
- ΒΓ = ΒΕ (ΒΚ μεσοκάθετος του ΕΓ) και
- ΒΑ κοινή,

άρα είναι: $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{BEA} = 90°$.

β) Προφανές, αφού το ΑΓΑ΄Ε είναι ρόμβος

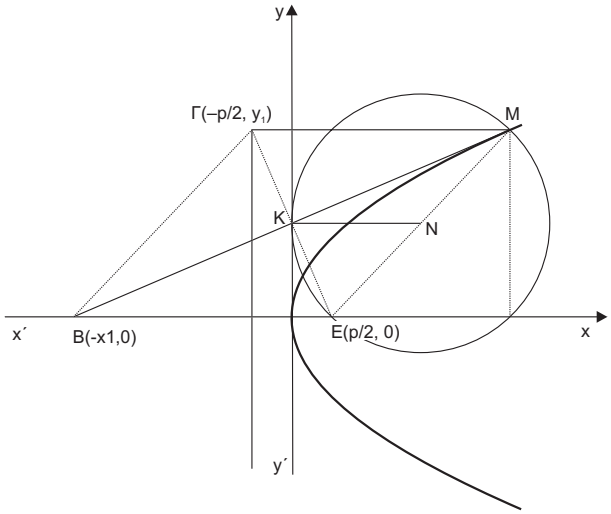


γ) Προφανές από τις *μετρικές σχέσεις* στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΑ με ΕΚ ύψος.

ΑΣΚΗΣΗ Β4

Έστω Μ σημείο της παραβολής $y^2 = 2px$. Να δειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ . όπου Ε η εστία της παραβολής εφάπτεται στον yy΄.

Λύση:



Έστω Ν το μέσον του ΕΜ.

Είναι: $\widehat{EKM}$ = 90°, άρα το Κ είναι σημείο του κύκλου με διάμετρο το ΕΜ.

Η διάμεσος ΚΝ είναι ίση με $\frac{ME}{2}$, άρα η ΚΝ είναι ακτίνα του κύκλου.

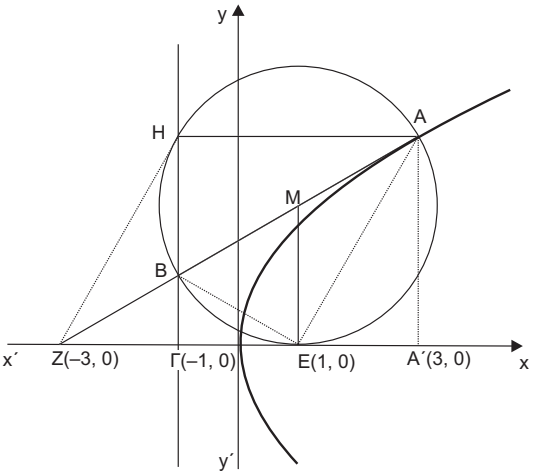
Στο τρίγωνο ΒΜΕ το ΚΝ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΒΜ και ΜΕ, άρα θα είναι παράλληλο στο xx΄, οπότε είναι κάθετο στον yy΄.

Έτσι, η απόσταση του κέντρου από τον yy΄ είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου, άρα ο κύκλος εφάπτεται στον yy΄.

ΑΣΚΗΣΗ Β3

Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$. Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A\left(3, 2\sqrt{3}\right)$ τέμνει την διευθετούσα στο σημείο Β, να δειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο το ΑΒ εφάπτεται στον άξονα xx΄ στην εστία της παραβολής.

Λύση:



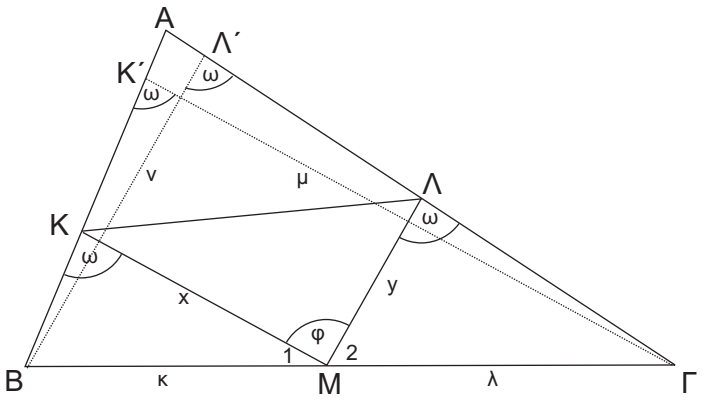
Στο τραπέζιο ΓΒΑΑ΄ το Ε είναι μέσον της ΓΑ΄ και η ΕΜ είναι κάθετη στον xx΄ οπότε είναι παράλληλη στον yy΄, που τέμνει την ΑΒ στο μέσον Μ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΑ (βλ. άσκηση Β6) η διάμεσος ΕΜ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$ = R. Η απόσταση του κέντρου Μ από τον xx΄ είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου άρα ο κύκλος εφάπτεται στον xx΄ στο Ε.

Ένα Μαθηματικό πρόβλημα, στα πλαίσια μιας ερευνητικής εργασίας

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ, που "κινείται" στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε τα τμήματα ΜΚ και ΜΛ, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοια ώστε $\widehat{ΒΚΜ} = \widehat{ΜΛΓ} = \widehat{ω}$, όπου $\widehat{ω}$ γωνία με το ίδιο σταθερό μέτρο για οποιαδήποτε θέση του Μ.
Να προσδιοριστεί η θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος του τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

- Το πρόβλημα προτάθηκε από τον ***Νίκο Κλαουδάτο***, δρ. Μαθηματικών, ειδικό επιστήμονα του τομέα Διδακτικής, τμ. Μαθηματικών, Παν. Αθηνών.
- Η λύση που διατυπώνεται, δόθηκε από τους:
  Δημήτρη Ντρίζο, μαθηματικό, M.ed., 6ο Ε.Λ. Τρικάλων.
  Χρήστο Πατήλα, μαθηματικό, Τρίκαλα.

ΛΥΣΗ:



Θεωρούμε τα τμήματα ΒΛ΄ // ΜΛ και ΓΚ΄ // ΜΚ.
Για οποιαδήποτε θέση του Μ στην πλευρά ΒΓ, τα τμήματα ΒΛ΄ και ΓΚ΄ είναι μοναδικά, οπότε το μήκος τους είναι σταθερό.

Επίσης, η γωνία $\widehat{ΚΜΛ}$ έχει σταθερό μέτρο, γιατί:

$$\begin{aligned}\widehat{ΚΜΛ} &= 180^\circ - \hat{M}_1 - \hat{M}_2 \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \hat{B} - \hat{\omega}) - 180^\circ - (180^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{\omega}) \\ &= \hat{B} + \hat{\Gamma} + 2\hat{\omega} - 180^\circ,\end{aligned}$$

που είναι γωνία σταθερού μέτρου, αφού $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ και $\hat{\omega}$ σταθερές.

Για λόγους απλοποίησης των συμβόλων, ονομάζουμε:

ΜΚ = x, ΜΛ = y, ΒΛ΄ = ν, ΓΚ΄ = μ, $\widehat{ΚΜΛ} = \varphi$, ΒΜ = κ, ΜΓ = λ,

όπου τα x, y, κ, λ, είναι μεταβλητές ποσότητες, αφού εξαρτώνται από τη θέση του Μ επί της ΒΓ, ενώ τα ν, μ είναι σταθερές και κ + λ = ΒΓ := α, α σταθερό.

Τα τρίγωνα ΓΜΛ και ΓΒΛ΄ είναι όμοια, άρα ισχύει:

$$\frac{y}{\nu} = \frac{\lambda}{\kappa + \lambda} \Leftrightarrow y = \frac{\nu\lambda}{\alpha} \Leftrightarrow y = \frac{\nu}{\alpha}(\alpha - \kappa)$$

Επίσης, τα τρίγωνα ΒΚΜ και ΒΚ΄Γ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{x}{\mu} = \frac{\kappa}{\kappa + \lambda} \Leftrightarrow x = \frac{\mu}{\alpha}\kappa$$

Στο τρίγωνο ΜΚΛ εφαρμόζουμε το θεώρημα των συνημιτόνων για την πλευρά ΚΛ.

$$\begin{aligned}ΚΛ^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \\ &= \frac{\mu^2}{\alpha^2}\kappa^2 + \frac{\nu^2}{\alpha^2}(\alpha - \kappa)^2 - 2\frac{\nu\mu}{\alpha^2}(\alpha\kappa - \kappa^2)\sigma\upsilon\nu\varphi \\ &= \frac{\mu^2}{\alpha^2}\kappa^2 + \nu^2 + \frac{\nu^2}{\alpha^2}\kappa^2 - 2\frac{\nu^2}{\alpha}\kappa - 2\frac{\nu\mu}{\alpha}\kappa \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + 2\frac{\nu\mu}{\alpha^2}\kappa^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi\end{aligned}$$

Δηλαδή, $ΚΛ^2 = \dfrac{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha^2} \cdot \kappa^2 - 2\dfrac{\nu^2 + \mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha} \cdot \kappa + \nu^2$: (1)

Παρατηρούμε ότι το $ΚΛ^2$ εκφράζεται ως τριώνυμο 2ου βαθμού ως προς κ, με συντελεστή του κ^2 το $\dfrac{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha^2}$.

Ομως, $\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = (\mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu) + (2\mu\nu + 2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi) =$

$= (\mu - \nu)^2 + 2\mu\nu(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) > 0$, αφού $\sigma\upsilon\nu\varphi > -1$.

Επομένως, το ΚΛ^2 παίρνει ελάχιστη τιμή όταν: $\kappa = -\frac{B}{2A}$, δηλαδή:

$$\kappa = \frac{\frac{2\left(\nu^2 + \mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi\right)}{\alpha}}{\frac{2\left(\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi\right)}{\alpha^2}} = \frac{\alpha\nu^2 + \alpha\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Δηλαδή, το ΚΛ γίνεται ελάχιστο, όταν το σημείο Μ απέχει από την κορυφή Β σταθερή απόσταση ίση με: $\frac{\alpha\nu^2 + \alpha\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$.

Τέλος, στα πλαίσια της πάγιας ερευνητικής πρακτικής, που θέλει να εξετάζουμε κατά πόσον όλα τα αποτελέσματα που βρίσκουμε, μετά από μια μαθηματική επεξεργασία, ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του προβλήματος, θέτουμε το ερώτημα:

Μήπως υπάρχει περίπτωση η τιμή του κ, που υπολογίσαμε, μνα μην αντιστοιχεί πάντα σε σημείο Μ του τμήματος ΒΓ, αλλά το Μ να είναι εξωτερικό σημείο της προέκτασης του ΒΓ;

Για το λόγο αυτό, απαιτείται να διερευνηθεί αν ισχύει πάντα:

$$0 < \kappa < \alpha \quad \text{ή} \quad 0 < \frac{\alpha\nu^2 + \alpha\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} < \alpha$$

και επειδή αποδείξαμε ήδη ότι $\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi > 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$0 < \alpha\nu^2 + \alpha\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi < \alpha(\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi),$$

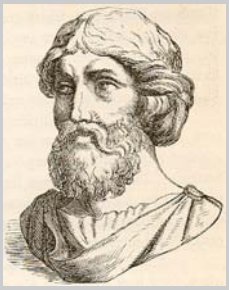
που οδηγούν στις: $\sigma\upsilon\nu\varphi > -\frac{\nu}{\mu}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi > -\frac{\mu}{\nu}$.

ΑΝΟΙΚΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑ:

Υπάρχει γωνία φ: $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, με $\sigma\upsilon\nu\varphi > -\frac{\nu}{\mu}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi > -\frac{\mu}{\nu}$,

που να αντιστοιχεί σε σημείο Μ, που δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΒΓ;

Οι συντάκτες του άρθρου θα δεχτούμε με ιδιαίτερη χαρά, στα πλαίσια ενός διαλόγου, διάφορες άλλες λύσεις του προβλήματος: αλγεβρικές, γεωμετρικές και με διαδικασίες υπολογιστή.



ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΕΣ ΤΡΙΑΔΕΣ

Σβέρκος Ανδρέας
Μαθηματικός, Συγγραφέας,
Master Ε.Μ.Π., Βαρβάκειο Λύκειο

Οι περισσότεροι μαθητές μας γνωρίζουν ότι οι ακέραιοι 3, 4, 5 επαληθεύουν την ισότητα $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ του Πυθαγορείου Θεωρήματος, όπου τα β και γ είναι τα μήκη των κάθετων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου και α είναι το μήκος της υποτείνουσάς του.

Συγκριτικά λιγότεροι μαθητές γνωρίζουν ότι και οι ακέραιοι 5, 12 και 13 ικανοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα, και ακόμα λιγότεροι μπορούν να δώσουν τις πλευρές ενός τρίτου ορθογώνιου τριγώνου, μη όμοιου με τα προηγούμενα, με πλευρές ακέραιους αριθμούς, για παράδειγμα 7, 24 και 25.

Το να βρούμε δυο ακεραίους των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων είναι επίσης τετράγωνο ακεραίου, είναι ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα που έχει απασχολήσει τους Μαθηματικούς από την αρχαιότητα (και επέκτασή του είναι το πρόβλημα της “εικασίας” του Fermat).

Βέβαια στα σχολικά βιβλία της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου αναφέρεται η ταυτότητα $\left(x^2 - y^2\right)^2 + \left(2xy\right)^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2$, που παρέχει τη δυνατότητα προσδιορισμού τριάδων που επαληθεύουν την ισότητα $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, αλλά ούτε οι στόχοι του προγράμματος ούτε ο χρόνος επιτρέπουν μια βαθύτερη εξέταση του ζητήματος αυτού.

Στη συνέχεια θα «ανακαλύψουμε» τους τύπους που μας δίνουν τριάδες θετικών ακεραίων οι οποίοι είναι τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου και λέγονται **Πυθαγόρειες τριάδες** και θα αποδείξουμε μερικές ιδιότητές τους. Στη μελέτη αυτή εμπλέκονται από τη σχολική ύλη η Άλγεβρα, η Γεωμετρία, η Τριγωνομετρία και η Θεωρία αριθμών. Αποδεικνύεται έτσι ότι τα Μαθηματικά είναι ενιαία.

I. Έστω λοιπόν ότι οι ακέραιοι β, γ και α σχηματίζουν μια πυθαγόρεια τριάδα. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = 1$$

Αν θέσουμε $\frac{\beta}{\alpha} = x$ και $\frac{\gamma}{\alpha} = y$,τότε $x^2 + y^2 = 1$ (2)

με τους x, y ρητούς (ως πηλίκα ακεραίων).

Αναζητούμε λοιπόν τα ζεύγη ρητών αριθμών (x, y) που επαληθεύουν την (2). Όμως η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση του τριγωνομετρικού κύκλου. Επομένως αναζητούμε σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου με ρητές συντεταγμένες.

Γνωρίζουμε ότι αν το σημείο Μ(x, y) ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε:

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta \text{ και } y = \eta\mu\theta.$$

Όμως $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}}$ και $\eta\mu\theta = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}}$

(«Άλγεβρα Β΄Λυκείου », σελ.35)

Αν θέσουμε $\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2} = t$, τότε $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ και $y = \frac{2t}{1+t^2}$, οπότε η (2) παίρνει τη μορφή:

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1 \quad \text{ή} \quad \left(1-t^2\right)^2 + \left(2t\right)^2 = \left(1+t^2\right)^2.$$

Αν $t = \frac{\mu}{\nu}$, μ, ν ακέραιοι, τότε:

$$\left(1-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\right)^2 + \left(2\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\right)^2 = \left(1+\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\right)^2$$

και μετά την εκτέλεση των πράξεων έχουμε:

$$\boldsymbol{\left(\mu^2 - \nu^2\right)^2 + \left(2\mu\nu\right)^2 = \left(\mu^2 + \nu^2\right)} \qquad (3)$$

όπου οι ακέραιοι μ, ν επιλέγονται αυθαίρετα.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται μερικές πυθαγόρειες τριάδες που προκύπτουν από μικρές τιμές των μ και ν:

μ	ν	β	γ	α
		$\mu^2 - \nu^2$	2μν	$\mu^2 + \nu^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85

Μια πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή του παραπάνω τύπου είναι η εξής:

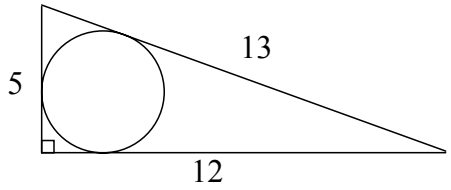
Αν οι πλευρές ενός τριγώνου σχηματίζουν πυθαγόρεια τριάδα, τότε η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι ακέραιος αριθμός.

Πράγματι, από τους τύπους του εμβαδού τριγώνου έχουμε:

$$\frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\rho(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\rho = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\rho = \frac{(\mu^2-\nu^2)(2\mu\nu)}{\mu^2+\nu^2+2\mu\nu+\mu^2-\nu^2} = \nu(\mu-\nu),\ \text{που είναι ακέραιος.}$$



ρ=2

Για παράδειγμα, στο ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 5, 12 και 13 η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι ίση με ρ = 2. (*)

(*) **Σημείωση Σ.Ε.**: Αποδεικνύεται ότι κάθε ακέραια λύση της $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ δίνεται από τους τύπους: $\beta = 2\mu\nu\cdot\frac{\kappa}{\Delta}$, $\gamma = (\mu^2 - \nu^2)\cdot\frac{\kappa}{\Delta}$, $d = (\mu^2 + \nu^2)\cdot\frac{\kappa}{\Delta}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$, (εδώ $\kappa\in\mathbb{N}^*$) και Δ ο Μ.Κ.Δ. των $2\mu\nu$, $\mu^2 - \nu^2$, $\mu^2 + \nu^2$. Με τις τιμές αυτές για τα β, γ, α, προκύπτει: $\rho = \nu(\mu - \nu)\cdot\frac{\kappa}{\Delta}$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$.

II. Αν $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, τότε και $(\lambda\beta)^2 + (\lambda\gamma)^2 = (\lambda\alpha)^2$, που σημαίνει ότι από μια Πυθαγόρεια τριάδα μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρες που αντιστοιχούν σε όμοια ορθογώνια τρίγωνα.
Ενδιαφέρον επομένως παρουσιάζουν εκείνες οι πυθαγόρειες τριάδες (β, γ, α) με (β, γ, α) = 1, τις οποίες θα ονομάζουμε **Αρχικές Πυθαγόρειες Τριάδες** .

Για τις τριάδες αυτές ισχύουν οι παρακάτω απλές προτάσεις:

(i) Σε μια αρχική πυθαγόρεια τριάδα (β, γ, α) ο ένας από τους β και γ είναι άρτιος και ο άλλος είναι περιττός.

Πράγματι, αν ήταν $\beta = 2\kappa+1$ και $\gamma = 2\lambda+1$, τότε από την $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ θα είχαμε $4\left(\kappa^2 + \kappa + \lambda^2 + \lambda\right) + 2 = \alpha^2$, δηλαδή ο α^2 είναι άρτιος που σημαίνει ότι και ο α είναι άρτιος.
Αν λοιπόν $\alpha = 2\rho$, τότε $4\left(\kappa^2 + \kappa + \lambda^2 + \lambda\right) + 2 = 4\rho^2$.

Επομένως ο αριθμός 4 διαιρεί το πρώτο μέλος της τελευταίας ισότητας που είναι άτοπο.
(*Συνέπεια της πρότασης αυτής είναι ότι ο α είναι περιττός*)

(ii) Αν σε μια αρχική πυθαγόρεια τριάδα (β, γ, α) ο ακέραιος β ή ο ακέραιος γ είναι άρτιος, τότε είναι πολλαπλάσιο του 4.

Πράγματι, αν $\beta = 2\kappa$, $\gamma = 2\lambda + 1$ και $\alpha = 2\rho + 1$, τότε από την $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ έχουμε $\left(2\kappa\right)^2 = \left(2\rho+1\right)^2 - \left(2\lambda+1\right)^2$ και μετά την εκτέλεση των πράξεων $\kappa^2 = \rho\left(\rho+1\right) - \lambda\left(\lambda+1\right)$.

Όμως τα γινόμενα $\rho(\rho + 1)$ και $\lambda(\lambda + 1)$ είναι άρτιοι (ως γινόμενα δυο διαδοχικών ακεραίων) , οπότε και η διαφορά τους κ^2 είναι άρτιος, επομένως και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή $\kappa = 2t$.
Τότε όμως έχουμε $\beta = 2\cdot 2t = 4t$.

(Οι ιδιότητες (i) και (ii) διαπιστώνουμε ότι ισχύουν στις τριάδες που αναφέρονται στον παραπάνω πίνακα).

Βιβλιογραφία:

[1] *Elementary Number Theory*, David M. Burton
[2] *Recreations in the Theory of Numbers*, Albert H. Beiler
[3] *Η Γοητεία των Μαθηματικών* , Serge Lang

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ

Ιωσηφίδης Γιώργος
Μαθηματικός, Βέροια

ΣΧΟΛΙΟ Σ.Ε.

Η Στατιστική ως μάθημα των προσεγγίσεων και των παραδοχών δεν αρέσει ιδιαίτερα στους Μαθηματικούς που επιζητούν αυστηρούς ορισμούς εννοιών και αξιωματική θεμελίωση θεωριών. Αυτό αποδεικνύεται και από το μικρό γενικά ενδιαφέρον των αναγνωστών του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, αφού για την Γ΄ Λυκείου προτιμούν να μας στέλνουν ασκήσεις ανάλυσης ή μιγαδικών. Λόγω της μη αυστηρής θεμελίωσης της Στατιστικής οι συζητήσεις δεν προκαλούν ενδιαφέρον. Νομίζουμε όμως ότι το παρακάτω άρθρο του συναδέλφου μας Γιώργου Ιωσηφίδη μας δίνει τη δυνατότητα και την αφορμή για συζητήσεις που και ο ίδιος επιζητεί μέσω των στηλών του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

Παραθέτουμε παρακάτω το άρθρο και περιμένουμε τις απόψεις και τα σχόλιά σας για να τα δημοσιεύσουμε στα επόμενα τεύχη του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

Ο όρος «παράδοξα» ίσως είναι αδόκιμος στη Στατιστική, αφού το όλο πνεύμα του μαθήματος αυτού είναι οι προσεγγίσεις και οι παραδοχές. Επομένως διαφορές και διαφωνίες θα υπάρχουν. Πρέπει όμως όλες οι απόψεις να βρίσκονται μέσα σε ορισμένα πλαίσια και να μη συγκρούονται άμεσα, να υπάρχει δηλαδή μια κοινή παραδοχή ότι όλες οι απόψεις αν και δεν είναι ταυτόσημες συγκλίνουν.

Ως παράδοξο θα χαρακτηρίζαμε εδώ ένα αποτέλεσμα που έρχεται σε αντίθεση με τη λογική, ή δύο αποτελέσματα που έρχονται σε πλήρη αντίθεση μεταξύ τους. Δύο τέτοια παράδοξα είναι τα παρακάτω:

1. ΔΙΑΣΠΟΡΑ:

Το πιο συνηθισμένο μέτρο διασποράς μιας ποσοτικής μεταβλητής είναι η **διακύμανση** ή **μέση τετραγωνική απόκλιση**.

Αν $t_1, t_2,\ldots,t_v$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X, με μέση τιμή $\bar{x}$, η διακύμανσή της ορίζεται ως εξής:

$$V_x=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(t_i-\bar{x})^2$$ (*σχολ. βιβλίο Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας*)

Το μέτρο αυτό δεν είναι μοναδικό. Ένα άλλο μέτρο (που υπήρχε στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο και δεν υπάρχει στο τωρινό) είναι η **μέση απόλυτη απόκλιση** που ορίζεται ως εξής: $W_x=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}\left|t_i-\bar{x}\right|$

Σε δείγματα του ίδιου μεγέθους ν, με τα μέτρα διασποράς βρίσκουμε σε ποιο οι τιμές είναι περισσότερο ή λιγότερο διασκορπισμένες γύρω από τη μέση τιμή. Αν Α και Β είναι δύο δείγματα και με κάποιο μέτρο διασποράς V βρούμε $V_A>V_B$ αναμένουμε και με οποιοδήποτε άλλο μέτρο W να είναι $W_A>W_B$. Δεν μπορούμε δηλαδή να δεχτούμε ότι με το ένα μέτρο η διασπορά του Α είναι μεγαλύτερη από τη διασπορά του Β και με το άλλο μέτρο είναι μικρότερη.
Το παρακάτω παράδειγμα όμως δείχνει ότι αυτό όχι μόνο είναι δυνατό, αλλά είναι και πολύ συνηθισμένο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Η επίδοση έξι μαθητών Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σε 5 μαθήματα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ	**ΜΑΘΗΤΕΣ**					
	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Ε**	**Ζ**
Γλώσσα	12	13	10	11	11	12
Άλγεβρα	13	13	15	12	13	13
Γεωμετρία	16	14	15	15	17	14
Φυσική	17	17	15	18	17	17
Χημεία	17	18	20	19	17	19
Μέση τιμή	15	15	15	15	15	15
Διακύμανση (V)	4,4	4,4	10	10	6,4	6,8
Μέση απόλυτη απόκλιση (W)	2	2	2	2,8	2,4	2,4

Παρατηρούμε ότι:

α) οι μαθητές Α και Β έχουν το ίδιο μέτρο V και το ίδιο μέτρο W όπως είναι πολύ λογικό.

β) για τους μαθητές Α και Ε είναι $V_A<V_E$ και $W_A<W_E$ που είναι επίσης λογικό.

γ) οι μαθητές Γ και Δ έχουν το ίδιο μέτρο V, δηλαδή $V_Γ = V_Δ$ αλλά $W_Γ < W_Δ$.

δ) οι μαθητές Ε και Ζ έχουν το ίδιο μέτρο W, δηλαδή $W_E = W_Z$ αλλά $V_E < V_Z$

ε) για τους μαθητές Γ και Ε ενώ $V_Γ > V_E$ είναι $W_Γ < W_E$, που δεν είναι καθόλου λογικό.

Ποιο μέτρο λοιπόν εκτιμά σωστά τη διασπορά; Μπορούμε να θεωρήσουμε την ασυμφωνία αυτή ως παράδοξο;

2. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

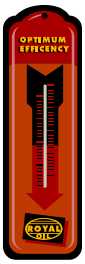
Έστω μια ποσοτική μεταβλητή X της οποίας η μέση τιμή είναι $\overline{x} \neq 0$ και η τυπική απόκλιση s. Σαν συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας ορίζεται (στο σχολικό βιβλίο) το πηλίκο $CV = \frac{s}{|\overline{x}|}$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι ένα μέτρο σχετικής διασποράς. Δείχνει πόσο μεγάλη είναι η διασπορά σε σχέση με τη μέση τιμή.

Έτσι, αν για τα δύο δείγματα Α και Β είναι $s_A = s_B = 12$ και $\overline{x_A} = 100$, $\overline{x_B} = 200$, η σχετική διασπορά του Α είναι μεγαλύτερη από τη σχετική διασπορά του Β. Λέμε τότε ότι το δείγμα Β είναι πιο ομοιογενές από το Α.

Πόσο αξιόπιστο όμως είναι το μέτρο αυτό; Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι ένα τέτοιο μέτρο δεν είναι καθόλου αξιόπιστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



Μετρήσαμε με ένα θερμόμετρο ακριβείας τις ελάχιστες θερμοκρασίες σε δύο πόλεις Α και Β σε βαθμούς Κελσίου κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας και υπολογίσαμε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής και για τις δύο. Τα αποτελέσματα αυτά δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Ημέρα	Θερμοκρασίες πόλεων (C)	
	Α	Β
ΔΕΥ	-1,56	-6,23
ΤΡΙ	-1,38	-5,14
ΤΕΤ	-1,13	-3,31
ΠΕΜ	-0,32	3,27
ΠΑΡ	1,15	4,93
ΣΑΒ	1,60	6,14
ΚΥΡ	1,71	7,34
Μέση τιμή	0,01	1,00
Τυπική απόκλιση	1,34	5,29
CV	133,75	5,29

Δηλαδή, ενώ στην πόλη Α οι θερμοκρασίες κυμαίνονται μεταξύ στενών ορίων (από –1,56 ως 1,71) και βρίσκονται πολύ κοντά στη μέση τιμή τους (0,01), ο συντελεστής μεταβολής είναι πολύ μεγάλος (CV_A = 133,75 ή 13.375%).
Αντίθετα στην πόλη Β οι θερμοκρασίες έχουν μεγαλύτερο εύρος (από –6,23 ως 7,34), είναι πιο απομακρυσμένες από τη μέση τιμή τους, επομένως έχουμε μεγαλύτερη διασπορά, αλλά η σχετική διασπορά είναι πολύ μικρότερη (CV_B = 5,29 ή 529%). Δηλαδή το δεύτερο δείγμα είναι πιο ομοιογενές από το πρώτο. Είναι αυτό παράδοξο ή όχι;

Ας προχωρήσουμε όμως πιο πέρα. Ας δούμε τι θα έλεγε ένας Βρετανός ή ένας Αμερικανός. Στη Βρετανία και την Αμερική οι θερμοκρασίες μετριούνται με την κλίμακα Φαρενάιτ. Ο τύπος μετατροπής από βαθμούς Κελσίου (C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (F) είναι: F = 1,8C + 32.
Ο προηγούμενος πίνακας σε βαθμούς Φαρενάιτ είναι τώρα ο παρακάτω:

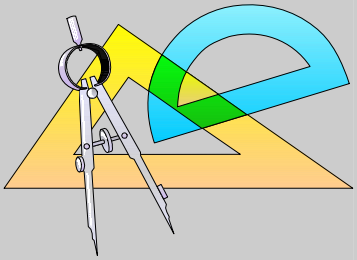
Ημέρα	**Θερμοκρασίες πόλεων (F)**	
	A	**B**
ΔΕΥ	29,19	20,79
ΤΡΙ	29,52	22,75
ΤΕΤ	29,97	26,04
ΠΕΜ	31,42	37,89
ΠΑΡ	34,07	40,87
ΣΑΒ	34,88	43,05
ΚΥΡ	35,08	45,21
Μέση τιμή	32,02	33,80
Τυπική απόκλιση	2,41	9,52
CV	0,075	0,282

Με θερμόμετρο λοιπόν Φαρενάιτ το πρώτο δείγμα είναι πολύ πιο ομοιογενές από το δεύτερο αφού CV_A = 7,5% και CV_B = 28,2%. Μάλιστα δε, η μεταβολή του CV_A από 13.375% σε 7,5% < 10% ώστε τώρα το δείγμα να θεωρείται ομοιογενές είναι τεράστια. Είναι αυτό παράδοξο; Μπορεί η ομοιογένεια του δείγματος να εξαρτιέται από το είδος του οργάνου με το οποίο θα μετρήσουμε;
Τελικά με ποιο θερμόμετρο πρέπει να μετρούμε τις θερμοκρασίες για να έχουμε αξιόπιστα στατιστικά δεδομένα; Αν δεχτούμε ότι πράγματι το πρώτο δείγμα (θερμοκρασία της πόλης Α) είναι πιο ομοιογενές από το δεύτερο –όπως και η κοινή λογική απαιτεί–, νομίζω ότι μπορώ να κάνω την προτροπή:

ΑΛΛΑΞΤΕ ΤΑ ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΑ ΣΑΣ!

Εύρεση των εστιών των κωνικών τομών από το περίγραμμά τους

Απλακίδης Α. Ιωάννης
Μαθηματικός, Βέροια



ΠΕΡΙΛΗΨΗ

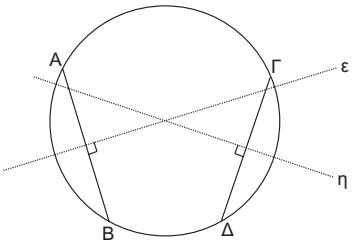
Από τον κλασσικό ορισμό των κωνικών τομών, (δηλαδή τομή κώνου με επίπεδο), προκύπτει μόνο το περίγραμμα της κωνικής τομής. Αυτό σημαίνει ότι οι εστίες δεν είναι πρωτογενή στοιχεία του ορισμού τους. Με την εργασία που ακολουθεί θα δείξουμε πως μπορούμε να βρούμε την εστία κάθε κωνικής τομή (για τον κύκλο το κέντρο του) μόνο από το περίγραμμά της.

Α. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1η

Η μεσοκάθετη κάθε χορδής κύκλου διέρχεται από το κέντρο του.

Έστω δύο μη παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ του κύκλου. Οι μεσοκάθετες (ε) και (η) αντίστοιχα θα διέρχονται από το κέντρο του κύκλου.
Άρα το σημείο τομής των μεσοκαθέτων είναι το κέντρο του κύκλου.

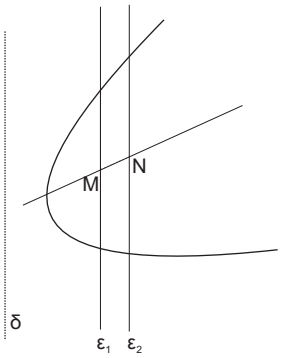


Β. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΣΤΙΑΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΤΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ 2η

Τα μέσα των χορδών μιας παραβολής που είναι παράλληλες προς μια ευθεία δ βρίσκονται σε ευθεία ε που είναι παράλληλη προς τον άξινα συμμετρίας της

Απόδειξη:



Έστω $y^2 = 2px$ η εξίσωση της παραβολής.

Αν λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας δ και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τα σημεία τομής μιας από τις παράλληλες χορδές προς τη δ με την παραβολή θα είναι: $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $y_2^2 = 2px_2$, $y_1^2 = 2px_1$

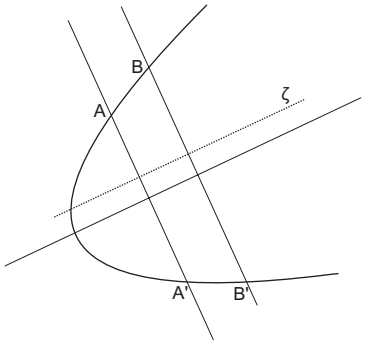
και, με αφαίρεση κατά μέλη, προκύπτει:

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \lambda \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} = p \Leftrightarrow \lambda \cdot y_M = p,$$

όπου y_M η τεταγμένη του μέσου της χορδής ΑΒ.

Άρα το y_M είναι σταθερό, επομένως το Μ κινείται σε ευθεία: $y = \frac{p}{\lambda}$ // xx΄

Θεωρούμε, επομένως, δύο ευθείες ε_1 // ε_2 // δ και τα μέσα των χορδών της παραβολής Μ και Ν αντίστοιχα.

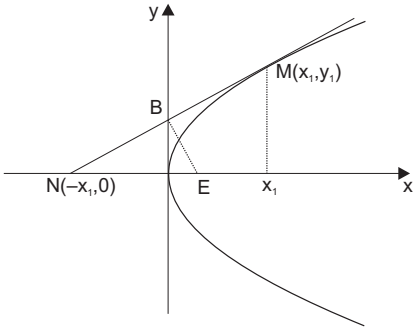


Σύμφωνα με την Πρόταση 2, τα Μ, Ν ορίζουν ευθεία παράλληλη προς στον άξονα συμμετρίας της παραβολής.

Εστω δύο παράλληλες χορδές ΑΑ΄ και ΒΒ΄ της παραβολής κάθετες στην ευθεία ζ.

Τα μέσα των χορδών ορίζουν ευθεία που είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής αφού τότε Α, Α΄ και Β, Β΄ είναι συμμετρικά ως προς τη ζ.

Το σημείο τομής του άξονα αυτού με την παραβολή είναι η κορυφή της.



Έστω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με την παραβολή $y^2 = 2px$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3η

Έστω $M(x_1, y_1)$ σημείο της και $N(-x_1,0)$. Τότε το τμήμα ΜΝ εφάπτεται στην παραβολή στο Μ.

Απόδειξη:

Η εφαπτομένη της παραβολής στο $M(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p(x + x_1)$.
Για $y = 0$ έχουμε $x = -x_1$, δηλαδή η εφαπτομένη τέμνει τον xx' στο $N(-x_1,0)$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο Μ τέμνει τον yy' στο $B\left(0, \frac{px_1}{y_1}\right)$ ή $B\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4η

Η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο τομής Β με τον yy' τέμνει τον xx' σε σημείο Ε που είναι η εστία της παραβολής.

Απόδειξη:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της παραβολής στο $M(x_1,y_1)$ είναι $\lambda = \frac{p}{y_1}$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της καθέτου είναι $\lambda' = -\frac{y_1}{p}$.
Επομένως η εξίσωση της κάθετης στο Β είναι:

$$y - \frac{y_1}{2} = -\frac{y_1}{p}(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1}{2}$$

Για $y = 0$ έχουμε $\frac{y_1}{p}x = \frac{y_1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{p}{2}$.

Άρα η κάθετη της εφαπτομένης στο σημείο τομής της Β με τον yy' τέμνει τον xx' στο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, που είναι η εστία της παραβολής.

Γ. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΣΤΙΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΤΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ 5η

Τα μέσα των χορδών μιας έλλειψης που είναι παράλληλες προς μια ευθεία δ βρίσκονται σε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της. (Ως κέντρο της έλλειψης ορίζουμε το κέντρο συμμετρίας της).

Απόδειξη:

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Τότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εύθειας δ (με δ μη παράλληλη στον yy') και M_1M_2 μια χορδή παράλληλη προς τη δ με $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

Θα ισχύει $\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2}=1$.

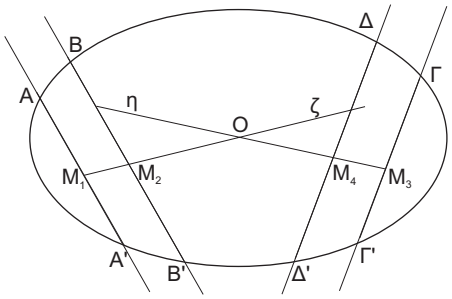
Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\alpha^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{\beta^2}=0\,.$$

Όμως $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\lambda$ άρα $\frac{(x_1+x_2)}{\alpha^2}+\lambda\frac{(y_1+y_2)}{\beta^2}=0 \Leftrightarrow \frac{2x_M}{\alpha^2}+\lambda\frac{2y_M}{\beta^2}=0$,

όπου x_M και y_M οι συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος M_1M_2.

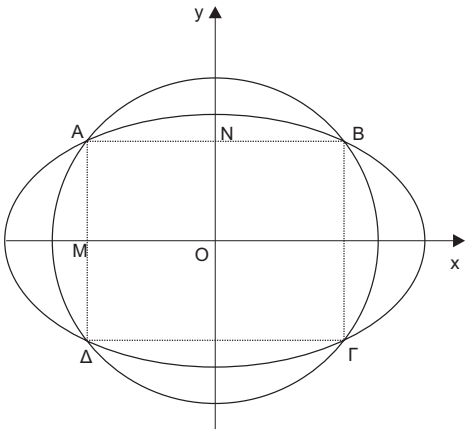
Έτσι το Μ επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας $\frac{2}{\alpha^2}x-\lambda\frac{2}{\beta^2}y=0$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0, 0).



Έστω δύο παράλληλες χορδές ΑΑ΄ και ΒΒ΄. Τα μέσα τους M_1 και M_2 ορίζουν ευθεία (ζ) που διέρχεται από το κέντρο της έλλειψης.
Θεωρούμε δύο άλλες παράλληλες χορδές ΔΔ΄ και ΓΓ΄. Τα μέσα M_4, M_3 ορίζουν ευθεία (η) που διέρχεται επίσης από το κέντρο της έλλειψης.
Άρα το σημείο τομής των ευθειών (ζ) και (η) θα είναι το κέντρο της έλλειψης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6η

Ο κύκλος (Ο, R) τέμνει την έλλειψη σε τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ που είναι κορυφές ορθογωνίου.



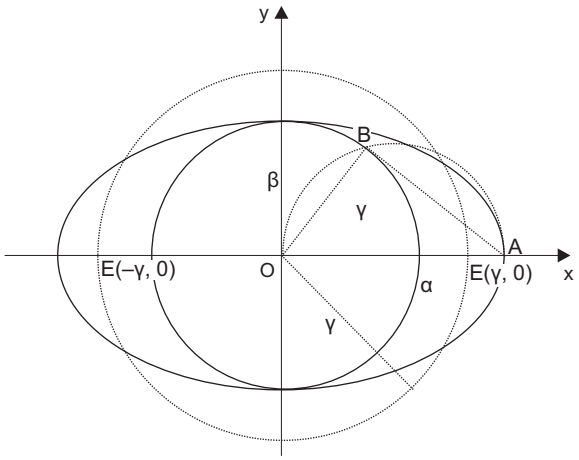
Απόδειξη:

Τα σημεία Α, Γ είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο Ο της έλλειψης άρα και ως προς τι κέντρο Ο του κύκλου. Επομένως είναι αντιδιαμετρικά.
Για τον ίδιο λόγο και τα σημεία Β,Δ είναι αντιδιαμετρικά.

Τότε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες.
Αν Μ είναι το μέσον της χορδής ΑΔ τότε το ΟΜ είναι μεσοκάθετη του ΑΔ. Αρα Α,Δ συμμετρικά ως προς το ΟΜ. Επομένως το ΟΜ ορίζει τον έναν άξονα συμμετρίας της έλλειψης. Για τον ίδιο λόγο το ΟΝ ορίζει τον δεύτερο άξονα συμμετρίας της έλλειψης.

Έστω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Με γνωστά τα μήκη α, β των δύο ημιαξόνων κατασκευάζουμε τμήμα γ τέτοιο ώστε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

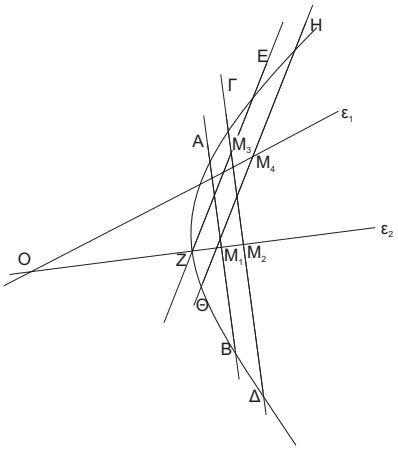


Θεωρούμε το ημικύκλιο διαμέτρου α. Ο κύκλος (Ο, β) τέμνει το ημικύκλιο στο Β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι ΟΒ = β και ΟΑ = α άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ΑΒ = γ
Ο κύκλος (Ο, γ) θα τέμνει τον xx΄ στα σημεία Ε΄(–γ, 0), Ε(γ, 0), που είναι οι εστίες της έλλειψης,

Δ. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΣΤΙΩΝ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΤΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ 7η

Τα μέσα των χορδών μιας υπερβολής που είναι παράλληλες προς μια διεύθυνση δ βρίσκονται σε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της. (Ως κέντρο της υπερβολής ορίζουμε το κέντρο συμμετρίας της)

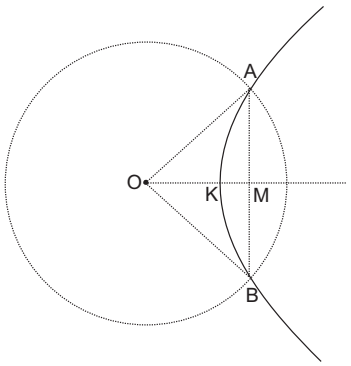


Απόδειξη:

Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 5.

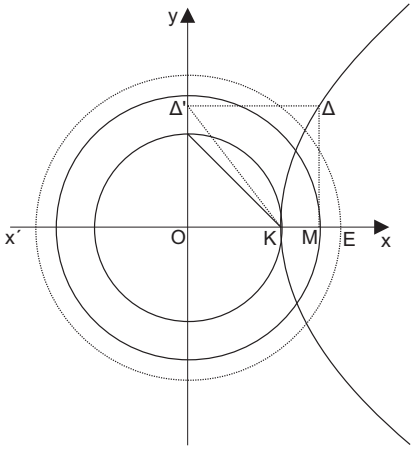
Έστω δύο παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ της υπερβολής. Τότε τα μέσα τους M_1, M_2 ορίζουν ευθεία ε_1 που διέρχεται από το κέντρο της υπερβολής.

Όμοια τα μέσα M_3 και M_4 των ΕΖ και ΗΘ ορίζουν ευθεία ε_2 που διέρχεται από το κέντρο της υπερβολής. Το σημείο τομής των ε_1, ε_2 είναι το κέντρο της υπερβολής.



Θεωρούμε κύκλο (Ο, R), που τέμνει την υπερβολή στα Α,Β. Τα Α,Β είναι συμμετρικά ως προς τη μεσοκάθετη ΟΜ του ΑΒ. Αρα η ΟΜ είναι ο άξονας συμμετρίας της υπερβολής. Το σημείο τομής της υπερβολής με την ΟΜ θα είναι η κορυφή της Κ.

Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ΟΚ = α.
Έστω ο κύκλος (Ο, ΟΚ) που τέμνει τον yy΄ στο Λ. Τότε ΛΚ = $\alpha\sqrt{2}$.
Θεωρούμε κύκλο (Ο, ΛΚ) που τέμνει τον xx΄ στο $M\left(\sqrt{2}, 0\right)$.
Από το Μ υψώνω κάθετο που τέμνει την υπερβολή στο $\Delta\left(\alpha\sqrt{2}, 0\right)$, αφού η εξίσωση



$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για $x = \alpha\sqrt{2}$ γίνεται:

$$\frac{2\alpha^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow y = \pm\beta.$$

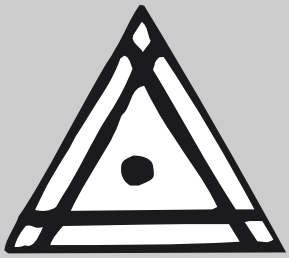
Έστω Δ΄ η προβολή του Δ στον yy΄, δηλαδή Δ΄(0, β).
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔ΄Κ ισχύει:

$$\Delta'K^2 = \Delta'O^2 + OK^2 \Rightarrow \Delta'K = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} = \gamma.$$

Θεωρούμε τον κύκλο (Ο, Δ΄Κ) που τέμνει τον xx΄ στο Ε(γ, 0), δηλαδή τα Ε΄ και Ε είναι οι εστίες της υπερβολής.

Βιβλιογραφία

- ΚΑΣΤΑΝΗΣ Ν. (1999), *Δίνεται το περίγραμμα μιας έλλειψης πως μπορούμε να προσδιορίσουμε τις εστίες της;* **Διάσταση 1-2**,1999
- Γ. ΚΑΡΕΚΛΙΔΗΣ, *Αναλυτική Γεωμετρία* (*Κωνικές Τομές), εκδ. ΑΝΙΚΟΥΛΑ.*



Επεκτάσεις – Γενικεύσεις της πρότασης του "Ισοπλεύρου Τριγώνου"

Κυριαζής Νίκος
Θεσσαλονίκη

1. Γενικά

Στην εργασία μας αυτή γίνεται προσπάθεια να παρουσιάσουμε, στον περιορισμένο χώρο που έχουμε, όσο το δυνατόν περισσότερες επεκτάσεις – γενικεύσεις της άσκησης, που το περιοδικό "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ" έδωσε στο πρώτο τεύχος του, σελ. 70, και για την οποία εμείς δώσαμε δύο νέες αποδείξεις, τις οποίες δημοσίευσε το ίδιο περιοδικό στο δεύτερο τεύχος του (σελ. 112).

Πιο συγκεκριμένα, παρακάτω δίνουμε απαντήσεις στις Προτάσεις που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις, οι οποίες ακολουθούν τις δύο παραπάνω αναφερόμενες αποδείξεις και όχι μόνο.

Όπου παρακάτω θα αναφέρουμε: "Πρόταση του Ισοπλεύρου Τριγώνου", θα εννοούμε την παραπάνω άσκηση, όπως διατυπώνεται στο δεύτερο τεύχος του περιοδικού "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ", σελ. 112, και θα τη συμβολίζουμε με τα αρχικά "ΠΙΤ".

2. Επεκτάσεις – Γενικεύσεις της "ΠΙΤ"

α. Επέκταση της "ΠΙΤ"

Πρόταση 1η (Σχήμα 1)

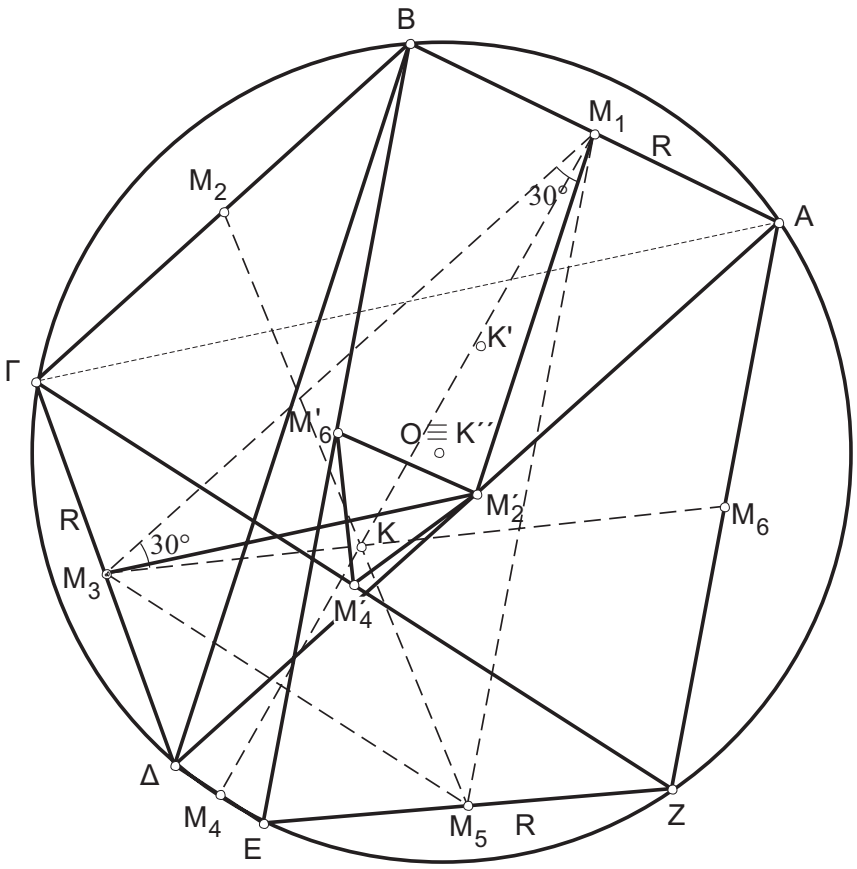
Σε κύκλο (O, R), ορίζουμε έξι διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, με:
ΑΒ = ΓΔ = ΕΖ = R. Αν M_1, M_2, ..., M_6 είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ..., ΖΑ αντίστοιχα, M_2', M_4', M_6' τα μέσα των διαγωνίων ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ αντίστοιχα του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, να δειχθεί ότι:

(1). Οι διάμεσοι του εξαγώνου συντρέχουν ($M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$)

(2). Τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ είναι ίσα.

(3). Τα μέσα των διαγωνίων ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ του εξαγώνου, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, (δηλ. το τρίγωνο $M_2'M_4'M_6'$ είναι ισόπλευρο.

(4). Οι M_1M_4', M_3M_6', M_5M_2' συντρέχουν σε σημείο Κ΄, ενώ οι M_2M_2', M_4M_4', M_6M_6' συντρέχουν σε σημείο Κ΄΄.



***Σχήμα* 1**

Απόδειξη:

(1) Αποδεικνύουμε, όπως στις δύο αποδείξεις της "ΠΙΤ", ότι τα M_2, M_4, M_6 είναι κέντρα των ισοπλεύρων τριγώνων που κατασκευάζονται έξω από το τρίγωνο $M_1M_3M_5$ με πλευρές, τις πλευρές του τριγώνου αυτού.

Τούτο σημαίνει ότι θα είναι: $M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$.

(Σημείο Ναπολέοντα, βιβλία [1], πρόταση 2ζ (27), [2] παρ/φος 11-15, [3] σελ. 171).

(2) Αποδεικνύουμε, όπως στο δεύτερο τρόπο απόδειξης της "ΠΙΤ", ότι: ΒΔ = ΑΓ, ΓΕ = ΔΖ, ΕΑ = ΖΒ, οπότε, πραγματικά τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ είναι ίσα, καθώς έχουν ίσες πλευρές μία προς μία.

(3) Επειδή

$$M_1M_2' = \frac{B\Delta}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = M_3M_2' \ \Rightarrow \ M_1M_2' = M_3M_2',$$

και επειδή,

$$M_1M_3 \,//\, A\Delta,\ M_1M_2' \,//\, B\Delta \ \Rightarrow M_3\hat{M}_1M_2' = A\hat{\Delta}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Επομένως , το M_2' είναι το κέντρο ισοπλεύρου τριγώνου, που έχει κατασκευασθεί με πλευρά τη M_1M_3 και προς το μέρος του τριγώνου $M_1M_3M_5$.

Όμοια, βρίσκουμε ότι και τα M_4', M_6' είναι τα κέντρα ισοπλεύρων τριγώνων, που κατακευάζονται με πλευρές M_3M_5, M_5M_1 αντίστοιχα και προς το μέρος του τριγώνου $M_1M_3M_5$.

Άρα, το τρίγωνο $M_2'M_4'M_6'$ είναι ισόπλευρο, καθώς είναι το δεύτερο τρίγωνο του Ναπολέοντα, (βιβλία [2] παρ/φος 11-15, [4] παρ/φος 1140α).

(4) Επειδή, όπως παραπάνω είδαμε, το τρίγωνο $M_2'M_4'M_6'$ είναι είναι το δεύτερο τρίγωνο του Ναπολέοντα, θα είναι: $M_5M_2' \cap M_3M_6' \cap M_1M_4' \equiv K'$.
(Δεύτερο Σημείο Ναπολέοντα, βιβλία [1], πρόταση 2ζ (18), [4] παρ/φος 1773ο, [5] άσκηση 951).
Ακόμη, επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, η M_2M_2' θα είναι μεσοκάθετη στις M_1M_3, ΑΔ.

Όμοια βρίσκουμε ότι και οι M_4M_4', M_6M_6' είναι μεσοκάθετες στις M_3M_5, ΔΕ, και M_5M_1, ΖΑ αντίστοιχα. Άρα, και οι M_2M_2', M_4M_4', M_6M_6' συντρέχουν σε σημείο $K'' \equiv O$ (περίκεντρο του τριγώνου $M_1M_3M_5$ και του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ).

Παρατήρηση: Επειδή και το τρίγωνο $M_2'M_4'M_6'$ είναι ισόπλευρο, συμπεραίνουμε ότι η "ΠΙΤ" αληθεύει και στο μη κυρτό εξάγωνο ΑΒΕΖΓΔ, όπως και σε οποιοδήποτε άλλο εγγράψιμο μη κυρτό εξάγωνο της ίδιας μορφής (εκτός από κυρτό).

β. Γενίκευση της Πρότασης 1 και της "ΠΙΤ"

Πρόταση 2η (Σχήματα 2α και 2β)

Σε τρεις ομόκεντρους κύκλους (O, R), (O, R_1), (O, R_2), ορίζουμε από δύο σημεία στον καθένα, Α, Β∈(O, R), Γ, Δ∈(O, R_1), Ε, Ζ∈(O, R_2), τέτοια ώστε το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ να είναι κυρτό και ΑΒ = R, ΓΔ = R_1, ΕΖ = R_2. Αν M_1, M_2, ..., M_6 είναι μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ..., ΖΑ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι:

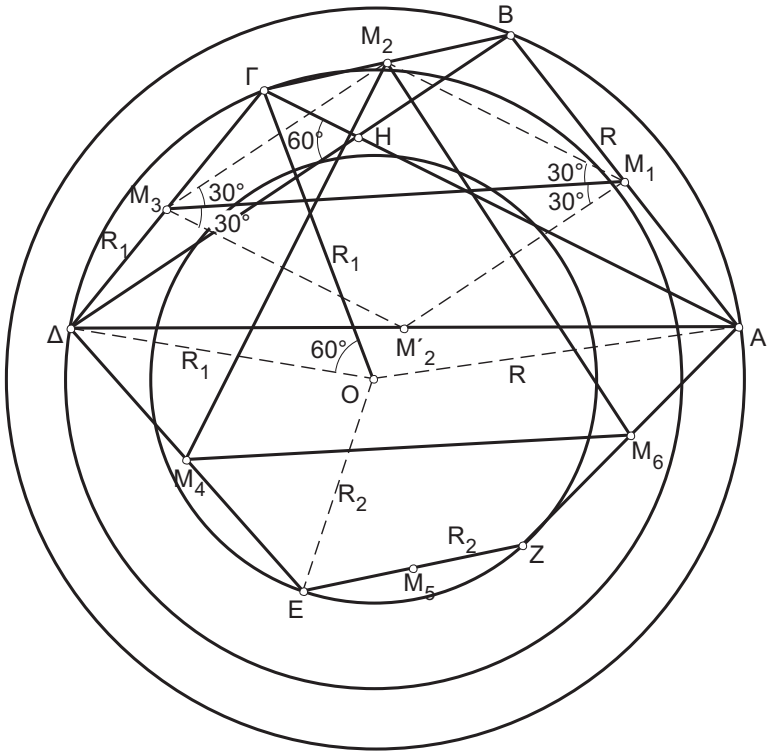
(1). Τα μέσα M_2, M_4, M_6 των χορδών ΒΓ, ΔΕ, ΖΑ αντίστοιχα, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

(2). Οι διάμεσοι του εξαγώνου συντρέχουν (δηλ. $M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$)

(3). Τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ είναι ίσα.

(4). Τα μέσα M_2', M_4', M_6' των διαγωνίων ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ του εξαγώνου είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

(5). Οι M_1M_4', M_3M_6', M_5M_2' συντρέχουν σε σημείο K΄, ενώ οι M_2M_2', M_4M_4', M_6M_6' συντρέχουν σε σημείο K΄΄.

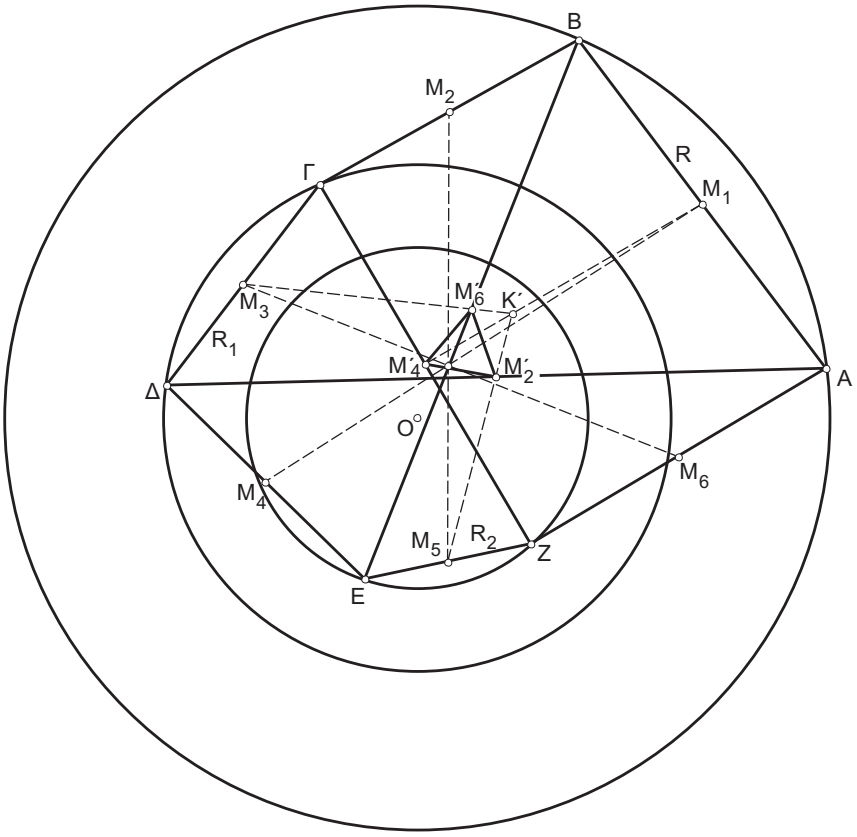


***Σχήμα* 2 (α)**

Απόδειξη:

(1) Επειδή ΟΑ = ΟΒ = R, ΟΓ = ΟΔ = R_1 και αν συνεχίσουμε όπως ακριβώς στο δεύτερο τρόπο απόδειξης της "ΠΙΤ", βρίσκουμε ότι το τρίγωνο $M_2M_4M_6$ είναι πραγματικά ισόπλευρο.

(2), (3) Αν εργασθούμε και εδώ, όπως ακριβώς και στην προηγούμενη Πρόταση 1 [παρ/φος (1), (2)], εύκολα βρίσκουμε ότι πραγματικά είναι: $M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$ και ότι τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ είναι ίσα.



***Σχήμα* 2 (β)**

(4) Αν Η≡ΑΓ∩ΒΔ, βρίσκουμε, όπως στον 2ο τρόπο απόδειξης της "ΠΙΤ", ότι το τετράπλευρο ΗΟΔΓ είναι εγγράψιμο,

οπότε: $\Gamma\hat{H}\Delta = \Gamma\hat{O}\Delta = 60^\circ \Rightarrow A\hat{H}\Delta = 120^\circ$.

και επειδή $M_1M_2' \,//\, B\Delta$, $M_3M_2' \,//\, A\Gamma \Rightarrow M_1\widehat{M_2'}M_3 = A\hat{H}\Delta = 120^\circ$.

Αλλά είναι $M_1M_2' = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = M_3M_2'$ ή $M_1M_2' = M_3M_2'$,

οπότε: $M_1\widehat{M_3}M_2' = M_3\widehat{M_1}M_2' = 30°$.

Επομένως, το M_2' είναι το κέντρο ισοπλεύρου τριγώνου, που γράφεται με πλευρά του M_1M_3 και προς το μέρος του τριγώνου $M_1M_2M_5$, οπότε συνεχίζουμε όπως στην Πρόταση 1 παραπάνω [παρ/φος (3)] και βρίσκουμε ότι πραγματικά το τρίγωνο $M_2'M_4'M_6'$ είναι ισόπλευρο.

(5) Συνεχίζουμε όπως στην Πρόταση 1 παραπάνω [παρ/φος (4)] και βρίσκουμε ότι και $M_5M_2' \cap M_3M_6' \cap M_1M_4' \equiv K$.

Ακόμη, επειδή $M_1M_2 = M_2M_3$, $M_1M_2' = M_2'M_3 \Rightarrow$ ότι η M_2M_2' είναι μεσοκάθετη στη M_1M_3 και συνεχίζοντας όπως στην παραπάνω Πρόταση 1 [παρ/φος (4)], βρίσκουμε και ότι $M_2M_2' \cap M_4M_4' \cap M_6M_6' \equiv K''$ (περίκεντρο του τριγώνου $M_1M_3M_5$).

Παρατήρηση: Επειδή, όπως είδαμε [παρ/φος (1), (4)], τα τρίγωνα $M_2M_4M_6$, $M_2'M_4'M_6'$ είναι ισόπλευρα, συμπεραίνουμε ότι η "ΠΙΤ" αληθεύει και σε ειδικά μη εγγράψιμα εξάπλευρα, κυρτά όπως το ΑΒΓΔΕΖ, και μη κυρτά της μορφής του ΑΒΕΖΓΔ.

γ. Γενίκευση της 1ης Πρότασης και επέκταση της "ΠΙΤ"

Πρόταση 3η (Σχήμα 3)

Σε κύκλο (Ο, R), ορίζουμε έξι διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, με: ΑΒ = ΓΔ = ΕΖ = r. Αν M_1, M_2, ..., M_6 είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ..., ΖΑ αντίστοιχα, M_2', M_4', M_6' τα μέσα των διαγωνίων ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ αντίστοιχα του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, να δειχθεί ότι:

(1). Οι διάμεσοι του εξαγώνου συντρέχουν ($M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$)

(2). Τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ είναι ίσα.

(3). Οι M_1M_4', M_3M_6', M_5M_2' συντρέχουν σε σημείο K', ενώ οι M_2M_2', M_4M_4', M_6M_6' συντρέχουν σε σημείο K''.

Απόδειξη:

(1) Επειδή ΟΑ = ΟΓ = ΟΒ = ΟΔ = R και επειδή

$A\hat{O}B = Γ\hat{O}Δ = E\hat{O}Z = 2ω$ ή $A\hat{O}Γ = B\hat{O}Δ$, τα τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΒΔ θα είναι ίσα.

Συνεχίζουμε όπως στη 2η απόδειξη της "ΠΙΤ", και βρίσκουμε ότι,

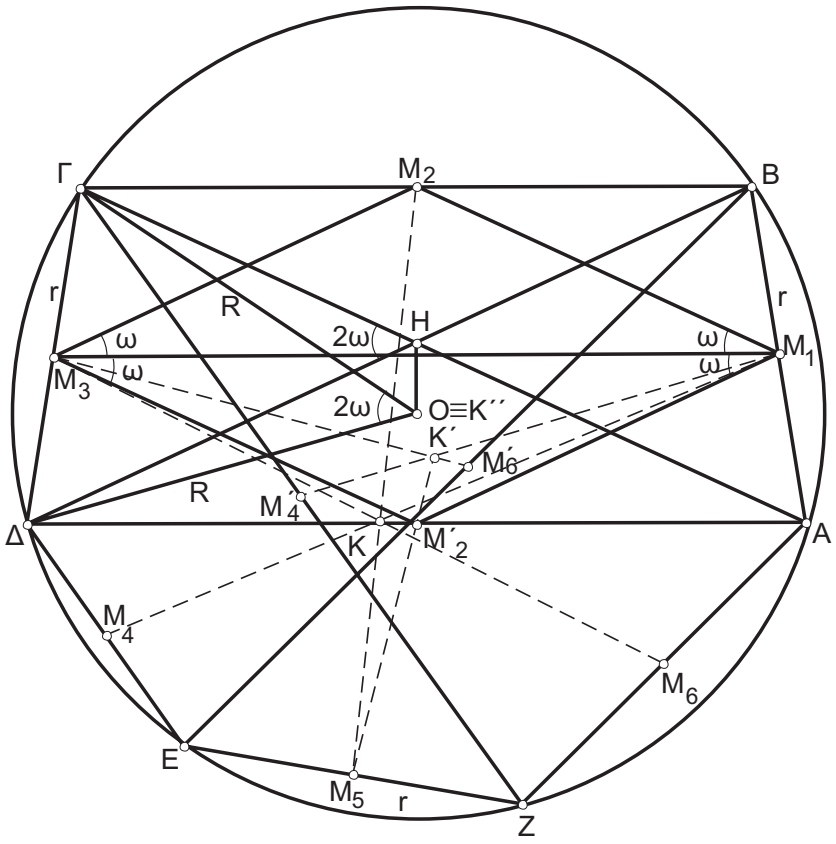
αν $H \equiv A\Gamma \cap B\Delta$, τότε $A\hat{H}\Delta = 2L - 2\omega$ και ότι: $M_1M_2 = M_2M_3$, οπότε, επειδή και M_1M_2 // ΑΓ, M_2M_3 // ΒΔ, θα είναι:

$$M_1\widehat{M_2}M_3 = A\hat{H}\Delta = 2L - 2\omega \Rightarrow M_2\widehat{M_1}M_3 = M_2\widehat{M_3}M_1 = \left[2L - (2L - 2\omega)\right] : 2 = \omega \quad (1)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σημείο M_2 είναι η κορυφή ισοσκελούς τριγώνου $M_2M_1M_3$, στο οποίο αληθεύει η (1).

Όμοια βρίσκουμε και ότι τα τρίγωνα $M_4M_3M_5$, $M_6M_5M_1$ είναι ισοσκελή με τις παρά τη βάση γωνίες ίσες με ω.

Έτσι, επειδή τα τρίγωνα $M_2M_1M_3$, $M_4M_3M_5$, $M_6M_5M_1$ είναι όμοια ισοσκελή και βρίσκονται όλα εξωτερικά του τριγώνου $M_1M_3M_5$, θα είναι πραγματικά $M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$, [βιβλία [1], πρόταση 2ζ (18), [4] παρ/φος 1773ο].



***Σχήμα* 3**

(2) Είδαμε παραπάνω ότι τα τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ είναι ίσα, οπότε ΑΓ = ΒΔ.
Όμοια βρίσκουμε και ότι ΓΕ = ΔΖ, ΕΑ = ΖΒ.
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ θα είναι ίσα.

(3) Είδαμε παραπάνω, [παρ/φος (1)], ότι $A\hat{H}\Delta = 2L - 2\omega$ και ότι ΑΓ = ΒΔ.

Έτσι, επειδή $M_1M_2' = \frac{B\Delta}{2}$ και $M_3M_2' = \frac{A\Gamma}{2}$, θα είναι $M_1M_2' = M_2'M_3$.

Άρα, $M_1\widehat{M_2'}M_3 = A\hat{H}\Delta = 2L - 2\omega$ και $M_3\widehat{M_1}M_2' = M_1\widehat{M_3}M_2' = \omega$.

Συνεχίζουμε όπως στην παρα/φο (1) παραπάνω και βρίσκουμε ότι τα τρίγωνα $M_2'M_1M_3$, $M_4'M_3M_5$, $M_6'M_5M_1$ είναι όμοια ισοσκελή με τις παρά τη βάση γωνίες ίσες με ω και όλα βρίσκονται προς το μέρος του τριγώνου $M_1M_3M_5$, θα είναι πραγματικά $M_1M_4' \cap M_3M_6' \cap M_5M_2' \equiv K$, [βιβλία [1], πρόταση 2ζ (18), [4] παρ/φος 1773ο].

Ακόμη, επειδή $M_1M_2 = M_2M_3$, $M_1M_2' = M_2'M_3$, η M_2M_2' θα είναι μεσοκάθετη στη M_1M_3, οπότε αυτή θα είναι μεσοκάθετη και στη ΒΓ.
Άρα η M_2M_2' θα περνά από το περίκεντρο Κ΄΄ του τριγώνου $M_1M_3M_5$, αλλά και από το Ο.
Όμοια βρίσκουμε ότι και οι M_4M_4', M_6M_6' περνούν από τα Κ΄΄ και Ο άρα Κ΄΄ ≡ Ο (περίκεντρο του τριγώνου $M_1M_3M_5$ και του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ).

δ. Γενίκευση μέρους 2ης Πρότασης και επέκταση της "ΠΙΤ"

Πρόταση 4η (Σχήμα 4)

Σε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Ο, R), (Ο, R_1), (Ο, R_2), ορίζουμε από δύο σημεία στον καθένα, Α, Β∈(Ο, R), Γ, Δ∈(Ο, R_1), Ε, Ζ∈(Ο, R_2), τέτοια ώστε το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ να είναι κυρτό και $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta = E\hat{O}Z = 2\omega$.

Αν M_1, M_2, ..., M_6, M_2', M_4', M_6' είναι μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ..., ΖΑ΄, ΑΔ, ΓΖ, ΕΒ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι:

(1). Οι διάμεσοι του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ συντρέχουν,
(δηλ. $M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$)

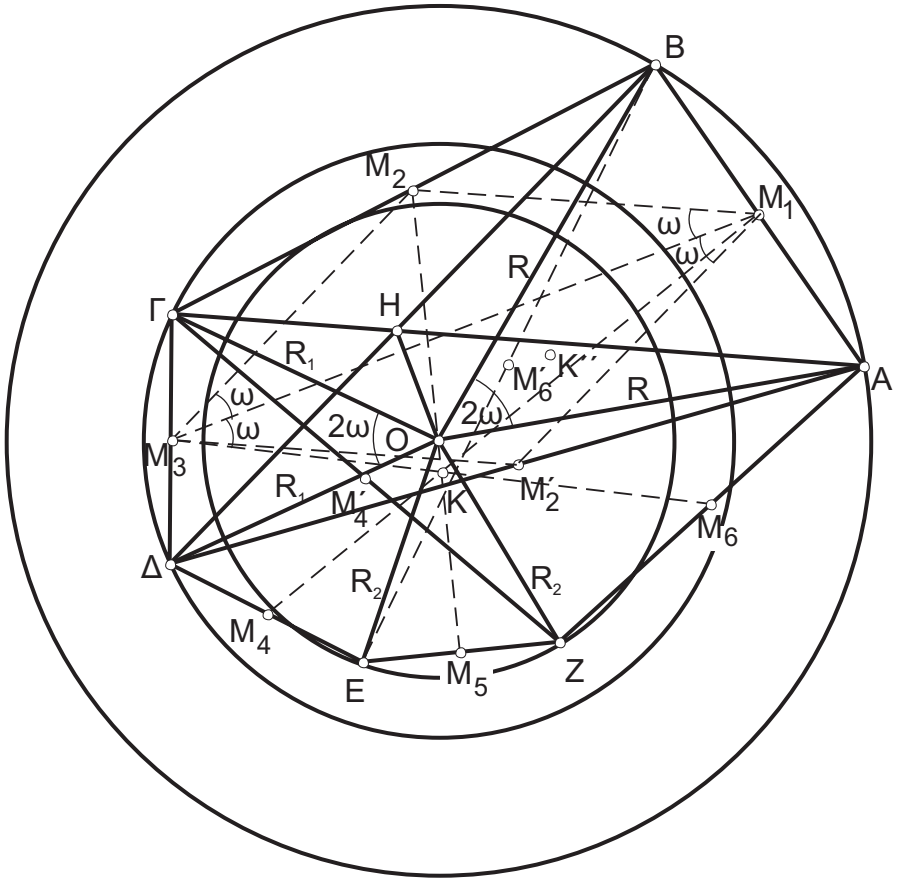
(2). Τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ είναι ίσα.

(3). Οι M_1M_4', M_3M_6', M_5M_2' συντρέχουν σε σημείο Κ΄, ενώ οι M_2M_2', M_4M_4', M_6M_6' συντρέχουν σε σημείο Κ΄΄.

Απόδειξη:

(1) Λαμβάνοντας υπόψη ότι ΟΑ = ΟΒ = R, ΟΓ = ΟΔ = R_1, και εργαζόμενοι όπως στις Προτάσεις 1, 2, παρ/φος (1), (2) αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι πραγματικά είναι: $M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$.

(2) Αν εργασθούμε όπως στις παρ/φους (2), (3) των Προτάσεων 1, 2 αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ είναι ίσα.



***Σχήμα* 4**

(3) Και εδώ εργαζόμαστε όπως στις Προτάσεις 1, 2, παρ/φοι (4), (5) αντίστοιχα και βρίσκουμε ότι πραγματικά είναι: $M_1M_4' \cap M_3M_6' \cap M_5M_2' \equiv K'$ και $M_2M_2' \cap M_4M_4' \cap M_6M_6' \equiv K''$ (περίκεντρο του τριγώνου $M_1M_3M_5$).

Σχόλια:

α. Με την εργασία μας αυτή, εκτός των άλλων, κάναμε προσπάθεια να ανταποκριθούμε στην πρόσκληση-πρόκληση του συντάκτη του περιοδικού ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ κ. Ιωσηφίδη Ν.

β. Από τι βιβλίο [1], παρ/φος 7i(109) – 7i(111) και το άρθρο μου, που έχει δημοσιευθεί στο περιοδικό [6], τεύχος 11/2001, φαίνεται πώς, χωρίς ακόμη να γνωρίζουμε την "ΠΙΤ", προέκυψε αυτή κατά την έρευνά μας, σε ανύποπτο χρόνο.

γ. Από τις προτάσεις 1 έως 4, φαίνεται ότι τα τρίγωνα $M_2M_4M_6$, $M_2'M_4'M_6'$, $M_5M_1M_3$ είναι ομολογικά ανά δύο.

δ. Ανάλογες προτάσεις είναι δυνατόν να διατυπωθούν και σε πεντάγωνα [βιβλίο [1] παρ/φος 7i(112) – 7i(115)].

ε. Οι αποδείξεις των προτάσεων "ΠΙΤ" και 1– 4 στο βιβλίο [1], γίνονται πού απλά με την εφαρμογή των Προτάσεων 5θ(105), 5θ(115), 5θ(133).

στ. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλες οι Προτάσεις "ΠΙΤ" και 1– 4 αληθεύουν και σε μερικές άλλες μορφές μη κυρτών εξαγώνων, ενώ από όσα μέχρι τώρα γνωρίζουμε είναι καινούριες, εκτός από την "ΠΙΤ".

ζ. Στις Προτάσεις "ΠΙΤ" και 3, οι κύκλοι (Ο, R), εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι κύκλοι Tucker του τριγώνου που έχει κορυφές τις τομές των πλευρών ΒΓ, ΔΕ, ΖΑ.

η. Όλες οι Προτάσεις "ΠΙΤ" και 1 – 4 είναι δυνατόν να συγχωνευθούν και να αποτελέσουν δύο γενικές Προτάσεις.

Έτσι:

(1) Μέρος της "ΠΙΤ" και των Προτάσεων 1, 2 είναι δυνατόν να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο:

Σε κάθε κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ή μη κυρτών των μορφών: ΑΒΕΖΓΔ, ΑΔΕΒΓΖ (*σχήματα 1, 2*), εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R), ή που έχει τα ζεύγη των κορυφών του Α - Β, Γ - Δ, Ε - Ζ σε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Ο, R), (Ο, R_1), (Ο, R_2) αντίστοιχα, (*σχήματα της "ΠΙΤ" και 1, 2*) και που έχει $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta = E\hat{O}Z = 60°$, θα έχει ισόπλευρο το τρίγωνο, το οποίο έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών τους ΒΓ, ΔΕ, ΖΑ και ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ (ισόπλευρα τρίγωνα $M_2M_4M_6$, $M_2'M_4'M_6'$.

(2) Μέρος των Προτάσεων 1 – 4 είναι δυνατόν να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο:

Κάθε κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ή μη κυρτό των μορφών: ΑΒΕΖΓΔ, ΑΔΕΒΓΖ (*σχήματα 1 έως 4*), εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R), ή που έχει τα ζεύγη των κορυφών του Α - Β, Γ - Δ, Ε - Ζ σε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Ο, R), (Ο, R_1), (Ο, R_2) αντίστοιχα, (*σχήματα 2 και 4*) και που έχει $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta = E\hat{O}Z = 2\omega$, θα έχει συντρέχουσες τις τρεις διαμέσους του και ίσα τα δίδυμα τρίγωνά του ΑΓΕ, ΒΔΖ.
(Δηλαδή για τα εξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ, ΑΒΕΖΓΔ, ΑΔΕΒΓΖ, είναι:
$M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$, $M_1M_4' \cap M_3M_6' \cap M_5M_2' \equiv K'$ και
$M_2M_2' \cap M_4M_4' \cap M_6M_6' \equiv K''$ αντίστοιχα).

Βιβλιογραφία:

[1] ***Νέα Στοιχεία Γεωμετρίας***, του Νίκου Κυριαζή

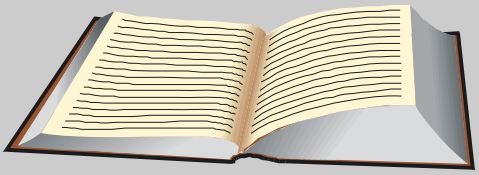
[2] ***Γεωμετρία*** του Γ. Τσίντσιφα

[3] ***Διδακτική της Ευκλείδιας Γεωμετρίας***, των Α. Πούλου και Γ. Θωμαΐδη

[4] ***Ασκήσεις Γεωμετρίας***, από FG-M (Ιησουϊτών)

[5] ***Μεγάλη Γεωμετρία***, του Αρ. Πάλλα

[6] Περιοδικό "Τα Μαθηματικά στο Ενιαίο Λύκειο", του Ευθ. Κωστόγιαννου



Συνάδελφοι,
διαδίδετε και προωθείτε τον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ στους συναδέλφους και στους μαθητές σας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Νίκος Ιωσηφίδης
Μαθηματικός, Βέροια

Στα ωραία φοιτητικά χρόνια (1968-1972), όταν δεν υπήρχαν οι σημερινές οικογενειακές και επαγγελματικές υποχρεώσεις, όταν ο χρόνος κυλούσε πιο αργά και πιο ευχάριστα, δημιουργήθηκε μια ιδέα που παραμένει μέχρι σήμερα.

«Πώς μπορούμε να συνδέσουμε ευθ. τμήματα με γωνίες χωρίς τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών».

Αν κάτι τέτοιο μπορούσε να γίνει, η Ευκλείδεια Γεωμετρία που παραμένει αναλλοίωτη για 2500 χρόνια θα μπορούσε να πάρει μια άλλη μορφή, απαλλαγμένη από τις σημερινές δεσμεύσεις που θα την έδινε μεγάλη ώθηση.

Η ιδέα αυτή μας οδήγησε στην κατασκευή μιας πρότασης που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό **Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ** της Ε.Μ.Ε στον τόμο Δ΄, τεύχος 8 του Απριλίου 1971, σελ. 317. Η λύση της δημοσιεύθηκε στον τόμο Ε΄, τεύχος 2 του Οκτωβρίου 1971, σελ. 66. Η πρόταση αυτή είναι:

«Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}$ ***να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο». Ως λόγος*** $\frac{\alpha}{A}$ ***εννοείται ο λόγος*** $\frac{(\alpha)}{(A)}$.

Η απόδειξη που προτείναμε τότε γίνεται με τη βοήθεια των ανισοτήτων ημx < x και εφx > x για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η ίδια πρόταση δημοσιεύθηκε ως προτεινόμενη στο περιοδικό **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ** στο τεύχος 4, Β΄ εξάμηνο 1997, σελ. 191. Η λύση της δόθηκε στο τεύχος 5 του Μαΐου 1999 σελ 149.

Η απόδειξη που προτείναμε στο τεύχος αυτό γίνεται με τη βοήθεια της μονοτονίας της $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, που ως γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1.

Από το 1971 και μετά, οι διάφορες υποχρεώσεις δεν μας επέτρεψαν να ασχοληθούμε αρκετά με τέτοια θέματα (σύνδεση μηκών με γωνίες χωρίς τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών) και οι όποιες προσπάθειες δεν έφεραν το επιθυμητό αποτέλεσμα. Σήμερα όμως μέσω των στηλών του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ μας δίνεται η δυνατότητα να απευθύνουμε τον προβληματισμό μας αυτό σε όλους εσάς και είμαστε σίγουροι πως κάτι θετικό θα βγει από αυτό.

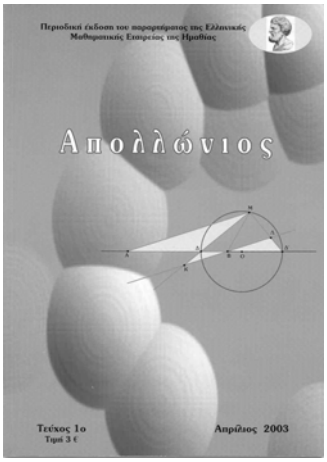
Τα ερωτήματα λοιπόν που μπαίνουν είναι:

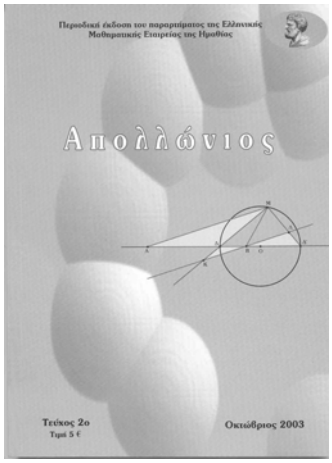
1) ***Μπορεί να γίνει μια γεωμετρική απόδειξη της παραπάνω πρότασης;***
2) ***Έστω και χωρίς τη δυνατότητα μιας γεωμετρικής απόδειξης, μπορούμε να κατασκευάσουμε παρόμοιες προτάσεις που μπορούν κατόπιν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη άλλων προτάσεων;***

Είναι δύσκολο να εκτιμήσουμε ποια θα είναι τα αποτελέσματα αυτού του προβληματισμού. Είμαστε όμως σίγουροι ότι κάθε προσπάθεια για την ανακάλυψη νέων προτάσεων αυτού του τύπου θα είναι ενδιαφέρουσα.

Θα περιμένουμε τις προτάσεις σας και τις παρατηρήσεις σας για να τις δημοσιεύσουμε στα επόμενα τεύχη του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

Κυκλοφορούν:





ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, τεύχη 1ο και 2ο

Έτσι θα ονομάζουμε για ευκολία την ευθεία που συνδέει το **σημείο Steiner (S)** ενός τριγώνου με το **σημείο (N) του Μεγάλου Ναπολέοντα** που όπως γράψαμε στο προηγούμενο τεύχος διέρχεται από το περίκεντρο του τριγώνου.

Την απόδειξη έδωσε με την κλασσική Γεωμετρία ο Νίκος Κυριαζής, που όπως πολλοί γνωρίζουμε, δεν είναι μαθηματικός αλλά ασχολείται με την Ευκλείδεια Γεωμετρία από αγάπη γι αυτήν, έχει γράψει πολλά βιβλία Γεωμετρίας και έχει δημοσιεύσει πολλά δικά του πρωτότυπα άρθρα.

Στο ίδιο τεύχος ζητήσαμε από τους αναγνώστες του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ να μας στείλουν και άλλες αποδείξεις ή παρατηρήσεις πάνω στην πρόταση αυτή.

Έκπληξη και χαρά μας προκάλεσε η ανταπόκριση του αρχιτέκτονα Κώστα Βήττα από την Αθήνα, ο οποίος μας έστειλε δύο ακόμη αποδείξεις. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία όπως βλέπετε σαγηνεύει πολλούς ανθρώπους και δεν είναι προνόμιο μόνο των Μαθηματικών. Οι Μαθηματικοί έχουμε την υποχρέωση να ασχολούμαστε με τη Γεωμετρία, λόγω του επαγγέλματός μας. Οι άνθρωποι όμως που δεν το κάνουν από κάποια επαγγελματική υποχρέωση ή οικονομική ανάγκη αλλά μόνο από αγάπη και επιστημονικό ενδιαφέρον αξίζουν πολλά συγχαρητήρια. ΜΠΡΑΒΟ λοιπόν και στους δύο. Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ αισθάνεται μεγάλη τιμή να συνεργάζεται με τέτοιους πνευματικούς ανθρώπους.

Απόδειξη επίσης μας έστειλε ο συνάδελφός μας από τη Βέροια Θεόφιλος Χρυσοστομίδης τον οποίο επίσης ευχαριστούμε.

Με την ευκαιρία αυτή θα θέλαμε να σας γνωρίσουμε ότι τα θέματα στον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ δεν κλείνουν με τη δημοσίευση κάποιας απόδειξης ή πρότασης. Όλα τα θέματα είναι ανοιχτά και επομένως μπορείτε να μας στέλνετε τις παρατηρήσεις σας για παραπέρα συζήτηση. Στείλτε μας ερωτήματα και προβληματισμούς για συζήτηση.

Παραθέτουμε παρακάτω τις αποδείξεις που λάβαμε. Περιμένουμε και άλλες. Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ίσως είναι ο πρώτος που δημοσιεύει την απόδειξη της πρότασης.

Απόδειξη Θεωρήματος SN

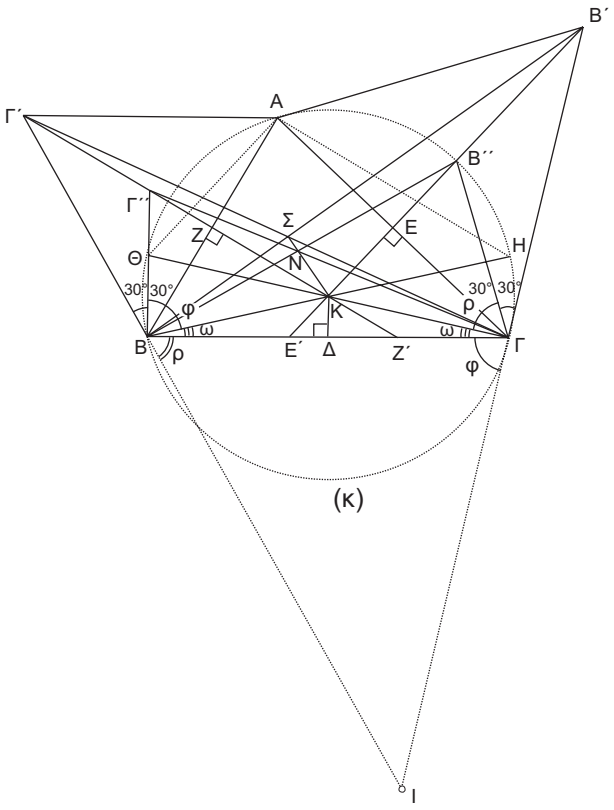
Βήττας Κωνσταντίνος
Αρχιτέκτων Ε.Μ.Π.
Μαρούσι, Αθήνα

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο το σημείο Steiner, το σημείο Μ. Ναπολέοντα και το περίκεντρο ανήκουν στην ίδια ευθεία.

1η Απόδειξη:

Στο σχήμα 1, έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα αντιστοίχως των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ. Στα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΒ΄ και ΑΒΓ΄ οι Β΄Ε και Γ΄Ζ είναι μεσοκάθετες των ΑΓ, ΑΒ αντιστοίχως και άρα το σημείο τομής των, είναι το περίκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 1

Επίσης τα περίκεντρα Β΄΄ και Γ΄΄ των ως άνω τριγώνων, κείνται επί των Β΄Ε, Γ΄Ζ αντιστοίχως και έστω Σ≡ΒΒ΄∩ΓΓ΄ (σημείο του **Steiner**), Ν≡ΒΒ΄΄∩ΓΓ΄΄ (σημείο του **Ναπολέοντα**).
Θα αποδείξουμε ότι τα Κ, Ν, Σ είναι συνευθειακά.

- Οι ΒΓ΄΄, ΓΒ΄΄ είναι διχοτόμοι των γωνιών: $\widehat{ABΓ'}$, $\widehat{AΓB'}$, οπότε:

$\widehat{ABΓ''} = \widehat{Γ''BΓ'} = 30°$ και $\widehat{AΓB''} = \widehat{B''ΓB'} = 30°$ (σχ. 1)

Εάν Η, Θ είναι, αντιστοίχως, τα αντιδιαμετρικά των Β, Γ στον κύκλο (κ), τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΗ $\left(\widehat{BAH} = 90°\right) \Rightarrow \widehat{ABH} = 90° - \widehat{AHB}$ και επειδή

$\widehat{AHB} = \hat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{ABH} = 90° - \hat{\Gamma}$ και άρα $\widehat{K\Gamma B''} = 120° - \hat{\Gamma}$ **(1).**

Έστω Ι το σημείο τομής των ΒΓ′ και ΓΒ′.
Επειδή $\widehat{A\Gamma B'} = 60° \Rightarrow \widehat{B\Gamma I} = 120° - \hat{\Gamma}$ **(2)**

(Για να ισχύει η ισότητα αυτή και όταν το τριγώνο έχει γωνία μεγαλύτερη από 120°, αρκεί να εφαρμόζεται η γωνία αυτή, στη θέση της κορυφής Α).

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{K\Gamma B''} = \widehat{B\Gamma I} = \hat{\varphi}$ **(3)**

Ομοίως ισχύει: $\widehat{K\Gamma B''} = \widehat{\Gamma BI} = \hat{\rho}$ **(4)**

(Συγκρίνουμε τις δέσμες Β.ΙΔΚΓ′′ και Γ.Β′′ΚΔΙ.

Έχουν τις γωνίες των ομολόγων ακτίνων τους ίσες και άρα έχουν ίσους διπλούς λόγους, οπότε: (Β.ΙΔΚΓ′′) = (Γ.Β′′ΚΔΙ) **(5)**

Έστω Ε′, Ζ′ αντιστοίχως, τα σημεία τομής της ΒΓ από τις Β′Κ και Γ′Κ.
Η ευθεία Γ′Ζ′ τέμνει τη δέσμη Β.ΙΔΚΓ′′ και άρα:
(Β.ΙΔΚΓ′′) = (Γ′, Ζ′, Κ, Γ′′) **(6)**.

Ομοίως, η ευθεία Β′Ε′ τέμνει τη δέσμη Γ.Β′′ΚΔΙ και άρα:
(Γ.Β′′ΚΔΙ) = (Β′′, Κ, Ε′, Β′) **(7).**

(5), (6), (7) $\Rightarrow$ (Γ′, Ζ′, Κ, Γ′′) = (Β′′, Κ, Ε′, Β′) = (Ε′, Β′, Β′′, Κ) = (Β′, Ε′, Κ, Β′′) **(8)**

Αλλά, (Γ′, Ζ′, Κ, Γ′′) = (Γ.Γ′Ζ′ΚΓ′′) **(9)** και (Β′, Ε′, Κ, Β′′) = (Β.Β′Ε′ΚΒ′′) **(10)**

(8), (9), (10) $\Rightarrow$ (Β.Β′Ε′ΚΒ′′) = (Γ.Γ′Ζ′ΚΓ′′) **(11)**

Από την ισότητα (11) συμπεραίνουμε ότι επειδή οι δέσμες Β.Β′Ε′ΚΒ′′ και Γ.Γ′Ζ′ΚΓ′′ έχουν ίσους διπλούς λόγους και κοινή μία ομόλογη ακτίνα τους, την ΒΕ′≡ΓΖ′≡ΒΓ, θα έχουν τα σημεία τομής των υπολοίπων ομόλογων ακτίνων τους, κείμενα επί ευθείας.

Τα σημεία επομένως Κ≡ΒΚ∩ΓΚ, Ν≡ΒΒ′′∩ΓΓ′′ και Σ≡ΒΒ′∩ΓΓ′ ανήκουν στην ίδια ευθεία και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

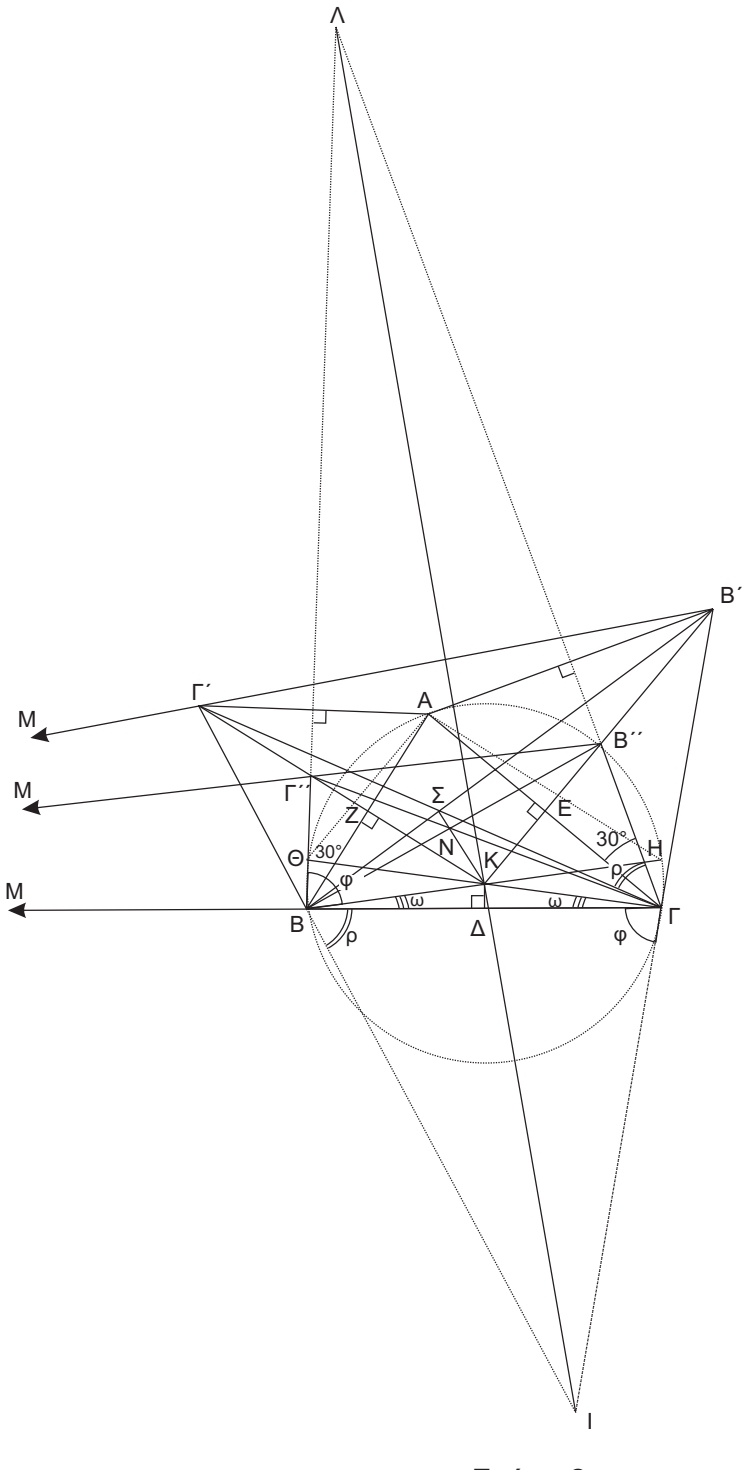
2η Απόδειξη:

Η απόδειξη αυτή βασίζεται στο ίδιο σκεπτικό της λύσης που έδωσε ο **Νίκος Κυριαζής**, αλλά προσεγγίζεται διαφορετικά το ότι οι ευθείες ΒΓ, Β′Γ′ και Β′′Γ′′ τέμνονται στο ίδιο σημείο.

- Στο σχήμα 2, ας είναι Λ το σημείο τομής των ΒΓ′′ και ΓΒ′′.

Αποδείχτηκαν στα προηγούμενα οι ισότητες:

$$\widehat{K\Gamma B''} = \widehat{B\Gamma I} = \hat{\varphi} \text{ και } \widehat{K\Gamma B''} = \widehat{\Gamma BI} = \hat{\rho}$$



Σχήμα 2

Δηλαδή στο τρίγωνο ΒΛΓ έχουμε το σημείο Κ ως τυχόν σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ και το σημείο Ι προς το μέρος (της ΒΓ) που δεν κείται το Κ, τέτοιο ώστε να είναι $\widehat{\Lambda B K} = \widehat{B\Gamma I} = \hat{\varphi}$ και $\widehat{\Lambda\Gamma K} = \widehat{\Gamma B I} = \hat{\rho}$.

Επομένως όπως αποδεικνύεται παρακάτω, (βλ. βοηθητική πρόταση) τα σημεία Ι, Κ και Λ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Τα σημεία όμως αυτά είναι σημεία και τομής των πλευρών, των τριγώνων ΒΓ′Γ′′ και ΓΒ′Β′′, μία προς μία, άρα τα τρίγωνα αυτά είναι προοπτικά.
Αποδεικνύεται έτσι (αντίστροφο θεωρήματος **Desarques**) ότι οι ευθείες ΒΓ, Β′Γ′ και Β′′Γ′′ είναι συντρέχουσες (ή παράλληλες, άν το ΑΒΓ και, κατ' επέκταση, το ΛΒΓ είναι ισοσκελή), στο σημείο, έστω, Μ.

Το Μ, όμως, είναι σημείο προοπτικότητας και για τα τρίγωνα ΒΒ′Β′′ και ΓΓ′Γ′′.
Άρα τα σημεία Κ≡Β′Β′′∩Γ′Γ′′, Ν≡ΒΒ′′∩ΓΓ′′ και Σ≡ΒΒ′∩ΓΓ′, σύμφωνα με το θεώρημα **Desarques**, ανήκουν στην ίδια ευθεία και η πρόταση έχει αποδειχθεί. (σχ. 2)

Σημείωση:

Αφότου αποδείχτηκε ότι το σημείο Μ, τομής των Β′Γ′, Β′′, Γ′′, είναι σημείο της ευθείας ΒΓ, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη και ως εξής:

Τα σημεία Μ, Β και Γ, ως κείμενα επί ευθείας, είναι και σημεία τομής ανά μία, των πλευρών των τριγώνων ΣΒ′Γ′ και ΝΒ′′Γ′′. Τα τρίγωνα επομένως αυτά είναι προοπτικά και το σημείο προοπτικότητάς των είναι το Κ, ως σημείο τομής των Β′Β′′, Γ′Γ′′. Άρα η ευθεία ΣΝ διέρχεται δια του Κ και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Βοηθητική πρόταση

Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ και στο εσωτερικό του έστω τυχόν σημείο Ρ στη μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Εάν Σ είναι σημείο προς το μέρος της ΒΓ που δεν κείται το Ρ, τέτοιο ώστε να είναι $\widehat{\Sigma B\Gamma} = \widehat{A\Gamma P}$ και $\widehat{\Sigma\Gamma B} = \widehat{ABP}$, αποδείξτε ότι τα σημεία Α, Ρ, Σ, ανήκουν στην ίδια ευθεία.

1η απόδειξη:

Έστω Δ, Ε, Ζ και Η τα σημεία τομής των ΑΓ, ΑΒ, ΒΣ, ΓΣ αντιστοίχως, από τη μεσοκάθετη ΜΡ της πλευράς ΒΓ.

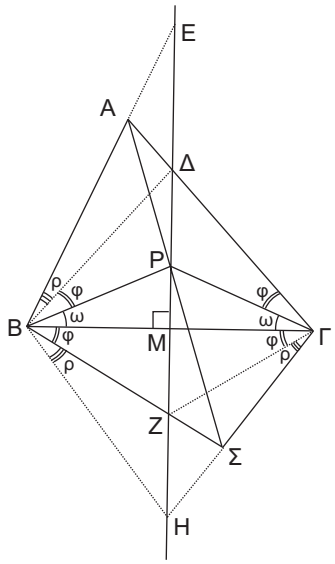
Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΖΓ προκύπτουν οι ισότητες των γωνιών

$\widehat{\Delta BP} = \widehat{A\Gamma P} = \hat{\varphi}$, $\widehat{Z\Gamma B} = \widehat{\Sigma B\Gamma} = \hat{\varphi}$ και επειδή $\widehat{ABP} = \widehat{\Sigma\Gamma B}$ συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\Delta BE} = \widehat{Z\Gamma H} = \hat{\rho}$. Επίσης είναι $\widehat{ZBH} = \hat{\rho}$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία Α, Ρ, κείνται επί των πλευρών ΒΕ, ΕΖ του τριγώνου ΒΕΖ αντιστοίχως, και στην προέκταση της πλευράς ΒΖ το σημείο Σ.

Για να είναι τα σημεία αυτά συνευθειακά, αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει η ισότητα:

$$\frac{AB}{AE}\cdot\frac{PE}{PZ}\cdot\frac{\Sigma Z}{\Sigma B}=1 \qquad \textbf{(1).}\ (\sigma\chi.\ 3)$$



Σχήμα 3

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΕ η ΑΔΓ είναι διατέμνουσα και άρα (θεώρημα του **Μενελάου)** ισχύει η ισότητα:

$$\frac{AB}{AE}\cdot\frac{\Delta E}{\Delta M}\cdot\frac{\Gamma M}{\Gamma B}=1 \Rightarrow \frac{AB}{AE}=2\cdot\frac{\Delta M}{\Delta E} \quad \textbf{(2)}$$

(γιατί ΓΒ = 2(ΓΜ)).

Ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΖ η διατέμνουσα ΓΣΗ μας δίνει:

$$\frac{\Sigma Z}{\Sigma B}\cdot\frac{\Gamma B}{\Gamma M}\cdot\frac{HM}{HZ}=1 \Rightarrow \frac{\Sigma Z}{\Sigma B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{HZ}{HM} \qquad \textbf{(3)}$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\frac{AB}{AE}\cdot\frac{PE}{PZ}\cdot\frac{\Sigma Z}{\Sigma B}=\frac{\Delta M}{\Delta E}\cdot\frac{PE}{PZ}\cdot\frac{HZ}{HM}$ **(4)**

Αλλά, $\frac{\Delta M}{\Delta E}=\frac{(B\Delta M)}{(B\Delta E)}$ **(5)**, $\frac{PE}{PZ}=\frac{(BPE)}{(BPZ)}$ **(6)** και $\frac{HZ}{HM}=\frac{(BHZ)}{(BHM)}$ **(7)**

(4), (5), (6), (7) $\Rightarrow$ (τρίγωνα με κοινό ύψος)

$$\frac{AB}{AE}\cdot\frac{PE}{PZ}\cdot\frac{\Sigma Z}{\Sigma B}=\frac{(B\Delta M)}{(B\Delta E)}\cdot\frac{(BPE)}{(BPZ)}\cdot\frac{(BHZ)}{(BHM)} \qquad \textbf{(8)}$$

• Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΒΡΖ.

Έχουν μία γωνία ίση $\widehat{\Delta BM}=\widehat{PBZ}=\hat{\omega}+\hat{\varphi}$ $\Rightarrow$ $\frac{(B\Delta M)}{(BPZ)}=\frac{(B\Delta)\cdot(BM)}{(BP)\cdot(BZ)}$ **(9)**

και ομοίως $\frac{(BPE)}{(BHM)}=\frac{(BP)\cdot(BE)}{(BH)\cdot(BM)}$ **(10),** $\frac{(BHZ)}{(B\Delta E)}=\frac{(BH)\cdot(BZ)}{(B\Delta)\cdot(BE)}$ **(11)**

(8), (9), (10), (11) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}\cdot\dfrac{PE}{PZ}\cdot\dfrac{\Sigma Z}{\Sigma B}=1$

και άρα σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του **Μενελάου** τα σημεία Α, Ρ, Σ ανήκουν στην ίδια ευθεία και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

2η απόδειξη:

Στο σχήμα 4, ας είναι Δ, Ε αντιστοίχως, τα σημεία τομής των ΑΓ, ΒΣ από τη μεσοκάθετη ΡΜ της πλευράς ΒΓ.

Έστω επίσης Ζ, Η, αντιστοίχως, τα σημεία τομής των ΑΓ, ΑΒ από τις ΒΡ, ΓΡ και Θ το σημείο τομής των ΒΣ, ΓΗ.

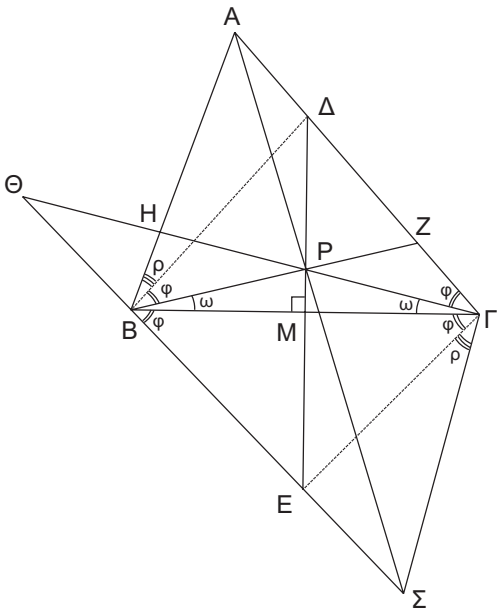
Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ προκύπτει:

$\widehat{E\Gamma B}=\widehat{\Sigma B\Gamma}=\hat{\varphi}$ και $\widehat{\Delta BP}=\widehat{A\Gamma P}=\hat{\varphi}$

και επειδή

$\widehat{ABP}=\widehat{\Sigma\Gamma B}\ \Rightarrow\ \widehat{AB\Delta}=\widehat{\Sigma\Gamma E}=\hat{\rho}$.

Συγκρίνουμε τις δέσμες Β.ΓΖΔΑ και Γ.ΘΒΕΣ.



Σχήμα 4

Έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες και άρα έχουν ίσους διπλούς λόγους. (σχ. 4)

Οπότε: (Β.ΓΖΔΑ) = (Γ.ΘΒΕΣ) **(1)**

Αλλά, (Β.ΓΖΔΑ) = (Γ, Ζ, Δ, Α) = (Ρ.ΓΖΔΑ) **(2)**

και (Γ.ΘΒΕΣ) = (Θ, Β, Ε, Σ) = (Ρ.ΘΒΕΣ) **(3)**

και άρα από (1), (2), (3) $\Rightarrow$ (Ρ.ΓΖΔΑ) = (Ρ.ΘΒΕΣ) **(4)**

Από την ισότητα (4) συμπεραίνουμε ότι στις δέσμες Ρ.ΓΖΔΑ, Ρ.ΘΒΕΣ, αφού συμπίπτουν οι φορείς των τριών ομολόγων ακτίνων τους, θα συμπίπτουν και οι φορείς των ακτίνων ΡΑ και ΡΣ.

Δηλαδή τα σημεία Α, Ρ, Σ είναι συνευθειακά και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

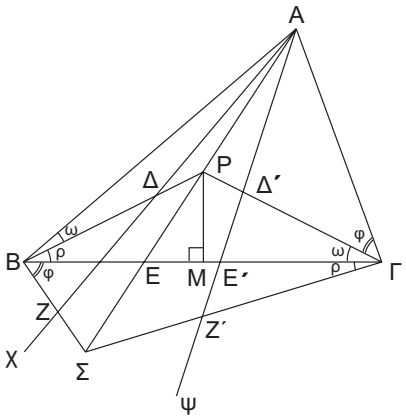
Παραλλαγή της 2ης απόδειξης:

Στο σχήμα 5, παρατηρούμε ότι οι δέσμες Β.ΣΓΡΑ και Γ.ΑΡΒΣ έχουν τις γωνίες των ομολόγων ακτίνων τους ίσες και άρα έχουν ίσους διπλούς λόγους, οπότε:

(Β.ΣΓΡΑ) = (Γ.ΑΡΒΣ) **(1)**

Δια του Α θεωρούμε δύο τυχούσες ημιευθείες Αχ, Αψ, τέμνουσες αντιστοίχως τις παραπάνω δέσμες, οπότε η (1) γράφεται:

(Β.ΖΕΔΑ) = (Γ.ΑΔ′Ε′Ζ′) **(2)**



Σχήμα 5

Αλλά είναι (Β.ΖΕΔΑ) = (Ζ, Ε, Δ, Α) **(3)**

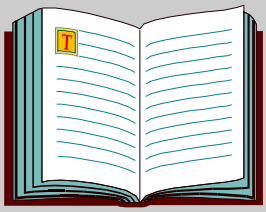
και (Ζ, Ε, Δ, Α) = (Ε, Ζ, Α, Δ) = (Α, Δ, Ε, Ζ) **(4)**

και (Α, Δ, Ε, Ζ) = (Β.ΑΔΕΖ) **(5)**

(2),(3),(4),(5) $\Rightarrow$ (Β.ΑΔΕΖ) = (Γ.ΑΔ′Ε′Ζ′) **(6)** (σχ. 5**)**

Από την ισότητα (6) συμπεραίνουμε ότι οι δέσμες Β.ΑΔΕΖ και Γ.ΑΔ′Ε′Ζ′, επειδή έχουν μία ομόλογη ακτίνα κοινή, την ΒΕ≡ΓΕ′≡ΒΓ, θα έχουν τα σημεία τομής των υπολοίπων ομολόγων ακτίνων τους κείμενα επί ευθείας.

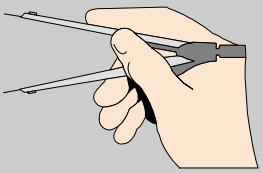
Τα σημεία Α≡ΒΑ∩ΓΑ, Ρ≡ΒΔ∩ΓΔ′, και Σ≡ΒΖ∩ΓΖ′ ανήκουν, επομένως, στην ίδια ευθεία και η πρόταση έχει αποδειχθεί.



Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Ν. Ημαθίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο «Γόρδιος Δεσμός» και η Ευκλείδεια Γεωμετρία



Άλυτο Πρόβλημα ή ευκαιρία ανάπτυξης;

Χρυσοστομίδης Θεόφιλος
Μαθηματικός, Βέροια

Όταν ένα ποτήρι περιέχει κατά το 1/2 νερό, η επικρατούσα αντίληψη είναι ότι αυτό είναι μισογεμάτο ή μισοάδειο.

Όμως, σε κάθε πρόβλημα υπάρχουν πάντα νέες ιδέες, τις οποίες με υγιή και ευέλικτη σκέψη μπορούμε να ανακαλύψουμε, όπως π.χ. αν αποδευσμεύσουμε το νερό από το ποτήρι και δούμε την αξία χρήσης του, αυτό αποτελεί από μόνο του μία ακέραια μονάδα, που μπορεί να φρεσκάρει τον κινητήρα ενός αυτοκινήτου ή να ξεδιψάσει έναν άνθρωπο.

Αυτήν την ευέλικτη σκέψη μπορούμε να προβάλλουμε και να διατηρήσουμε στον άνθρωπο μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, καλλιεργώντας τη δημιουργική φαντασία και διευρύνοντας την αντίληψη των νέων ανθρώπων. Επειδή η δημιουργική φαντασία συναντάται περισσότερο στους νέους, που δεν έχουν γίνει ακόμη συντηρητές των υπαρχόντων αντιλήψεων, απευθυνόμενος σ' αυτούς, θα ασχοληθώ παρακάτω με *βασικά* και *απλά «εργαλεία»* της Γεωμετρίας, χρήσιμα εφόδια για τη δημιουργική σκέψη.

Στη συνέχεια, πραγματεύομαι ένα Ευκλείδιο Πρόβλημα με απλό τρόπο (Σημείο Steiner, Τρίγωνο Μεγ. Ναπολέοντα), το οποίο στα δύο πρηγούμενα τεύχη του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ έχει συζητηθεί πολύ.

Τέλος, δίνω μια απλή λύση (γνώσεις μαθητών Λυκείου) στην πρόταση – πρόκληση του 2ου τεύχους, που είναι πράγματι ενδιαφέρουσα. Παραθέτω μια πρόταση (πρωτοεμφανιζόμενη) για λύση και προτείνω στο περιοδικό να βραβεύσει την πιο απλή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΑ΄, ΑΓΒ΄ και ΑΒΓ΄, έξω απ' αυτό.

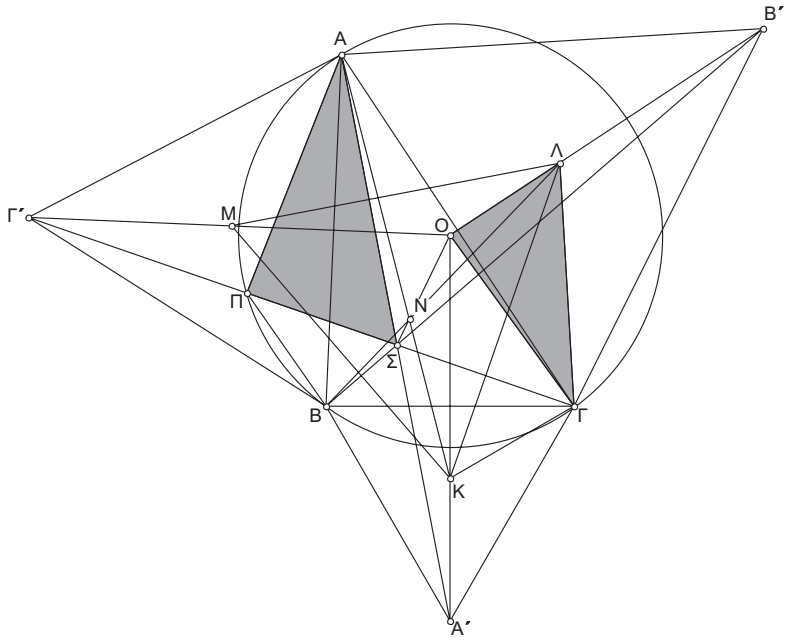
α. Να δειχθεί ότι ΑΑ΄ = ΒΒ΄ = ΓΓ΄ και οι ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται από το ίδιο σημείο (*σημείο Steiner*).

β. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα κέντρα των ισοπλεύρων τριγώνων ΒΓΑ΄, ΓΑΒ΄, ΑΒΓ΄, αντίστοιχα, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο (*τρίγωνο Μεγ. Ναπολέοντα*).

γ. *Η επίμαχη πρόταση για λύση του 2ου τεύχους.*

Να αποδειχθεί ότι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου Ο, το σημείο Σ και το σημείο Ν, της τομής των ευθειών ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ (*σημείο Μεγ. Ναπολέοντα*) είναι συνευθειακά.

Απόδειξη:



α. Έστω οι ευθείες ΒΒ΄ και ΓΓ΄ τέμνονται στο Σ. Τα τρίγωνα ΑΒΒ΄ και ΑΓΓ΄ είναι ίσα, διότι ΑΒ = ΑΓ΄, ΑΒ΄ = ΑΓ και $\widehat{BAB'} = \widehat{\Gamma A\Gamma'} = 60^\circ + \hat{A}$.
Άρα, ΒΒ΄= ΓΓ΄.

Όμοια, ΑΑ΄ = ΒΒ΄, άρα: **ΑΑ΄ = ΒΒ΄= ΓΓ΄**.

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΒ΄ και ΑΓΓ΄ έχουμε $\widehat{AB\Sigma} = \widehat{A\Gamma'\Sigma}$, άρα το τετράπλευρο ΑΣΒΓ΄ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το κέντρο Μ του τριγώνου ΑΒΓ΄.

Όμοια, $\widehat{AB'\Sigma} = \widehat{A\Gamma\Sigma}$, άρα το τετράπλευρο ΑΣΓΒ΄ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το κέντρο Λ του τριγώνου ΑΓΒ΄.

Από τα εγγράψιμα αυτά τετράπλευρα,

προκύπτει: $\begin{cases} \widehat{A\Sigma B} = 180^\circ - \hat{\Gamma}' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \\ \text{και} \\ \widehat{A\Sigma\Gamma} = 180^\circ - \hat{B}' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \end{cases}$,

οπότε και $\widehat{B\Sigma\Gamma} = 360^\circ - (120^\circ + 120^\circ) = 120^\circ$,

και επειδή $\widehat{B\Lambda'\Gamma} = 60°$, το τετράπλευρο ΒΣΓΛ΄ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το κέντρο Κ του τριγώνου ΒΓΛ΄.

Είναι τώρα, $\widehat{A\Sigma B} + \widehat{B\Sigma\Lambda'} = \widehat{A\Sigma B} + \widehat{B\Gamma\Lambda'} = 120° + 60° = 180°$,

άρα η ΑΣΛ΄ είναι ευθεία, δηλαδή **η ΑΛ΄ διέρχεται από το Σ**.

β. Είναι ΜΑ = ΜΣ, ως ακτίνες του κύκλου (Α, Β, Σ)
και ΛΑ = ΛΣ, ως ακτίνες του κύκλου (Α, Γ, Σ),
άρα η ΛΜ είναι μεσοκάθετη της ΑΣ.

Για τον ίδιο λόγο, οι ΚΜ και ΚΛ είναι μεσοκάθετες των ΒΣ και ΓΣ αντίστοιχα και επειδή $\widehat{A\Sigma B} = \widehat{B\Sigma\Gamma} = \widehat{\Gamma\Sigma A} = 120°$, θα είναι:
$\widehat{MK\Lambda} = \widehat{K\Lambda M} = \widehat{\Lambda MK} = 60°$, άρα **το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο**.

γ. Έστω ότι η ΑΚ τέμνει την ΟΣ στο σημείο Ν (εσωτερικό του ΟΣ).

Στο τρίγωνο ΟΣΑ΄ η ΑΝΚ είναι τέμνουσα των πλευρών του, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Μενελέαου, θα έχουμε:

$$\frac{N\Sigma}{NO}\cdot\frac{KO}{K\Lambda'}\cdot\frac{A\Lambda'}{A\Sigma} = 1 \Rightarrow \frac{N\Sigma}{NO} = \frac{A\Sigma}{A\Lambda'}\cdot\frac{K\Lambda'}{KO} \qquad (1)$$

Έστω ότι η ΒΛ τέμνει την ΟΣ στο Ν΄ (εσωτερικό του ΟΣ).
Στο τρίγωνο ΟΣΒ΄ η ΒΝ΄Λ είναι τέμνουσα των πλευρών του, επομένως, σύμφωνα πάλι με το Θεώρημα του Μενελάου, θα έχουμε:

$$\frac{N'\Sigma}{N'O}\cdot\frac{\Lambda O}{\Lambda B'}\cdot\frac{BB'}{B\Sigma} = 1 \Rightarrow \frac{N'\Sigma}{N'O} = \frac{B\Sigma}{BB'}\cdot\frac{\Lambda B'}{\Lambda O} \qquad (2)$$

Θα αποδείξουμε ότι $N \equiv N'$.

Αρκεί, προς τούτο, να δείξουμε ότι:

$$\frac{N\Sigma}{NO} = \frac{N'\Sigma}{N'O} \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{A\Sigma}{A\Lambda'}\cdot\frac{K\Lambda'}{KO} = \frac{B\Sigma}{BB'}\cdot\frac{\Lambda B'}{\Lambda O} \Leftrightarrow A\Sigma\cdot K\Lambda'\cdot\Lambda O = B\Sigma\cdot\Lambda B'\cdot KO \quad (3),$$

αφού ΑΛ΄ = ΒΒ΄.

Έστω Π το σημείο στο οποίο η ΓΓ΄ τέμνει τον κύκλο Ο.

Τότε, $A\overset{\Delta}{\Pi\Sigma} \approx O\overset{\Delta}{\Lambda\Gamma}$ διότι $\widehat{A\Pi\Sigma} = \widehat{\Lambda O\Gamma}\ \left(= \frac{\widehat{A\Gamma}}{2}\right)$ και $\widehat{A\Sigma\Pi} = \widehat{O\Lambda\Gamma}$ (= 60°),

άρα $\frac{A\Sigma}{\Gamma\Lambda} = \frac{\Pi\Sigma}{O\Lambda}$ (4).

Όμοια, $\overset{\Delta}{\text{ΚΟΓ}} \approx \overset{\Delta}{\text{ΠΒΣ}}$ διότι $\widehat{\text{ΒΠΣ}} = \widehat{\text{ΚΟΓ}} \left(= \frac{\widehat{\text{ΒΓ}}}{2} \right)$ και $\widehat{\text{ΠΣΒ}} = \widehat{\text{ΟΚΓ}}$ (= 60°),

άρα $\frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΒΣ}} = \frac{\text{ΟΚ}}{\text{ΠΣ}}$ (5).

Με πολλαπλασιασμό των (4) και (5), προκύπτει ότι:

$$\frac{\text{ΑΣ}}{\text{ΓΛ}} \cdot \frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΒΣ}} = \frac{\text{ΠΣ}}{\text{ΟΛ}} \cdot \frac{\text{ΟΚ}}{\text{ΠΣ}}$$

και επειδή ΚΓ = ΚΑ΄ και ΓΛ = ΛΒ΄, έχουμε: ΑΣ·ΚΑ΄·ΛΟ = ΒΣ·ΛΒ΄·ΚΟ, δηλαδή ισχύει η (3), άρα $\text{Ν} \equiv \text{Ν}'$ και **τα σημεία Ο, Σ, Ν είναι συνευθειακά.**

ΣΧΟΛΙΟ:

Αν κάνουμε μια αναδρομή στο παρελθόν, θα δούμε ότι τα περισσότερα δύσκολα προβλήματα που απασχόλησαν την ανθρωπότητα, έχουν μια απλή και κομψή λύση, κατανοητή στο μέσο νου˙ τόσο που προκαλούν το θαυμασμό για την απλότητα της λύσης τους και απορία, γιατί απασχόλησαν τόσους ανθρώπους για μεγάλο χρονικό διάστημα. Η τύχη ευνοεί τους ευφυείς και τολμηρούς ανθρώπους με δημιουργική φαντασία και ευέλικτη σκέψη.

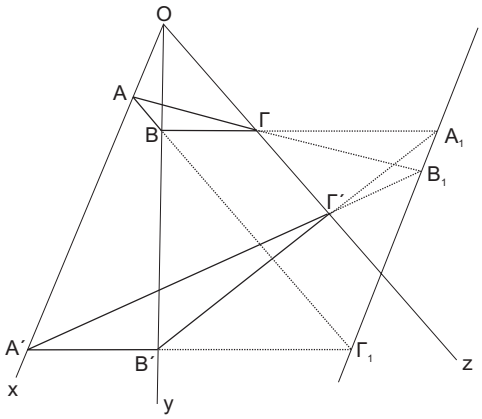
Το μεγαλείο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι ότι κάθε πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί από πολλές γωνίες, όμως πάντα υπάρχει μια σοφή απλή λύση, κατανοητή από το μέσο νου.

Δεν χρειάζεται να πλατειάζουμε χρησιμοποιώντας ακραίες προτάσεις (εκτός αν αυτό είναι απαραίτητο, όπως π.χ. σε μια επιστημονική έρευνα) για τη λύση κλασσικών προβλημάτων. "*Το σοφό είναι και απλό*".

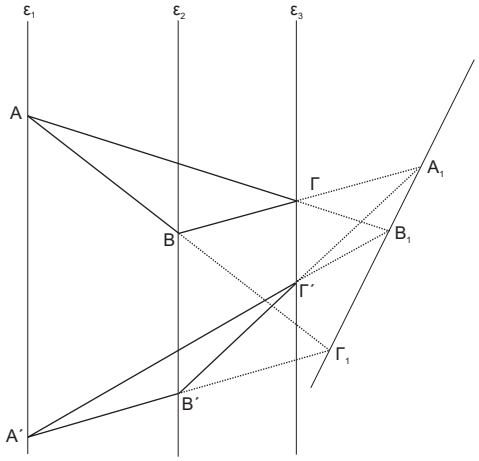
Επειδή ένα περιοδικό είναι μέσο διαλόγου και επικοινωνίας, εδώ θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Κυριαζή, που μου έδωσε την ευκαιρία να ξεθάψω από το παρελθόν μια πρόταση για τις συντρέχουσες ευθείες (Πρόταση Desarques), την οποία παραθέτω χωρίς απόδειξη, με κάποιες ακραίες εφαρμογές στο προηγούμενο πρόβλημα.

Πρόταση Desarques

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, τέτοια ώστε: $\text{ΑΒ} \cap \text{Α΄Β΄} = \Gamma_1$, $\text{ΒΓ} \cap \text{Β΄Γ΄} = \text{Α}_1$, $\text{ΓΑ} \cap \text{Γ΄Α΄} = \text{Β}_1$ και τα Α_1, Β_1, Γ_1 είναι συνευθειακά. Τότε οι ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται από το ίδιο σημείο (σχ. 1) ή είναι παράλληλες. Ισχύει και το αντίστροφο. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄λέγονται *ομολογικά*.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, ισχύουν τα εξής:

- Επειδή οι ΑΚ, ΒΛ, ΣΟ διέρχονται από το σημείο Ν, τα τρίγωνα ΑΒΣ και ΚΛΟ είναι ομολογικά, με $AB \cap K\Lambda = O_1$, $B\Sigma \cap \Lambda O = B'$, $A\Sigma \cap \Lambda M = A'$, άρα τα σημεία O_1, Β΄, Α΄ είναι συνευθειακά.
- Όμοια, αν $A\Gamma \cap KM = O_2$ και $B\Gamma \cap \Lambda M = O_3$, τα σημεία Α΄, Γ΄ και O_2 είναι συνευθειακά, καθώς επίσης και τα Β΄, Γ΄ και O_3.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Σ.Ε.

Στο τεύχος 2 του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, ο συνάδελφος και μέλος της Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, Γιάννης Απλακίδης, έδωσε μία απόδειξη της *Πρότασης Καραθεοδωρή* (βλ. παρακάτω). Με αφορμή την απόδειξη αυτή, ο επίσης συνάδελφος Θεόφιλος Χρησοστομίδης, έδωσε μια διαφορετική απόδειξη της ίδιας Πρότασης, την οποία και παραθέτουμε:

Πρόταση Καραθεοδωρή

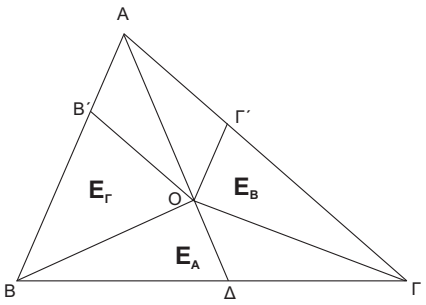
Χρυσοστομίδης Θεόφιλος
Μαθηματικός, Βέροια

Στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε τυχαίο σημείο Ο. Αν E_A, E_B, E_Γ είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΒΟΓ, ΓΟΑ και ΑΟΒ, αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι: $E_A \cdot \overrightarrow{OA} + E_B \cdot \overrightarrow{OB} + E_\Gamma \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η ΑΟ τέμνει τη ΒΓ στο Δ.

Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι συγγραμμικά, το διάνυσμα $\overrightarrow{AO}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, δηλαδή:



$\overrightarrow{AO} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \kappa\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{A\Gamma'}$ (1),

όπου τα Β΄, Γ΄ βρίσκονται μεταξύ Α, Β και Α, Γ αντίστοιχα, άρα: 0 < λ < 1, 0 < κ < 1.

Είναι, επίσης $\overrightarrow{A\Delta} = \mu\cdot\overrightarrow{AO} \overset{(1)}{=} \mu\lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \mu\kappa\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

και επειδή τα Δ, Β, Γ είναι συνευθειακά: μλ + μκ = 1 $\Rightarrow$ $\mu = \dfrac{1}{\lambda+\kappa}$.

Άρα, $\overrightarrow{A\Delta} = \dfrac{1}{\lambda+\kappa}\overrightarrow{AO}$ (2) με 0 < λ + κ < 1

Είναι τώρα, $\dfrac{E_\Gamma}{(AB\Delta)} = \dfrac{E_B}{(A\Gamma\Delta)} = \dfrac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{A\Delta}|} \overset{(2)}{=} \lambda+\kappa \Rightarrow$

$$\frac{E_\Gamma + E_B}{(AB\Delta)+(A\Gamma\Delta)} = \lambda+\kappa \Rightarrow \frac{E_B+E_\Gamma}{(AB\Gamma)} = \lambda+\kappa \quad (3)$$

Όμως, $\dfrac{E_\Gamma}{(OAB')} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB'}|} = \dfrac{1}{\lambda}$ και $\dfrac{E_\Gamma}{(OA\Gamma')} = \dfrac{|\overrightarrow{A\Gamma}|}{|\overrightarrow{A\Gamma'}|} = \dfrac{1}{\kappa}$

και επειδή, (ΟΑΒ΄) = (ΟΑΓ΄), λόγω του παραλληλογράμμου ΑΒ΄ΟΓ΄,

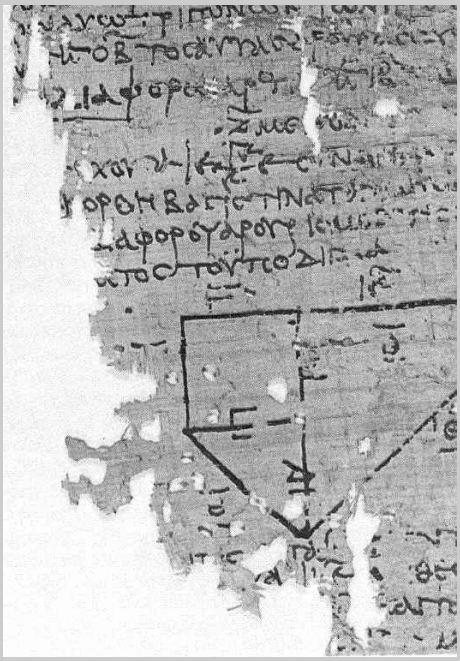
προκύπτει: $\dfrac{E_B}{E_\Gamma} = \dfrac{\lambda}{\kappa} \Rightarrow \dfrac{E_\Gamma+E_B}{E_\Gamma} = \dfrac{\kappa+\lambda}{\kappa} \overset{(3)}{\Rightarrow} \dfrac{(\lambda+\kappa)(AB\Gamma)}{E_\Gamma} = \dfrac{\kappa+\lambda}{\kappa} \Rightarrow$

$E_\Gamma = \kappa(AB\Gamma)$, οπότε $E_B = \lambda(AB\Gamma)$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται: $\overrightarrow{AO} = \dfrac{E_B}{(AB\Gamma)}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{E_\Gamma}{(AB\Gamma)}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ (4).

Επομένως, το 1ο μέλος της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται:

$$\begin{aligned} E_A\cdot\overrightarrow{OA} + E_B\cdot\overrightarrow{OB} + E_\Gamma\cdot\overrightarrow{O\Gamma} &= -E_A\cdot\overrightarrow{AO} + E_B\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}) + E_\Gamma\cdot(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AO}) = \\ &= E_B\cdot\overrightarrow{AB} + E_\Gamma\cdot\overrightarrow{A\Gamma} - (E_A+E_B+E_\Gamma)\cdot\overrightarrow{AO} = \\ &= E_B\cdot\overrightarrow{AB} + E_\Gamma\cdot\overrightarrow{A\Gamma} - (AB\Gamma)\cdot\overrightarrow{AO} \overset{(4)}{=} \vec{0}. \end{aligned}$$



Προτεινόμενες ασκήσεις με ιστορικό ενδιαφέρον

Επιμέλεια:
Θωμαΐδης Γιάννης
Dr Μαθηματικών,
Πειραματικό Σχολείο
Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Από τον Απολλώνιο για τον «Απολλώνιο»

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος αποδεικνύει στα *Κωνικά*, με καθαρά γεωμετρικό τρόπο, ένα πολύ μεγάλο πλήθος προτάσεων που αφορούν ιδιότητες της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής. Ορισμένες μάλιστα ιδιότητες της έλλειψης εμφανίζονται ως άμεσες προεκτάσεις αντίστοιχων ιδιοτήτων του κύκλου από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η παρακάτω είναι μια τέτοια ιδιότητα, διατυπωμένη ως άσκηση της Αναλυτικής Γεωμετρίας που διδάσκεται στη Β' Λυκείου:

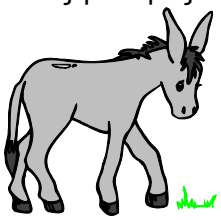
Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και δύο σημεία της $K(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ και $y_1 \neq y_2$. Αν Μ είναι το μέσο της χορδής ΚΛ και λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΚΛ, ΟΜ να αποδείξετε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκφράζει η προηγούμενη πρόταση όταν είναι α = β;

(*) Στη φωτογραφία, πάπυρος που διασώζει τμήμα εγχειριδίου γεωμετρίας. Ιστορία ελληνικού έθνους, τ. Γ2, σελ. 526

Η τριγωνική ανισότητα και ο γάιδαρος

Ο Ευκλείδης, στο 1^{ο} βιβλίο των Στοιχείων (πρόταση 20), αποδεικνύει την τριγωνική ανισότητα ΑΒ + ΑΓ > ΒΓ για τις πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που υπάρχει στα σύγχρονα διδακτικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α' Λυκείου (προέκταση της πλευράς ΒΑ κατά μήκος ΑΔ = ΑΓ, ώστε να υλοποιηθεί το άθροισμα ΑΒ + ΒΓ κ.λπ). Ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος και σχολιαστής των *Στοιχείων* Πρόκλος, αναφέρει ότι ορισμένοι αρχαίοι φιλόσοφοι λοιδορούσαν τον Ευκλείδη για το γεγονός ότι απέδειξε με εξεζητημένο τρόπο μια ιδιότητα τόσο προφανή ώστε την αντιλαμβάνεται ακόμη και ένας γάιδαρος! (Με το επιχείρημα ότι αν τοποθετήσουμε χόρτο σε μια κορυφή του τριγώνου, ο γάιδαρος που πεινάει θα οδεύσει προς το χόρτο κατά μήκος της μιας πλευράς και όχι των άλλων δύο). Το γεγονός αυτό, προσθέτει ο Πρόκλος, οδήγησε ήδη από την αρχαιότητα στην επινόηση άλλων αποδείξεων στις οποίες δεν γίνεται καμιά προέκταση πλευράς. Θέτουμε λοιπόν την εξής άσκηση:



Να βρεθεί μια εναλλακτική απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας, στην οποία δεν γίνεται προέκταση πλευράς, και βέβαια στηριζόμενη αποκλειστικά στις γνώσεις που απαιτεί και η απόδειξη του Ευκλείδη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Επιμέλεια: Χρυσοστομίδης Θεόφιλος
Μαθηματικός, Βέροια

ΣΧΟΛΙΟ Σ.Ε.: *Με αφορμή το λάθος θέμα των περσινών Πανελλαδικών εξετάσων στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, ο συνάδελφος Χρυσοστομίδης Θεόφιλος, από τη Βέροια, μας έστειλε το παρακάτω ερώτημα:*

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $M\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Να εξεταστεί αν το σημείο Μ μπορεί να είναι και σημείο καμπής.

Περιμένουμε τις απαντήσεις σας, για να τις δημοσιεύσουμε στα επόμενα τεύχη του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟ

Επιμέλεια: Απλακίδης Α. Ιωάννης
Μαθηματικός, Βέροια

Το θέμα που ακολουθεί δημοσιεύθηκε στο περιοδικό «ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ» τευχ. 2-3 1990 κεφ. 12 "*Αδόκητα Μαθηματικά Σφάλματα*", θέμα 13.

Στο κεφάλαιο αυτό υπάρχουν μια σειρά από θέματα για τα οποία προτείνονται λύσεις λανθασμένες ή ελλιπείς. Τα σφάλματα και τις ελλείψεις καλείται να επισημάνει ο αναγνώστης.

Θεωρώ πως το συγκεκριμένο θέμα έχει ενδιαφέρον και το προτείνω στο περιοδικό για προβληματισμό και συζήτηση.

Έστω f: (0, +∞)→ℝ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με παράγωγο συνεχή. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ v.δ.ο. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

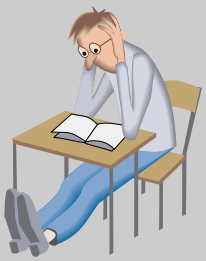
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Langrange) στο διάστημα [x, x+1].

Θα υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = (x + 1) – f(x)$
Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x + 1) – f(x)] = 0$. Καθώς $x\to+\infty$ τότε και $\xi\to+\infty$ και λόγω της συνέχειας της f' παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$F(x)=\dfrac{\eta\mu x^2}{x}$ ορισμένη στο (0, +∞) ικανοποιεί τις συνθήκες της υπόθεσης και όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ δεν υπάρχει.



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΣ, ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΜΙΑ ΑΣΚΗΣΗ

της Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΟ Σ.Ε. ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ:

Παίρνουμε αφορμή από μία άσκηση που μας έστειλε ο συνάδελφος Αλέξανδρος Τσιτούρης από τη Ν. Σμύρνη για να κάνουμε κάποια σχόλια.

Συχνά συναντούμε ασκήσεις που αναφέρονται σε συναρτήσεις που δεν υπάρχουν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, το θέμα των Πανελλαδικών εξετάσεων του 1997 το οποίο έχει ως εξής:

> ***Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια, ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει: $g(x + y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.***
>
> ***Να αποδειχθεί ότι:***
> ***i.*** $g(0) = -\alpha$
> ***ii.*** $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$ ***για κάθε*** $x \in \mathbb{R}$.

Τέτοια συνάρτηση όμως δεν υπάρχει.(*)

Η Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, από πάγια τακτική, ελέγχει την ύπαρξη των αντίστοιχων συναρτήσεων. Έτσι όλες οι συναρτήσεις που αναφέρονται στα τεύχη του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ είναι υπαρκτές. (Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι είναι γνωστοί οι τύποι τους ή ακόμη ότι μπορούν να δοθούν με τη βοήθεια των στοιχειωδών συναρτήσεων). Για την απόδειξη της ύπαρξης ή μη των συναρτήσεων απαιτούνται ξεχωριστές τεχνικές για κάθε μια από αυτές. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συναρτήσεις που συνδέονται με τις παραγώγους τους (διαφορικές εξισώσεις). Στους μαθηματικούς είναι γνωστό ότι η λύση τους δεν είναι πάντοτε εφικτή, αλλά και στις περιπτώσεις που είναι, μπορεί να είναι δύσκολη. Η απόδειξη της ύπαρξής τους με την ύλη του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου είναι ένα δύσκολο πρόβλημα. Από την άλλη όμως είναι και μια πρόκληση.

(*)Απόδειξη της μη ύπαρξης δώσαμε στην εφημερίδα ΛΑΟΣ της Βέροιας της Παρ 4 Ιουλ 1997 σελ. 1 και 5. Μπορείτε ακόμη να δείτε απόδειξη και στην εφημερίδα ΑΔΕΣΜΕΥΤΟΣ ΤΥΠΟΣ της Παρ. 11 Ιουλ 97 σελ. 19

Ο Αλέξανδρος Τσιτούρης μας απέστειλε μια άσκηση που είναι πραγματική πρόκληση. Λόγω του μεγάλου ενδιαφέροντος της άσκησης αυτής δεν την κατατάξαμε στις προτεινόμενες, αλλά την ξεχωρίσαμε για να τη μελετήσουμε σε βάθος.

Η άσκηση αυτή έχει ως εξής:

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(1) = 1$ και $f(x) = e^{x-f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$.
Δείξτε ότι ……..

Το πρώτο ερώτημα που αντιμετώπισε η Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ήταν αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Κατόπιν αν η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη. Βεβαιωθήκαμε ότι η συνάρτηση είναι υπαρκτή και μάλιστα είναι και παραγωγίσιμη. Αρχικά η παραγωγισιμότητα αποδείχθηκε με τη βοήθεια της παραγώγου της αντίστροφής της, για την οποία αποδείξαμε ότι υπάρχει. Το σχετικό θεώρημα όμως δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Έτσι ήρθε το καυτό ερώτημα:

Μπορούμε να αποδείξουμε την παραγωγισιμότητα της f με την ύλη του σχολικού βιβλίου;

Απάντηση στο ερώτημα έδωσε το μέλος της Σ.Ε. Νίκος Ζανταρίδης, ο οποίος, με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \le x-1$, απέδειξε την ύπαρξη της παραγωγισιμότητας της f στο $\mathbb{R}$.

Προτείνουμε λοιπόν την άσκηση στην τελική της μορφή.

Άσκηση

α) Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
$$f(x) = e^{x-f(x)}$$
β) Αποδείξτε ότι $f(1) = 1$.
γ) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
δ) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
ε) Δείξτε ότι υπάρχει $r\in(0,1)$ με $f(r) = 2e^{-f(r)}$
ζ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \ge 1$. Βρείτε τη μονοτονία της g στο $[1,+\infty)$
η) Αποδείξτε ότι $\int_k^{k+1} f(t)dt < k + \frac{1}{2}$, $k > 1$

Τσιτούρης Αλέξανδρος, Μαθηματικός, Νέα Σμύρνη, ΑΘΗΝΑ

Από τους αναγνώστες του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ζητούμε να μας δώσουν τις αποδείξεις στα ερωτήματα που θέτουμε με την ύλη του σχολικού βιβλίου. Οι λύσεις που θα μας στείλετε θα δημοσιευτούν στα επόμενα τεύχη.

Αλληλο-γραφία

ΠΡΟΣ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΟ Συντακτικής Επιτροπής

Στο προηγούμενο τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, ο συνάδελφος Γιάννης Κερασαρίδης σε άρθρο του σχετικό με θέμα των Πανελλαδικών εξετάσεων της Β΄ Λυκείου, έκανε οξεία κριτική στους συγγραφείς του τωρινού, αλλά και προηγούμενου σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας, με αποτέλεσμα την αντίδραση των συγγραφέων Γιάννη Θωμαΐδη και Ανδρέα Πούλου, οι οποίοι μας απέστειλαν σχετική επιστολή. Θέσαμε την επιστολή υπόψη του Γιάννη Κερασαρίδη, ο οποίος μας απέστειλε απάντηση. Δημοσιεύουμε παρακάτω αυτούσιες τις δύο επιστολές. Με αφορμή το γεγονός αυτό θέλουμε να θέσουμε υπόψη των συνεργατών μας τα εξής:

Η Σ.Ε του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ βρίσκεται σε δύσκολη θέση να περικόπτει ή να λογοκρίνει τα κείμενα που μας αποστέλλετε. Επεμβαίνει μόνο στο επιστημονικό μέρος, αν νομίζει ότι μπορεί να το βελτιώσει ή να διορθώσει τυχόν αβλεψίες. ***Σας παρακαλούμε λοιπόν να μην κάνετε κριτική σε πρόσωπα, αλλά να περιορίζεστε στο επιστημονικό μόνο μέρος των άρθρων σας.*** *Οι διαφωνίες στο επιστημονικό μέρος όχι μόνο είναι θεμιτές αλλά είναι και απαραίτητες για την έρευνα και τον εποικοδομητικό διάλογο.*

Εξετάσεις με ερωτήσεις "αντικειμενικού τύπου",
"αγανακτισμένοι" μαθηματικοί και "κριτική ανάλυση" σχολικών βιβλίων.

Προς τη Συντακτική Επιτροπή του *Απολλώνιου*
Αγαπητοί συνάδελφοι.

Στο 2^{ο} τεύχος του *Απολλώνιου*, ο κ. Γιάννης Κερασαρίδης θέλησε να εκφράσει, με αρκετή καθυστέρηση είναι αλήθεια, την αγανάκτησή του προς τους *"σωτήρες"* (όπως ειρωνικά τους αποκαλεί) συγγραφείς του βιβλίου Ευκλείδειας Γεωμετρίας που χρησιμοποιήθηκε στα Λύκεια όλης της χώρας κατά τα σχολικά

έτη 1999-2000 και 2000-2001.[1]

Για να αιτιολογήσει αυτή την αγανάκτηση ο συγγραφέας δεν επιχειρεί κάποια κριτική ανάλυση του συγκεκριμένου βιβλίου, του αναλυτικού προγράμματος στο οποίο στηρίζεται, ή της διαδικασίας με την οποία έγινε η συγγραφή και επιλογή του, αλλά χρησιμοποιεί μια ερώτηση "Σωστό – Λάθος" που τέθηκε στις προαγωγικές εξετάσεις της Β΄ Λυκείου τον Ιούνιο 2003. Την τελευταία συνδυάζει με μια άλλη ερώτηση "Συμπλήρωσης Κενού" των αντίστοιχων εξετάσεων του Ιουνίου 2000 και με φαινόμενα τα οποία συναντάμε τακτικά στην Ιστορία όπως η Ιερά Εξέτασις, οι απόψεις της επίσημης Εκκλησίας, με το έργο του σοβιετικού ψυχολόγου Α. Λεόντιεφ, για να καταλήξει στα ακόλουθα *"ερωτήματα αγανάκτησης"*:

α) *Ποιος θα μας σώσει από τους σωτήρες μας;*

β) *Τι βαθμό θα βάλουμε στους συγγραφείς αυτών των συγκεκριμένων σχολικών βιβλίων;*

Πιθανώς δεν θα επιχειρούσαμε αυτή την απάντηση, αν ο ίδιος στην τελευταία γραμμή του κειμένου του δεν ζητούσε μία απάντηση, την οποία προφανώς επιθυμεί και το περιοδικό σας.

Οι δύο επίμαχες ερωτήσεις που τέθηκαν στις εξετάσεις το 2003 και το 2001 αφορούν τη διατύπωση του 2ου θεωρήματος των διαμέσων ενός τριγώνου. Η Κεντρική Επιτροπή Γενικών Εξετάσεων χρησιμοποίησε και στις δύο περιπτώσεις την τακτική της "καρατόμησης" ενός μαθηματικού θεωρήματος, απομονώνοντας τη διατύπωση από την απόδειξη για να εξετάσει τη "σωστή" απομνημόνευση της πρώτης, ή δημιουργώντας σ' αυτήν "κενά προς συμπλήρωση". Η τακτική αυτή, που εξυπηρετεί αμφίβολης σκοπιμότητας εξεταστικές ανάγκες, έχει εισάγει πρόσφατα στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα διαδικασίες αξιολόγησης οι οποίες αμφισβητούνται έντονα διεθνώς, ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιούνται σε ανώτερες εκπαιδευτικές βαθμίδες (όπως είναι το στάδιο μετάβασης από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση) για την αξιολόγηση γνωστικών λειτουργιών κατώτερου επιπέδου (αναγνώριση, απομνημόνευση, κ.ο.κ.). Αντίστοιχα φαινόμενα παρουσιάζονται στις εξετάσεις των γλωσσικών μαθημάτων, όπου ολόκληρες φράσεις αποσπώνται από το πλαίσιο του λογοτεχνικού ή ιστορικού κειμένου στο οποίο ανήκουν και διατυπώνονται στη μορφή παρόμοιων ερωτήσεων "αντικειμενικού τύπου".[2]

Ο συγγραφέας δεν ασχολείται όμως με αυτό το επίμαχο ζήτημα, αλλά ακολουθώντας ουσιαστικά την τακτική της Κ.Ε.Γ.Ε., απομονώνει τη διατύπωση του θεωρήματος από την απόδειξή του στο σχολικό βιβλίο (στην οποία αναφέρεται ρητά η προϋπόθεση ΑΒ < ΑΓ) για να εξυπηρετήσει τον προφανή σκοπό του,

---

[1] Βλ. σχετικά: Κερασαρίδης, Γιάννης: Τελικά, η γη κινείται ή δεν κινείται; [το διαχρονικό πρόβλημα των…ιεροεξεταστών]. *Απολλώνιος*, τεύχος 2ο (Οκτώβριος 2003), σσ.124-127. Συνιστούμε τους αναγνώστες να μελετήσουν αυτή την εργασία πριν συνεχίσουν.

[2] Βλ. σχετικά: Θωμαΐδης, Γιάννης: Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά με ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου. *Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί*, τεύχος 6 (Ιανουάριος 1999), σσ.9-12.

που δεν είναι άλλος από την καλλιέργεια του "κλίματος αγανάκτησης" κατά των συγγραφέων.

Έτσι λοιπόν, δια της τεθλασμένης οδού των εξετάσεων του 2000, καταλήγει στο πρωτότυπο εύρημα ότι *"στο ισχύον σχολικό βιβλίο εκείνης της χρονιάς υπάρχει η ίδια λαθεμένη διατύπωση που υπάρχει στο νέο βιβλίο που ισχύει για τις φετινές εξετάσεις!!"*. Με αυτό το επιχείρημα, οι ευθύνες της πολυπρόσωπης Κ.Ε.Γ.Ε. του 2003, η οποία καλύπτεται πίσω από την ανωνυμία των μελών της, μετακυλίονται στους συγγραφείς του σχολικού βιβλίου που ήταν σε χρήση το 2000, για να αποδειχθεί τελικά ότι *"η αμαρτία έχει πάντα παρελθόν"*! Οι πραγματικοί ένοχοι αποκαλύφθηκαν, άρα εκτοξεύονται τώρα τα "ερωτήματα αγανάκτησης" κατά των "αμαρτωλών" συγγραφέων. Το σκηνικό θα ήταν τέλεια εναρμονισμένο με τον υπότιτλο της εργασίας του κ. Κερασαρίδη, αν ο τελευταίος ζητούσε επίσης να οδηγηθούν οι συγγραφείς και το βιβλίο τους στην πυρά![3]

Το επιχείρημα, από πλευράς λογικής ευστάθειας, συναγωνίζεται εκείνο που διατύπωσαν ορισμένοι "έγκυροι κύκλοι" τον Ιούνιο του 2003, στην προσπάθειά τους να "κουκουλώσουν" την ανεκδιήγητη γκάφα της ίδιας Κ.Ε.Γ.Ε. που ζήτησε από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου να αποδείξουν την ύπαρξη ανύπαρκτου σημείου καμπής. Με άλλον, ευρύτερο ορισμό της κυρτότητας και του σημείου καμπής από εκείνον που περιέχει το σχολικό βιβλίο, υποστήριζαν με ανακοινώσεις οι "έγκυροι κύκλοι", το ζήτημα είναι επιστημονικά ορθό! (άρα, συμπεραίνει ο αδαής αναγνώστης, ο ορισμός του σχολικού βιβλίου δεν είναι επιστημονικά ορθός!). Με παρόμοιας υφής λογικό ακροβατισμό, οι συγγραφείς του σχολικού βιβλίου καθίστανται συνυπεύθυνοι για την "εξεταστική αδεία" ασυδοσία της Κ.Ε.Γ.Ε. να χρησιμοποιεί τα γεωμετρικά θεωρήματα ως μέσα επιβράβευσης της απομνημόνευσης.

Οι ορισμοί του σχολικού βιβλίου δεν είναι ασκήσεις τις οποίες μπορεί κανείς να διαμορφώνει ή να τροποποιεί κατά το δοκούν, ούτε είναι δυνατό να απομονώνονται οι διατυπώσεις των θεωρημάτων από τις αντίστοιχες αποδείξεις και εν συνεχεία να χαρακτηρίζονται ως λαθεμένες. Είναι (;) αυτονόητο ότι όχι μόνο οι διατυπώσεις, αλλά ακόμη και οι αποδείξεις των θεωρημάτων διαμορφώνονται με βάση το γενικότερο μαθηματικό, διδακτικό και παιδαγωγικό πλαίσιο που εξυπηρετεί ένα σχολικό βιβλίο. Η κριτική ανάλυση των σχολικών βιβλίων είναι απολύτως απαραίτητη, αλλά αν εκφυλίζεται σε "κριτική" για την εκτόνωση κάθε μαθηματικής ή άλλης προσωπικής "αγανάκτησης", τότε γίνεται επίδειξη και αυτοσκοπός που αναζητά εξιλαστήρια θύματα. *Σχεδόν κανένα* θεώρημα των

[3] Αν θεωρεί ότι το … αμάρτημα δεν είναι αρκετά βαρύ για μια τέτοια τιμωρία, τότε μπορούμε να τον διευκολύνουμε και με άλλα παρόμοια επιχειρήματα. Η απομόνωση της διατύπωσης του 2ου θεωρήματος των διαμέσων για τη δημιουργία μιας ερώτησης "Σωστό - Λάθος", δικαιολογεί την επιλογή "Λάθος" και για έναν πρόσθετο λόγο. Αναφέρονται εκεί οι έννοιες "τετράγωνο πλευράς τριγώνου" και "γινόμενο πλευράς επί προβολή". Ο προσεκτικός αλλά άπειρος περί μαθηματικών συμβάσεων αναγνώστης, είναι πολύ πιθανό να αναρωτηθεί: Πότε ορίστηκε στο βιβλίο η έννοια του γινομένου ευθυγράμμων τμημάτων;

σχολικών βιβλίων δεν αντέχει σε κριτική με αμιγώς επιστημολογικά κριτήρια. Θα αναφέρουμε ως παράδειγμα ένα από τα πρώτα γεωμετρικά θεωρήματα που διδάσκονται οι μαθητές, την απόδειξη της ισότητας των γωνιών της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου.

Τα σχολικά βιβλία αποδεικνύουν συνήθως αυτό θεώρημα φέρνοντας τη διχοτόμο της γωνίας της κορυφής και χρησιμοποιώντας το 1^{ο} κριτήριο ισότητας για τη σύγκριση των δύο τριγώνων που σχηματίζονται. Η απόδειξη αυτή χρησιμοποιείται διεθνώς εδώ και πολλές δεκαετίες, επειδή είναι απλή από διδακτική άποψη. Από καθαρά μαθηματική άποψη όμως είναι απαράδεκτη, επειδή δεν ικανοποιεί ούτε τις αρχαίες κατασκευαστικές απαιτήσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, ούτε και τις σύγχρονες απαιτήσεις λογικής αυστηρότητας των *Θεμελίων της Γεωμετρίας* του David Hilbert. Τα δύο κρίσιμα ερωτήματα που θα έθεταν οι μεγάλοι αυτοί μαθηματικοί, τινάζοντας στον αέρα την απόδειξη του σχολικού βιβλίου, είναι τα εξής:

Ευκλείδης: *Μπορείτε να κατασκευάσετε γεωμετρικά τη διχοτόμο;*

Hilbert: *Μπορείτε να αποδείξετε λογικά ότι η διχοτόμος τέμνει τη βάση;*

Σύμφωνα με όσα έχουν προηγηθεί στο σχολικό βιβλίο, ούτε η μια ούτε η άλλη ερώτηση μπορούν να απαντηθούν καταφατικά και φυσικά, τόσο ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* (300 π.Χ.) όσο και ο Hilbert στα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* (1900 μ.Χ), χρησιμοποιούν τελείως διαφορετικές αποδείξεις. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι η απόδειξη του Hilbert οφείλεται στον Πάππο, και είχε μάλλον επινοηθεί κατά την αρχαιότητα ως εναλλακτική λύση στη μακροσκελή απόδειξη του Ευκλείδη.[4]

Είναι αξιοπερίεργο ότι ο κ. Κερασαρίδης, ο οποίος αγανακτεί, ειρωνεύεται και καταλογίζει ευθύνες με μεγάλη ευκολία προς πάσα κατεύθυνση, αποφεύγει να πάρει θέση επί της ουσίας, είτε για τον τρόπο με τον οποίο η Κ.Ε.Γ.Ε. "χειρουργεί" την ύλη των σχολικών βιβλίων για να διαμορφώσει "πρωτότυπα" ή "βατά" θέματα εξετάσεων, είτε έστω για να μας διαφωτίσει ο ίδιος ως προς την ορθή διατύπωση του 2^{ου} θεωρήματος των διαμέσων ενός τριγώνου.[5]

Προτείνουμε λοιπόν να γίνουν θέμα συζήτησης, μέσα από τις φιλόξενες σε-

---

[4] Ο καθηγητής και ακαδημαϊκός Νικόλαος Αρτεμιάδης έχει χαρακτηρίσει την απόδειξη των σχολικών βιβλίων ως "μια από τις χειρότερες που δίνονται σήμερα". Βλ. σχετικά το βιβλίο του: *Στοιχειώδης Γεωμετρία από ανώτερη σκοπιά*. Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 1977 (σ.48)

[5] Αντίθετα ο κ. Γιώργος Ρίζος, που ασχολείται με το ίδιο ζήτημα στο ίδιο τεύχος του *Απολλώνιου*, αποφεύγει τους μεγαλόστομους αφορισμούς και απευθύνει το εξής εύλογο ερώτημα προς τα μέλη της Κ.Ε.Γ.Ε.:

> *Θα ήταν πολύ δύσκολο να συμπληρωθεί η εκφώνηση με τη φράση: "η θετική διαφορά…" ή "το απόλυτο της διαφοράς…", ώστε ο προσεκτικός μαθητής, που δεν αποστηθίζει το βιβλίο, να μη βρεθεί στο δίλημμα "μήπως η ερώτηση είναι παγίδα;".*

Βλ. σχετικά: Ρίζος Γιώργος: Παράπλευρες απώλειες στη μάχη των εξετάσεων. *Απολλώνιος*, τεύχος 2^{ο} (Οκτώβριος 2003), σσ.128-131.

λίδες του *Απολλώνιου*, αυτά τα δύο ζητήματα.

Για το πρώτο ζήτημα θα είχε π.χ. μεγάλο ενδιαφέρον να συζητηθεί με ποια κριτήρια η Κ.Ε.Γ.Ε. του Ιουνίου 2001 αποφάσισε να "μεταμφιέσει" το νόμο της εκθετικής μεταβολής και να δημιουργήσει το "πρωτότυπο" 4^{ο} θέμα της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου. Απολογήθηκε άραγε κανείς σ' εκείνα τα παιδιά, που παραπλανήθηκαν μεν από τη "μεταμφίεση" αλλά έδωσαν ευφυέστατες λύσεις του προβλήματος (διαφορετικές από τη λύση της Κ.Ε.Γ.Ε.) τις οποίες πολλοί βαθμολογητές δεν είχαν την ικανότητα ή το ενδιαφέρον να κατανοήσουν;[6]

Για το δεύτερο ζήτημα, προτείνουμε να σχολιαστεί με μαθηματικά, διδακτικά και παιδαγωγικά επιχειρήματα η επόμενη διατύπωση του 2^{ου} θεωρήματος των διαμέσων:

> *Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετραγώνων των μηκών δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο του μήκους της τρίτης πλευράς επί το μήκος της προβολής της αντίστοιχης διαμέσου πάνω σ' αυτήν.*

Τη διατύπωση αυτή, μαζί με διάφορες άλλες, την είχαμε επιλέξει κατά τον αρχικό σχεδιασμό της συγγραφής του βιβλίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά τελικά και ύστερα από πολλές συζητήσεις προτιμήσαμε να αποφύγουμε.

Αφήσαμε τελευταίο ένα τρίτο ζήτημα, που εμμέσως πλην σαφώς θέτει με την επιχειρηματολογία που χρησιμοποιεί ο κ. Κερασαρίδης: Όλοι οι συγγραφείς και τα σχολικά βιβλία των τελευταίων ετών "βράζουν στο ίδιο καζάνι"! Θα είχε πράγματι πολύ ενδιαφέρον να γίνουν γνωστές στην ευρύτερη μαθηματική κοινότητα οι συνοπτικές διαδικασίες και τα κωμικά επιχειρήματα, με τα οποία μεθοδεύτηκε την άνοιξη του 2001 η αντικατάσταση του βιβλίου Ευκλείδειας Γεωμετρίας που μόλις πριν δύο χρόνια είχε επιλεγεί ***πρώτο*** στο ***διαγωνισμό*** του Υπουργείου Παιδείας. Οι υπογράφοντες δεν θα είχαν καμία αντίρρηση να συμβάλλουν με τα στοιχεία που διαθέτουν σε μια σχετική συζήτηση, η οποία θα αποκαλύψει πολλές σκοτεινές και θλιβερές όψεις της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Ευχαριστούμε για τη φιλοξενία.

Γιάννης Θωμαΐδης
Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Ανδρέας Πούλος
Πειραματικό Σχολείο Α.Π.Θ.

[6] Γνωρίζουμε συναδέλφους μαθηματικούς, γονείς μαθητών της Β΄ Λυκείου εκείνη την περίοδο, που θα εξέφραζαν πολύ μεγάλη και δικαιολογημένη αγανάκτηση για το συγκεκριμένο ζήτημα.

Σχόλια Γιάννη Κερασαρίδη στην επιστολή Γ. Θωμαΐδη – Α. Πούλου

Κύριε Διευθυντά,

πάνω στην επιστολή των Γ. Θωμαΐδη-Α. Πούλου[7] που δημοσιεύετε στο παρόν τεύχος του «ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ», έχω να σχολιάσω τα εξής: Η μοναδική (και μάλιστα *έμμεση*) αναφορά που θα μπορούσε να παρουσιάζει ενδιαφέρον για τους «Θ-Π», στην περιληπτική εργασία μου που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό σας (τεύχος 2), είναι η παράγραφος (ii). Κανένα άλλο σημείο της εργασίας μου εκείνης δεν αφορά ούτε άμεσα ούτε έμμεσα το πρόσωπο των «Θ-Π».

Σχόλιο 1^{ο} – η "επίμαχη" περικοπή

Να η "επίμαχη" περικοπή:

***«Σχόλιο**. i) Αν προσέξατε, στην εκφώνηση του θέματος, στις πανελλαδικές, σημειώνεται ότι: ΑΒ<ΑΓ, ενώ, στο ισχύον σχολικό βιβλίο εκείνης της χρονιάς, υπάρχει η ίδια λαθεμένη διατύπωση που υπάρχει στο νέο βιβλίο που ισχύει για τις φετινές εξετάσεις !!!. Ερώτημα αγανάκτησης: ποιος θα μας σώσει από τους "σωτήρες" μας;*

ii) Αν προσέξατε [στην εκφώνηση του θεωρήματος 9.8 (σχολικό βιβλίο, σελ. 219,…)] αναφέρονται τα γράμματα Α,Β,Γ,Μ,Δ χωρίς να ορίζει τι εκπροσωπεί το καθένα στην πρόταση αυτή. Ερώτημα αγανάκτησης: τι βαθμό θα βάλουμε στους συγγραφείς αυτών των συγκεκριμένων σχολικών βιβλίων;»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ. Κύριε Διευθυντά, για να κατανοήσει κανείς το νόημα αυτής της παραγράφου αρκεί να διαθέτει στοιχειώδη ψυχραιμία για *νοηματική σύγκριση των μερών του κειμένου που προηγούνται και του μέρους του οποίου το νόημα θέλουμε να κατανοήσουμε*. Η ανάπτυξη αυτής της ικανότητας (της *νοηματικής σύγκρισης*) στα παιδιά, είναι ένας από τους κύριους πυλώνες που υποστηρίζει το λόγο για τον οποίο διδάσκονται τα Μαθηματικά στα σχολεία. Γιατί τα Μαθηματικά δεν τα διδάσκουμε στα σχολεία για να μάθουν τα παιδιά τα θεωρήματα και τα "κόλπα", αλλά 1) για να αναπτύξουμε σ' αυτά την κριτική ικανότητα (με την έννοια της σύγκρισης πληροφοριών και της λήψης της *βέλτιστης δυνατής* απόφασης πατώντας στο στέρεο έδαφος της πλουτισμένης εμπειρίας τους), 2) τη συνακόλουθη αισθητική απόλαυση ότι "έβγαλαν προς τα έξω" λόγο που τον χαρακτηρίζει η συνέπεια, η σαφήνεια και η "λογικότητα" (σύμφωνα με τους κανόνες της Μαθηματικής Λογικής[8])

---

[7] Στο εξής θα σηματοδοτούνται με «Θ-Π»

[8] **Μαθηματική Λογική**. Η Μαθηματική (ή Συμβολική Λογική) έχει σαν αντικείμενο τη μελέτη των μαθηματικών εννοιών, πράξεων και κανόνων. Είναι μια εφαρμογή των μαθηματικών μεθόδων στο πεδίο της Τυπικής Λογικής, μια επέκταση του πεδίου έρευνας της Τυπικής Λογικής πιο πέρα από τους πατροπαράδοτους (Αριστοτέλειους) συλλογισμούς. Η Μαθηματική Λογική αντικαθιστά τις λέξεις που υποδηλώνουν τους όρους της Λογικής, τα συνδετικά και τις ενέργειες, τις εργασίες της Λογικής με σημεία συμβολικά και με τύπους μαθηματικούς

`Και τώρα στην ουσία του θέματος. Εκείνο που οδήγησε τους «Θ-Π» σε απώλεια *ψυχραιμίας* είναι οι παρακάτω διατυπώσεις:

α) «*Ερώτημα αγανάκτησης: ποιος θα μας σώσει από τους "σωτήρες" μας;*». Αν οι «Θ-Π» διέθεταν την απαραίτητη *ψυχραιμία* θα έβλεπαν ότι ολόκληρο το κείμενό μου στρέφει *αποκλειστικά* την κριτική του προς τη μεριά της Κ.Ε.Γ.Ε. (το σωστό είναι ΚΕΕΕΛ, **Κ**εντρική **Ε**πιτροπή **Ε**ξετάσεων ημερησίων **Ε**νιαίων **Λ**υκείων). Για την δυσοσμία που αποπνέουν η διαδικασία, τα κριτήρια επιλογής των θεμάτων και οι ασφαλιστικές δικλείδες ώστε να μη παρεισφρέουν λάθη, από κανένα σημείο του κειμένου μου εκείνου δεν προκύπτει ότι "ευθέως" ή "δια της τεθλασμένης" θεωρώ υπεύθυνους τους «Θ-Π». Απεναντίας, θεωρούσα και θεωρώ αποκλειστικούς υπεύθυνους το σύστημα θεματοδότησης και τα πρόσωπα που, κάθε φορά, το απαρτίζουν. Έτσι το αν οι «Θ-Π» δεν μπόρεσαν να δουν κάτι τέτοιο, θα μπορούσαν κάλλιστα να μου ζητήσουν εξηγήσεις και θα τις είχαν εκ του ασφαλούς και λεπτομερώς. ***Άρα "σωτήρες" δεν είναι οι «Θ-Π» αλλά οι διαδικασίες και τα πρόσωπα θεματοδότησης***.

β) *«Ερώτημα αγανάκτησης: τι βαθμό θα βάλουμε στους συγγραφείς αυτών των συγκεκριμένων σχολικών βιβλίων;»*. Στην εργασία μου εκείνη, προηγείται της "επίμαχης" η παρακάτω περικοπή:

«Όμως η ΚΕΕΕΛ είναι κατηγορηματική σ' αυτό το θέμα: Τα παιδιά πρέπει να απαντήσουν ότι ο ισχυρισμός του θέματος είναι *σωστός* (**Σ**). Προφανώς, οι άνθρωποι της ΚΕΕΕΛ που έθεσαν αυτό το ερώτημα, είχαν υπ' όψη τους τη διατύπωση του ισχύοντος σχολικού βιβλίου, κατά συνέπεια, γι' αυτούς είναι *σωστή*. Εδώ μπαίνει το ερώτημα: αν ένα παιδί, που έχει υπ' όψη του την παραπάνω συλλογιστική, απαντήσει με την ένδειξη *«λάθος (Λ)»* τι θα κάνουμε εμείς οι βαθμολογητές; Θα θεωρήσουμε ότι απάντησε λαθεμένα και άρα θα χάσει το παιδί το θέμα;[9] Μα, όλα τα παιδιά, που παίρνουν στα χέρια τους τις εκφωνήσεις των θεμάτων, διαβάζουν στη σελίδα 4, «Οδηγίες (για τους εξεταζόμενους)», τα εξής: «4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι *αποδεκτή*». Αν λάβουμε υπ' όψη μας πως στα ερωτήματα Β (α,β,γ,δ) του 1ου θέματος α) *δεν είναι υποχρεωμένα* να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους γραπτώς και β) για κάθε απάντηση (στα θέματα αυτής της μορφής) είτε είναι σωστή είτε λαθεμένη, θεωρείται δεδομένο ότι ο υποψήφιος έκανε μια σειρά συλλογισμών "από μέσα του" και αποφάσισε να απαντήσει με (**Σ**) ή (**Λ**), τότε τι πρέπει να κάνουμε εμείς;»

Άρα το *«Ερώτημα αγανάκτησης: τι βαθμό…»* είναι καθαρά ρητορικό ερώτημα και είχε την εξής έννοια: *Στις Πανελλαδικές εξετάσεις, όταν ένα παιδί λαθέψει, πρέπει να του "κόψουμε το κεφάλι"*, στις ίδιες εξετάσεις όταν η επίσημη

διατυπωμένους με τη βοήθεια αυτών των σημείων. Ο τρόπος αυτός επιτρέπει να λύνονται πιο πολύπλοκα και πιο γενικά προβλήματα που λύνει η πατροπαράδοτη Λογική. Η Μαθηματική Λογική δεν βρίσκεται σε αντίφαση με την Τυπική (Αριστοτέλεια) Λογική, αλλά επιβάλλει αναγκαστικά σ' αυτήν (την Τυπική Λογική) τις δικές της θέσεις.

[9]Οι υπογραμμίσεις είναι μεταγενέστερες

Πολιτεία, εκπροσωπούμενη απ' τους θεματοδότες και τις παντοειδείς επιτροπές, βρεθεί σε ασυμβατότητα είτε με τα επίσημα σχολικά βιβλία είτε με την ίδια τη μαθηματική αλήθεια, τότε πως πρέπει να τη βαθμολογήσουμε; ***Γιατί ένα είναι το γεγονός, πως ασυμβατότητα υπήρχε.*** Το δέχονται άλλωστε αυτό και οι «Θ-Π» στο κείμενό τους και αυτό είναι προς τιμήν τους.

Σχόλιο 2ο – ένα θεωρητικό θέμα

Στην επιστολή τους οι «Θ-Π», φέρουν σαν ακρογωνιαίο επιχείρημα, την εξής θέση:

«Οι ορισμοί του σχολικού βιβλίου δεν είναι ασκήσεις τις οποίες μπορεί κανείς να διαμορφώνει ή να τροποποιεί κατά το δοκούν, ούτε είναι δυνατό να *απομονώνονται οι διατυπώσεις των θεωρημάτων από τις αντίστοιχες αποδείξεις και εν συνεχεία να χαρακτηρίζονται ως λαθεμένες. Είναι (;) αυτονόητο ότι όχι μόνο οι διατυπώσεις, αλλά ακόμη και οι αποδείξεις των θεωρημάτων διαμορφώνονται με βάση το γενικότερο μαθηματικό, διδακτικό και παιδαγωγικό πλαίσιο που εξυπηρετεί ένα σχολικό βιβλίο*»[10]

Συμφωνώ ότι, για καθαρά παιδαγωγικούς λόγους, επιτρέπεται θεωρήματα να τα "βαφτίζουμε" σαν ασκήσεις και αντίστροφα, συμφωνώ πως κανείς δεν τροποποιεί έναν ορισμό χωρίς κίνδυνο να "φέρει τα πάνω, κάτω"[11], ***διαφωνώ***, όμως, ***απόλυτα*** με την άποψη των «Θ-Π» ότι *η πληρότητα της διατύπωσης ενός θεωρήματος έχει ανάγκη της συνηγορίας της διατύπωσης της απόδειξης.* Στο σημείο αυτό οφείλω να σημειώσω πως συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο: *η αλήθεια της απόδειξης εξαρτάται από τις προβλέψεις που διαλαμβάνονται στην εκφώνηση του θεωρήματος,* από τις εκφωνήσεις των θεωρημάτων που προηγούνται, από τα αξιώματα. Παραπέμπω τους «Θ-Π» στη σχετική κλασική εργασία του Robert Blanchè[12].

Σχόλιο 3ο - ψυχαναλυτικά και άλλα

Οι «Θ-Π» στην επιστολή τους αυτή, δεν ασχολούνται μόνο με το μαθηματικό μέρος της εργασίας μου εκείνης, κάνουν και την ψυχογραφία μου και καταλήγουν στα παρακάτω συμπεράσματα (οι χαρακτηρισμοί αυτολεξεί)

α) «Η κριτική ανάλυση των σχολικών βιβλίων είναι απολύτως απαραίτητη, αλλά αν εκφυλίζεται σε "κριτική" για την εκτόνωση κάθε μαθηματικής ή άλλης προσωπικής "αγανάκτησης", τότε γίνεται επίδειξη και αυτοσκοπός και αναζητά εξιλαστήρια θύματα»

β) «Οι πραγματικοί ένοχοι αποκαλύφθηκαν, άρα εκτοξεύονται τώρα τα "ε-

[10] Τα πλάγια στοιχεία δικά μας

[11] Κλασικό παράδειγμα δύο ορισμοί του τριγώνου: α) «Τρία σημεία Α,Β,Γ, διάφορα μεταξύ τους και όχι συνευθειακά, ορίζουν ένα ευθύγραμμο σχήμα ΑΒΓ, το οποίο ονομάζουμε τρίγωνο ΑΒΓ», β) «Τρία σημεία Α,Β,Γ, ορίζουν ένα ευθύγραμμο σχήμα ΑΒΓ, το οποίο ονομάζουμε τρίγωνο ΑΒΓ»

[12] " Αξιωματική μέθοδος", Robert Blanchè, εκδ. ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗΣ-Αθήνα 1971

ρωτήματα αγανάκτησης" κατά των "αμαρτωλών" συγγραφέων. Το σκηνικό θα ήταν τέλεια εναρμονισμένο με τον υπότιτλο της εργασίας του κ. Κερασαρίδη, αν ο τελευταίος ζητούσε επίσης να οδηγηθούν οι συγγραφείς στην πυρά!»

γ) «συναγωνίζεται εκείνο που διατύπωσαν ορισμένοι "έγκυροι κύκλοι" τον Ιούνιο του 2003, στην προσπάθειά τους να "κουκουλώσουν" την ανεκδιήγητη γκάφα της ίδιας της ΚΕΓΕ»

δ) «Με παρόμοιας υφής λογικό ακροβατισμό, οι συγγραφείς του σχολικού βιβλίου καθίστανται συνυπεύθυνοι για την "εξεταστική αδεία" ασυδοσία της ΚΕΓΕ…»

ε) «Είναι αξιοπερίεργο ότι ο κ. Κερασαρίδης, ο οποίος αγανακτεί, ειρωνεύεται και καταλογίζει ευθύνες με μεγάλη ευκολία προς κάθε κατεύθυνση, αποφεύγει να πάρει θέση επί της ουσίας, είτε με τον τρόπο με τον οποίο η ΚΕΓΕ "χειρουργεί" την ύλη των σχολικών βιβλίων για να διαμορφώσει "πρωτότυπα" ή "βατά" θέματα εξετάσεων…»

Η απάντησή μου στα παραπάνω είναι μία και μοναδική, με τη μορφή μιας πολύ βαθιάς και σοφής λαϊκής παροιμίας *«Εκεί που μας εχρώσταγαν, μας πήραν και το βόδι»*.

Ειδικότερα, όμως, στο συμπέρασμα (ε) των «Θ-Π» προβάλλω εύλογες απορίες: Οι «Θ-Π»

- δεν διάβασαν ποτέ και καμιά εργασία μου, για να γνωρίσουν την ποιότητα του λόγου μου;
- δεν άκουσαν ποτέ ότι αγωνίζομαι ασταμάτητα μεταξύ άλλων άξιων συναδέλφων ενάντια στην αυθαιρεσία και την αδιαφάνεια,
- δεν άκουσαν ποτέ πόσους ασταμάτητους αγώνες κάναμε για να φτάσουμε (μετά από 5 μήνες) στο Συνέδριο της Βέροιας και να εξαναγκάσουμε (κυριολεκτικά) αυτούς, τους οποίους υπαινίσσονται, να ομολογήσουν την απλή αλήθεια;
- δεν άκουσαν ποτέ τους ποιος αγωνίζεται αταλάντευτα μαζί με μια ομάδα νέων συναδέλφων μαθηματικών για να δοθεί δικαιοσύνη στους συναδέλφους μας μαθηματικούς που έλαβαν μέρος στον διαγωνισμό του ΑΣΕΠ (8-12-2002), όπου κάποια από τα ερωτήματα ήσαν λαθεμένα ή ελλιπή;
- δεν……
……

Επιθυμώ να διαβεβαιώσω τους «Θ-Π» πως, μόλις οι ανειλημμένες υποχρεώσεις μου το επιτρέψουν, θα έχουν μια εκτεταμένη τοποθέτησή μου, όχι βέβαια από τις στήλες του «ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ» τον οποίο αρκετά επιβαρύναμε, αλλά μέσα από μια διμερή επαφή ανταλλαγής απόψεων.

Σχόλιο 4^{ο} – κάλεσμα για διάλογο και δράση

Προσωπικά συμφωνώ με τους «Θ-Π» να αρχίσει, από τις φιλόξενες σελίδες του «ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ», διάλογος, όχι όμως με τόσο περιορισμένο αντικείμενο. Προσωπικά πιστεύω πως ο διάλογος αυτός θα πρέπει να περιλαμβάνει θέματα

όπως: Μαθηματικά, Μαθηματική Παιδεία, Διδακτική, Επιμόρφωση, Φιλοσοφία των Μαθηματικών κλπ.

Κατά τα άλλα, θα άξιζε τον κόπο να αναδείξουμε στους συναδέλφους το "εύοσμο" θέμα των αναθέσεων και "ξε-αναθέσεων" των σχολικών βιβλίων. Προσωπικά, ευχαρίστως θα έπαιρνα μέρος σε μια τέτοια εκστρατεία.

Άλιμος 29-2-2004
με εκτίμηση
Γιάννης Κερασαρίδης
mail: kerasaridis@yahoo.gr

✉ Αγαπητοί συνάδελφοι,

αφού σας συγχαρώ για την πού ενδιαφέρουσα προσπάθειά σας, που καλύπτει ένα κενό στη μαθηματική εκπαίδευση – και ως εκ τούτου δημιουργεί νέες ανάγκες –, σας εύχομαι ολόψυχα καλή δύναμη για τη συνέχεια.

Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, με τα δύο πρώτα του τεύχη, έχει ήδη εκφράσει μία πολύμορφη προσωπικότητα, που απλώνεται σε ευρύ φάσμα μαθηματικών ενδιαφερόντων, έχοντας καταφέρει να δίνει ποικίλα ερεθίσματα τόσο στο μαθητή που αγαπάει τα μαθηματικά, όσο και στο μάχιμο δάσκαλο.

Ελπίζω αυτός ο πλουραλισμός που χαρακτηρίζει την ως εδώ προσπάθεια (άρθρα κριτικής και επικαιρότητας, πρωτότυπες εργασίες, διδακτικές προσεγγίσεις και προβλήματα στο έδαφος της σχολικής ύλης) να συνεχιστεί.

Σας στέλνω λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων του 2ου τεύχους και μερικές προτεινόμενες δικής μου κατασκευής και πρωτότυπες – όσο το επέτρεψαν οι δυνάμεις μου.

Ειδικά για τις ασκήσεις του κ. Γ. Απλακίδη, ενέταξα εδώ όσες λύσεις *διέφεραν* από τις δικές του στο πολύ ωραίο βιβλίο του. Είναι, λοιπόν, διαφορετικές από αυτές, χωρίς όμως να είναι πιο σύντομες, κατ' ανάγκη΄, ούτε πιο κομψές.

Οι δύο, τρεις ή περισσότεροι τρόποι λύσεις δεν έχουν σκοπό να επιδείξουν πνευματικές ακροβατικές ικανότητες, αλλά να αποδείξουν την πληθώρα διαπραγμάτευσης των ασκήσεων, σε ένα χωρίς περιορισμούς ελεύθερο μαθηματικό περιβάλλον.

Υ.Γ. Διαφωνώ συχνά – αν και είναι δικό σας θέμα – με τον τρόπο με τον οποίο μία άσκηση χαρακτηρίζεται δύσκολη, επομένως δέχεται αστερίσκο (∗). Π.χ. η Α.22 (β) είναι δύσκολη, όπως και οι Β.36, Β.43, ενώ οι Β.46, Β.47, Γ.49, Γ.50 δεν είναι. Κατά τη γνώμη μου πάντα.

Λεωνίδας Θαρραλίδης
Μαθηματικός, Καστοριά

Απάντηση Σ.Ε.

Αγαπητέ Λεωνίδα Θαρραλίδη,

ευχαριστούμε για τα καλά σου λόγια για τον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ.

Η επιτυχία του και η πορεία του είναι υπόθεση όλων των συνεργατών μας, μέσα στους οποίους κατέχεις μία από τις πρώτες θέσεις. Αισιοδοξούμε πώς η συνεργασία μας αυτή θα συνεχιστεί και στο μέλλον.

Οι λύσεις των ασκήσεων που μας στέλνεις θα συμπεριληφθούν στο τεύχος των λύσεων του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ. Είναι πολύ σημαντικό και ενδιαφέρον και για μας και για τους αναγνώστες του περιοδικού να φιλοξενήσουμε στο τεύχος αυτό περισσότερες από μία λύσεις.

Υ.Γ.

Οπωσδήποτε δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ των εύκολων και δύσκολων ασκήσεων. Η εκτίμησή μας για το βαθμό δυσκολίας μιας άσκησης είναι υποκειμενική˙ θεωρούμε όμως ότι έχει και κάποια δόση αντικειμενικότητας. Γίνεται με σκοπό να βοηθήσει τους ενδιαφερόμενους που δεν έχουν το χρόνο ή τη δυνατότητα να λύσουν όλες τις ασκήσεις να ασχοληθούν επιλεκτικά με κάποιες απ' αυτές.

(*Σ.σ. Ο Λεωνίδας Θαρραλίδης μας έστειλε τις λύσεις όλων των ασκήσεων του 1ου και 2ου τεύχους. Σε αρκετές από αυτές μας έστειλε περισσότερες από μία λύσεις. Π.χ. για την άσκηση Β43 μας έστειλε επτά (!) διαφορετικές λύσεις*).

✉ Αγαπητοί συνάδελφοι, του περιοδικού "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ"

Είμαι ενθουσιασμένος από την παρουσία του περιοδικού σας το οποίο από τα δύο πρώτα τεύχη του δείχνει πως και άξιους συντελεστές έχει αλλά και πως φιλοδοξεί να δημιουργήσει νέα δεδομένα στο χώρο του μαθηματικού περιοδικού.

Αρκετές είναι οι πρωτότυπες εργασίες, και εντύπωση μου προκάλεσε η κριτική για το τρόπο με τον οποίο καθορίζονται οι ομάδες συγγραφής των σχολικών βιβλίων. Αυτό αποδεικνύει ότι το περιοδικό ασχολείται με τα μαθηματικά όχι μόνο με ασκήσεις αλλά κάνοντας και κριτική όπου αυτή πρέπει να αποδίδεται για διάφορα κακώς κείμενα. Κάθε τέτοια προσπάθεια θα πρέπει να επικροτείται αλλά και να στηρίζεται έμπρακτα από κάθε άνθρωπο που αγαπά τα μαθηματικά!

Εύχομαι να αποκτήσετε χιλιάδες συνδρομητές και να έχετε πάντα θέματα και άρθρα που να μας εντυπωσιάζουν όπως και στα 2 πρώτα τεύχη.

Σας εύχομαι υγεία, δύναμη και κάθε επιτυχία του Απολλώνιου!

Τσόπελας Ιωάννης
Μαθηματικός,
Αμαλιάδα Ηλείας, 19-1-2003

Απάντηση Σ.Ε.

Αγαπητέ συνάδελφε,

ευχαριστούμε για τα καλά σου λόγια και τη συμμετοχή σου στην προσπάθειά μας. Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ θα προσπαθήσει να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις των αναγνωστών του.

Προς:

Την συντακτική επιτροπή του περιοδικού Απολλώνιος του παραρτήματος Ημαθίας της Ε.Μ Ε.

Κοινοποίηση τιμής ένεκεν στους κ.κ.:
Ν. Ιωσηφίδη, Ν. Κυριαζή, Ε. Μανδραβέλη, Σ, Παπαϊωάννου, Ε. Σπανδάγο.

✉ Αγαπητοί κύριοι,

Πρόσφατα αγόρασα τα τεύχη 1 και 2 του Απολλώνιου και είδα με ικανοποίηση (απάντηση στον κ. Παλαχάνη), ότι είναι καλοδεχούμενοι στις στήλες του και αναγνώστες μη μαθηματικοί,

Εύχομαι κάθε επιτυχία στο αξιέπαινο έργο σας και ελπίζω να απολαύσουμε από τους συνεργάτες του περιοδικού θέματα και από τον γοητευτικό κόσμο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (που τόσο πολύ έχει υποβαθμιστεί τα τελευταία χρόνια στην πατρίδα μας). Το επιβάλλει άλλωστε και το όνομα του επιφανούς γεωμέτρη που επιλέξατε για τον τίτλο του.

Απαντώντας στην πρόσκληση του κ. Ν. Ιωσηφίδη, όχι ως δυνατός γεωμέτρης (μεγάλη κουβέντα), αλλά ως ερασιτέχνης από το ευρύ κοινό, σας στέλνω δύο άλλες αποδείξεις του θεωρήματος (ευθεία **Steiner - Ναπολέοντα**), που δημοσιεύτηκε στο 2° τεύχος, στη σελίδα 91.

Τις αφιερώνω με μεγάλη εκτίμηση και σεβασμό στον αγαπητό φίλο **Νίκο Κυριαζή,** με τις ευχές μου να είναι πάντα ακμαίος και δημιουργικός, να μας χαρίζει όμορφες συγκινήσεις με τις πρωτότυπες εργασίες του στη Γεωμετρία.

Η θεωρία περί διπλού λόγου στην οποία βασίζεται η πρώτη απόδειξη, είναι προχωρημένη (εξωσχολική) για τους σημερινούς μαθητές των λυκείων, αλλά το ίδιο ήταν και για μας (τριάντα πέντε χρόνια πίσω...). Είναι ένα δυνατό εργαλείο και προσωπικά με έχει βοηθήσει να λύσω, αρκετά δύσκολα θέματα συνευθειακών σημείων και συντρεχουσών ευθειών.

Με φιλικούς χαιρετισμούς
Κων/νος Βήττας,
Αρχιτέκτων Ε.Μ.Π.
Μαρούσι, Αθήνα

Απάντηση Σ.Ε.

Ευχαριστούμε για τα καλά σας λόγια. Νοιώθουμε μεγάλη χαρά όταν βλέπουμε πως, εκτός από τους μαθηματικούς (κατ' επάγγελμα), υπάρχουν πνευματικοί άνθρωποι που ασχολούνται με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Θεωρούμε τη συνεργασία σας πολύτιμη και ευελπιστούμε στη συνέχισή της.

Αγαπητέ Ανδρέα Πούλο,

ευχαριστούμε για τα καλά σου λόγια για το περιοδικό μας.

Η Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ θεωρεί μεγάλη τιμή της τη συμμετοχή σου και τη συμβολή σου στην προσπάθειά μας.

Για κάθε προτεινόμενο θέμα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να συνοδεύεται από τη λύση του.

Αγαπητέ Γιάννη Θωμαΐδη,

ευχαριστούμε για τα καλά σου λόγια και την πρόθεσή σου να συμβάλλεις στη βελτίωση του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ είναι ανοιχτός σε κάθε ενδιαφερόμενο˙ πολύ περισσότερο σε επιστήμονες καταξιωμένους μέσα από το έργο τους.

Η Σ.Ε. θα προωθήσει όλα τα ζητήματα που μας θέτετε, που συμβάλλουν βέβαια στην ανύψωση της Μαθηματικής Παιδείας στη χώρα μας.

Αγαπητέ Μπάμπη Στεργίου,

ευχαριστούμε για την πρόθεσή σου να κρατηθεί ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ σε καλά επίπεδα.

Ευχαριστούμε για τις παρατηρήσεις σου, που αφορούν το περιοδικό μας. Παίρνουμε πολύ σοβαρά υπόψη μας κάθε παρατήρηση και κάθε σχόλιο των συνεργατών μας. Πιστεύουμε πώς μόνο έτσι δεν θα φθαρεί με τον καιρό ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Αγαπητέ συνάδελφε Τάσο Ευαγόρου από την Κύπρο,

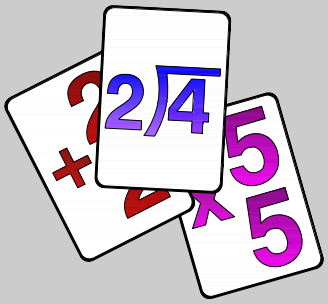
σ' ευχαριστούμε για τα καλά σου λόγια. Το e-mail σου μας έδωσε μεγάλη χαρά επειδή ήταν από άλλη χώρα.

Ευελπιστούμε στη συνέχιση της συνεργασίας μας.

Προς κ. Αντωνόπουλο Νίκο, Ίλιον Αττικής

Αγαπητέ συνάδελφε,

σ' ευχαριστούμε για τα καλά σου λόγια και τις ευχές σου. Περισσότερο σε ευχαριστούμε για την πρόθεσή σου να βοηθήσεις την προσπάθειά μας.



ΕΒΔΟΜΗ ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5 ΕΤΩΝ (JBMO)

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία είχε την ευγενή καλοσύνη να μας στείλει τα θέματα που προτάθηκαν στην 7η Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών που έλαβε χώρα στη Σμύρνη από 20-25 Ιουνίου 2003.

Από τα 19 θέματα που προτάθηκαν θα δημοσιεύσουμε στο τεύχος αυτό τα 10 πρώτα με τις λύσεις τους. Τα υπόλοιπα θέματα θα δημοσιευθούν στο επόμενο τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

Η Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ευχαριστεί θερμά την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία και τον πρόεδρό της Dr Μακρίδη Γρηγόρη και της εύχεται καλή επιτυχία στο δύσκολο έργο της. Το Παράρτημα της Ημαθίας επιζητεί τη συνεργασία και ανταλλαγή απόψεων στα διάφορα μαθηματικά θέματα με όλα τα μαθηματικά σωματεία του κόσμου και ευελπιστεί στη συνεργασία τους.

Οι λύσεις που ακολουθούν ανήκουν στους μαθηματικούς και μέλη του Διοικητικού Συμβουλίου της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας: ***Σάββα Ιωαννίδη, Ανδρέα Σαββίδη, Ευθύβουλο Λιασίδη*** *καθώς και στον* ***Αναστάσιο Ευαγόρου****, που είχε τη γενική επιμέλεια της έκδοσης των λύσεων.*

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Λόγω του μεγάλου ενδιαφέροντος των θεμάτων και της δυσκολίας λύσης τους, ζητούμε από τους αναγνώστες του Α να μας στείλουν και άλλες λύσεις τις οποίες και θα δημοσιεύσουμε στα επόμενα τεύχη.

ΕΒΔΟΜΗ ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
(ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5 ΕΤΩΝ)

SEVENTH JUNIOR BALKAN MATHIMATICAL OLYMPIAD
ΣΜΥΡΝΗ 20-25 Ιουνίου 2003

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΡΟΤΑΘΗΚΑΝ

1. Ένας θετικός ακέραιος Α έχει 2ν ψηφία που είναι όλα ίσα με 4. Δεύτερος θετικός ακέραιος Β έχει ν ψηφία που είναι όλα 8. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν η παράσταση Α + 2Β + 4 είναι τετράγωνος αριθμός.

ΛΥΣΗ:

Οι αριθμοί Α και Β γράφονται ως εξής:

$$A = 4\cdot(10^{2v-1}+10^{2v-2}+\ldots+10+1) = 4\cdot\frac{10^{2v}-1}{10-1}$$

$$B = 8\cdot(10^{v-1}+10^{v-2}+\ldots+10+1) = 8\cdot\frac{10^{v}-1}{10-1}$$

Τότε, η παράσταση Α + 2Β + 4 γίνεται,

$$\begin{aligned} A+2B+4 &= \frac{4}{9}\cdot(10^{2v}-1)+\frac{16}{9}\cdot(10^{v}-1)+4 \\ &= \frac{4}{9}\cdot(10^{2v}-1+4\cdot10^{v}-4+9) \\ &= \frac{4}{9}\cdot(10^{2v}+4\cdot10^{v}+4) \\ &= \frac{4}{9}(10^{v}+2)^2 \\ &= \left[\frac{2}{3}(10^{v}+2)\right]^2 \end{aligned}$$

2. **Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι: $|p-q|<1$ όπου $p=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}$ και $q=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$.**

ΛΥΣΗ:

Έχουμε κατά σειρά:

$$|p-q|=\left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right|=$$

$$=\left|\frac{\alpha-\gamma}{\beta}+\frac{\beta-\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma-\beta}{\alpha}=\right|$$

$$=\left|\frac{\alpha^2\gamma-\gamma^2\alpha+\beta^2\alpha-\alpha^2\beta+\gamma^2\beta-\beta^2\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right|=$$

$$=\left|\frac{\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma^2-\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma-\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha\beta^2-\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right|=$$

$$=\left|\frac{\alpha\gamma(\beta-\gamma)-\alpha^2(\beta-\gamma)-\beta\gamma(\beta-\gamma)+\alpha\beta(\beta-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}\right|=$$

$$=\frac{\left|(\beta-\gamma)(\alpha\gamma-\alpha^2-\beta\gamma+\alpha\beta)\right|}{\alpha\beta\gamma}=$$

$$=\frac{\left|(\beta-\gamma)\cdot\left[\alpha(\gamma-\alpha)-\beta(\gamma-\alpha)\right]\right|}{\alpha\beta\gamma}=$$

$$=\frac{\left|(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\right|}{\alpha\beta\gamma}=\frac{|\beta-\gamma|\cdot|\gamma-\alpha|\cdot|\alpha-\beta|}{\alpha\beta\gamma}<\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}=1$$

Ισχύει: $|\beta-\gamma|<\alpha,|\gamma-\alpha|<\beta,|\alpha-\beta|<\gamma$.

3. **Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.**

α) Να δείξετε ότι: $\rho=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-2(\alpha+\beta+\gamma)\geq-\frac{5}{2}$.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των α, β και γ για τις οποίες ισχύει $\rho=-\frac{5}{2}$.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-1}{2}$$

Θέτουμε λ = α + β + γ

Τότε $\rho = \frac{\lambda^2-1}{2} - 2\lambda = \frac{\lambda^2-4\lambda-1}{2} = \frac{\lambda^2-4\lambda+4-4-1}{2} = \frac{(\lambda-2)^2-5}{2} \geq -\frac{5}{2}$

Για να έχουμε $\rho = -\frac{5}{2}$ θα πρέπει: λ = 2 ή α + β + γ = 2 $\Rightarrow$ γ = 2 – α – β

Αντικαθιστούμε στη σχέση $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ και έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2+(2-\alpha-\beta)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2+4+\alpha^2+\beta^2-4\alpha-4\beta+2\alpha\beta-1=0 \Rightarrow$$

$$2\alpha^2+2(\beta-2)\alpha+2\beta^2-4\beta+3=0$$

Για $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 4\cdot(\beta-2)^2-8\cdot(2\beta^2-4\beta+3)\geq 0 \Rightarrow$

$$(\beta-2)^2-2(2\beta^2-4\beta+3)\geq 0 \Rightarrow \beta^2-4\beta+4-4\beta^2+8\beta-6\geq 0 \Rightarrow$$

$$-3\beta^2+4\beta-2\geq 0 \Rightarrow -3\cdot(\beta^2-\frac{4}{3}\beta+\frac{2}{3})\geq 0 \Rightarrow$$

$$-3\cdot\left[\beta^2-\frac{4}{3}\beta+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\right]\geq 0 \Rightarrow -3\left[\left(\beta-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right]\geq 0, \text{ αδύνατο.}$$

Το άτοπο δείχνει ότι $\rho \neq -\frac{5}{2}$. Άρα δεν υπάρχουν τιμές των α, β και γ που να ικανοποιούν την ισότητα $\rho = -\frac{5}{2}$

4. Για τους ρητούς αριθμούς α , β , γ ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{\alpha+\beta\gamma}+\frac{1}{\beta+\alpha\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

Να δείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\frac{\gamma-3}{\gamma+1}}$ είναι ρητός αριθμός.

ΛΥΣΗ:

Μετασχηματίζουμε τη δοθείσα σχέση:

$$\frac{1}{\alpha+\beta\gamma}+\frac{1}{\beta+\alpha\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta} \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\alpha\gamma)+(\alpha+\beta)(\alpha+\beta\gamma)=(\alpha+\beta\gamma)(\beta+\alpha\gamma) \Rightarrow$$

$$\alpha\beta+\cancel{\alpha^2\gamma}+\beta^2+\alpha\beta\gamma+\alpha^2+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\cancel{\beta^2\gamma}=\alpha\beta+\cancel{\alpha^2\gamma}+\cancel{\beta^2\gamma}+\alpha\beta\gamma^2 \Rightarrow$$

$$\alpha\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma+\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Rightarrow$$

$$\alpha\beta(\gamma^2-2\gamma+1)=(\alpha+\beta)^2 \Rightarrow$$

$$\alpha\beta(\gamma-1)^2=(\alpha+\beta)^2 \quad (1)$$

Προσπαθούμε τώρα να μετασχηματίσουμε το κλάσμα $\frac{\gamma-3}{\gamma+1}$

Κατ' αρχάς $\gamma\neq -1$ διότι τότε η αρχική σχέση θα έδινε:

$$\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\alpha+\beta} \Rightarrow \frac{1}{\alpha+\beta}=0\text{, άτοπο}$$

Έτσι έχουμε :

$$\frac{\gamma-3}{\gamma+1}=\frac{(\gamma-3)(\gamma+1)}{(\gamma+1)^2}=\frac{\gamma^2-2\gamma-3}{(\gamma+1)^2}=$$

$$=\frac{\gamma^2-2\gamma+1-1-3}{(\gamma+1)^2}=\frac{(\gamma-1)^2-4}{(\gamma+1)^2}$$

$$=\frac{\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-4}{(\gamma+1)^2}\overset{(1)}{=}\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta}{\alpha\beta(\gamma+1)^2}=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta(\gamma+1)^2}$$

Είναι όμως, από το (1), $\alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma-1)^2}$

Έτσι τελικά $\frac{\gamma-3}{\gamma+1}=\frac{(\alpha-\beta)^2(\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^2(\alpha+\beta)^2}\Rightarrow\sqrt{\frac{\gamma-3}{\gamma+1}}=\frac{|\alpha-\beta|\cdot|\gamma+1|}{|\gamma+1|\cdot|\alpha+\beta|}\in\mathbb{Q}$

5. Δίδεται το σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ φυσικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι:

$$\left|\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 - \alpha^2\beta - \beta^2\gamma - \gamma^2\alpha\right| \geq 2 .$$

ΛΥΣΗ:

Συμβολίζουμε με $K = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 - \alpha^2\beta - \beta^2\gamma - \gamma^2\alpha$

Οπότε,
$$\begin{aligned} K &= (\alpha\beta\gamma - \gamma^2\alpha) + (\gamma\alpha^2 - \alpha^2\beta) + (\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma) + (\alpha\beta^2 - \alpha\beta\gamma) \\ &= \alpha\gamma(\beta - \gamma) - \alpha^2(\beta - \gamma) - \beta\gamma(\beta - \gamma) + \alpha\beta(\beta - \gamma) \\ &= (\beta - \gamma)(\alpha\gamma - \alpha^2 - \beta\gamma + \alpha\beta) \\ &= (\beta - \gamma)(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha) \end{aligned}$$

Έτσι $|K| = |\beta - \gamma| \cdot |\alpha - \beta| \cdot |\gamma - \alpha|$

Κάθε παράγοντας του |K| είναι θετικός ακέραιος αφού α, β, $\gamma \in \mathbb{N}^*$, και ισχύει: $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\alpha \neq \gamma$.

Η πιο μικρή τιμή του |K| παρουσιάζεται όταν α, β, γ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί.

Δηλαδή $|\beta - \gamma| \cdot |\alpha - \beta| \cdot |\gamma - \alpha| = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$, άρα $|K| \geq 2$.

6. Για τους θετικούς αριθμούς α , β , γ ισχύει αβ + βγ + γα = 3. Να δείξετε ότι α + β + γ ≥ αβγ + 2.

ΛΥΣΗ:

Λύνουμε τη δοθείσα σχέση αβ + βγ + γα = 3 ως προς γ και έχουμε:

$$\gamma = \frac{3 - \alpha\beta}{\alpha + \beta} .$$

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται:

$$\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + (1 - \alpha\beta) \cdot \gamma = \alpha + \beta + \frac{(1 - \alpha\beta) \cdot (3 - \alpha\beta)}{\alpha + \beta}$$

Θέτουμε $x = \sqrt{\alpha\beta}$. Τότε $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha + \beta \geq 2x$.

Χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα της άσκησης, υποθέτουμε:

$\alpha \geq \beta \geq \gamma \Rightarrow \gamma \leq 1$, (από την ισότητα που δόθηκε).

Άρα:

$$3\alpha\beta \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \;\Rightarrow\; \alpha\beta \geq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1-\alpha\beta)\cdot(3-\alpha\beta)}{\alpha+\beta} \geq \frac{(1-x^2)\cdot(3-x^2)}{2x}$$

(Επειδή $1-x^2 < 0,\ldots\ 3-x^2 > 0,\ldots\ \alpha+\beta \geq 2x > 0$)

Είναι λοιπόν αρκετό να δείξουμε ότι $2x + \frac{(1-x^2)\cdot(3-x^2)}{2x} \geq 2$

Αλλά,

$$2x + \frac{(1-x^2)\cdot(3-x^2)}{2x} = \frac{4x^2+3-x^2-3x^2+x^4}{2x} = \frac{3+x^4}{2x}$$

$$= \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{x^3}{2} \geq 4\cdot\sqrt{\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{x^3}{2}} =$$

$$= 4\cdot\sqrt{\frac{1}{16}} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2, \ (\text{Αριθμ. μέσος} \geq \text{Γεωμ. μέσου})$$

7. Δίδονται οι πραγματικοί αριθμοί χ , ψ και ω οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι από το –1.

Να δείξετε ότι: $\dfrac{1+\chi^2}{1+\psi+\omega^2} + \dfrac{1+\psi^2}{1+\omega+\chi^2} + \dfrac{1+\omega^2}{1+\chi+\psi^2} \geq 2$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε:

$$(\psi-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \psi^2 - 2\psi + 1 \geq 0 \;\Rightarrow \psi \leq \frac{\psi^2+1}{2} \Rightarrow \frac{1+\chi^2}{1+\psi+\omega^2} \geq \frac{1+\chi^2}{1+\omega^2+\frac{1+\psi^2}{2}}$$

Ομοίως, έχουμε:
$$\begin{cases} \dfrac{1+\psi^2}{1+\omega+\chi^2} \geq \dfrac{1+\psi^2}{1+\chi^2+\frac{1+\omega^2}{2}} \\ \dfrac{1+\omega^2}{1+\chi+\psi^2} \geq \dfrac{1+\omega^2}{1+\psi^2+\frac{1+\chi^2}{2}} \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{1+\chi^2}{1+\psi+\omega^2}+\frac{1+\psi^2}{1+\omega+\chi^2}+\frac{1+\omega^2}{1+\chi+\psi^2}\geq$$

$$\geq\frac{1+\chi^2}{1+\omega^2+\dfrac{1+\psi^2}{2}}+\frac{1+\psi^2}{1+\chi^2+\dfrac{1+\omega^2}{2}}+\frac{1+\omega^2}{1+\psi^2+\dfrac{1+\chi^2}{2}}$$

Αρκεί, λοιπόν να δείξουμε ότι:

$$\frac{1+\chi^2}{1+\omega^2+\dfrac{1+\psi^2}{2}}+\frac{1+\psi^2}{1+\chi^2+\dfrac{1+\omega^2}{2}}+\frac{1+\omega^2}{1+\psi^2+\dfrac{1+\chi^2}{2}}\geq 2$$

Θέτουμε $\alpha = 1+ \chi^2$, $\beta = 1+ \psi^2$, $\gamma = 1+ \omega^2$ και η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$\frac{\alpha}{\gamma+\dfrac{\beta}{2}}+\frac{\beta}{\alpha+\dfrac{\gamma}{2}}+\frac{\gamma}{\beta+\dfrac{\alpha}{2}}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2\gamma+\beta}+\frac{\beta}{2\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{2\beta+\alpha}\geq 1 \quad (1)$$

με $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Θέτουμε $A = 2\gamma + \beta$, $B = 2\alpha + \gamma$, $\Gamma = 2\beta + \alpha$. Λύνουμε ως προς α, β, γ:

$$\alpha=\frac{\Gamma+4B-2A}{9},\ \beta=\frac{A+4\Gamma-2B}{9},\ \gamma=\frac{B+4A-2\Gamma}{9}$$

και η (1) γίνεται:

$$\frac{\Gamma+4B-2A}{A}+\frac{A+4\Gamma-2B}{B}+\frac{B+4A-2\Gamma}{\Gamma}\geq 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Gamma}{A}+\frac{A}{B}+\frac{B}{\Gamma}+4\left(\frac{B}{A}+\frac{\Gamma}{B}+\frac{A}{\Gamma}\right)\geq 15, \quad (2)$$

Αλλά, $A, B, \Gamma > 0$, άρα:

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{\Gamma}+\frac{\Gamma}{A}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{A.B.\Gamma}{B.\Gamma.A}}=3, \ (\text{Αριθμ. Μέσος} \geq \text{Γεωμ. Μέσος})$$

και:

$$\frac{B}{A}+\frac{\Gamma}{B}+\frac{A}{\Gamma}\geq 3\ , \ (\text{για τον ίδιο λόγο})$$

Επομένως, ισχύει η (2), άρα και η αρχική σχέση.

8. Να βρεθούν ακέραιοι αριθμοί χ, ψ, ω, μ, ν, ρ διάφοροι μεταξύ τους οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του αριθμού 2003 και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\chi + \psi + \omega = \mu + \nu + \rho \quad \text{και} \quad \chi^2 + \psi^2 + \omega^2 = \mu^2 + \nu^2 + \rho^2.$$

ΛΥΣΗ:

Είναι προφανές ότι οι αριθμοί χ, ψ, ω και μ, ν, ρ θα ικανοποιούν τις δοθείσες σχέσεις αν είναι πυθαγόρειες τριάδες ως ακολούθως:

$$\chi = 3\lambda,\ \psi = 4\lambda,\ \mu = 5\lambda \quad \text{και} \quad \omega = 13\kappa,\ \nu = 12\kappa,\ \rho = 5\kappa,$$

οπότε, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\chi^2 + \psi^2 = \mu^2,\ \ \nu^2 + \rho^2 = \omega^2$$

και:

$$3\lambda + 4\lambda + 13\kappa = 5\lambda + 12\kappa + 5\kappa \ \Rightarrow\ 2\lambda = 4\kappa \ \Rightarrow\ \lambda = 2\kappa$$

Άρα προκύπτει:

$$\chi = 6\kappa,\ \ \psi = 8\kappa,\ \ \omega = 13\kappa,\ \ \mu = 10\kappa,\ \ \nu = 12\kappa,\ \ \rho = 5\kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{N}$$

Επειδή οι αριθμοί πρέπει να είναι μεγαλύτεροι του 2003 και ο 5κ είναι ο μικρότερος από αυτούς, θα πρέπει: $5\kappa > 2003 \Leftrightarrow \kappa \geq 401$.

Για $\kappa = 401$ είναι:

$$\chi = 2406,\quad \psi = 3208,\quad \omega = 5213$$

$$\mu = 4010,\quad \nu = 4812,\quad \rho = 2005$$

Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις!

Μία δεύτερη προσέγγιση με πυθαγόρειες τριάδες:

$\chi = 2\tau,\quad \psi = \tau^2 - 1,\quad \mu = \tau^2 + 1 \quad (\chi^2 + \psi^2 = \mu^2)$

$\nu = 4\lambda,\quad \rho = \lambda^2 - 4,\quad \omega = \lambda^2 + 4 \quad (\nu^2 + \rho^2 = \omega^2)$

Άρα,

$2\tau + \tau^2 - 1 + \lambda^2 + 4 = \tau^2 + 1 + 4\lambda + \lambda^2 - 4 \Leftrightarrow 2\tau = 4\lambda - 6 \Leftrightarrow \tau = 2\lambda - 3 \quad (1)$

Πρέπει: $\chi > 2003 \Leftrightarrow 2\tau > 2003 \Leftrightarrow \tau > 1001{,}5$

και: $\nu > 2003 \Leftrightarrow 4\lambda > 2003 \Leftrightarrow \lambda > 500{,}75$

Σε συνδυασμό με τη σχέση (1) έχουμε $\tau \geq 1003$ και $\lambda \geq 503$

$$\text{Αν } \lambda = 503 \Rightarrow \quad \tau = 1003 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \chi = 2006, \quad \psi = 1006008, \quad \omega = 253013 \\ \mu = 1006010, \quad \nu = 2012, \quad \rho = 253005 \end{array} \right.$$

Προφανώς υπάρχουν άπειρες λύσεις!

9. Σε ένα σχολείο φοιτούν 60 μαθητές. Στο σχολείο διδάσκονται Αγγλικά, Γαλλικά και Γερμανικά. 40 μαθητές μιλούν Αγγλικά, 30 μιλούν Γαλλικά και 8 μιλούν και τις τρεις γλώσσες. Ο αριθμός των μαθητών που μιλούν Αγγλικά και Γαλλικά αλλά όχι Γερμανικά είναι ίσος με το άθροισμα του αριθμού των μαθητών οι οποίοι μιλούν Αγγλικά και Γερμανικά αλλά όχι Γαλλικά συν τον αριθμό των μαθητών που μιλούν Γαλλικά και Γερμανικά αλλά όχι Αγγλικά. Ο αριθμός των μαθητών που μιλούν δύο τουλάχιστον από τις τρεις γλώσσες είναι 28.
Πόσοι μαθητές μιλούν:

(α) Γερμανικά (β) μόνο Αγγλικά (γ) μόνο Γερμανικά;

ΛΥΣΗ:

Τα δεδομένα του προβλήματος εκφράζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

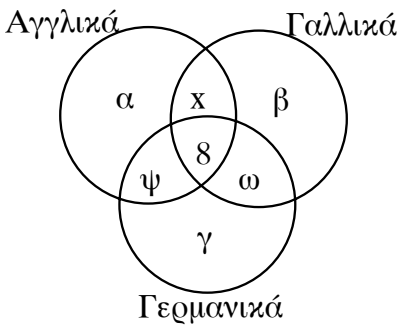
$$\alpha + \chi + \psi + 8 = 40 \quad (1)$$

$$\beta + \chi + \omega + 8 = 30 \quad (2)$$

$$\chi = \psi + \omega \quad (3)$$

$$\chi + \psi + \omega + 8 = 28 \quad (4)$$

$$\alpha + \chi + \psi + 8 + \beta + \omega + \gamma = 60 \quad (5)$$



Από τις σχέσεις (3) και (4) $\Rightarrow$ $2\psi + 2\omega + 8 = 28 \Leftrightarrow \psi + \omega = 10 \Rightarrow \chi = 10$

Από τις σχέσεις (1) και (2) $\Rightarrow$ $\alpha + \beta + 2\chi + \psi + \omega + 16 = 70 \Rightarrow \alpha + \beta = 24$

Αντικαθιστούμε στην (5) και έχουμε:

$$24 + 10 + \psi + \omega + \gamma + 8 = 60$$

$\Rightarrow$ $\psi + \omega + \gamma + 8 = 26 \Rightarrow$ **26 μιλούν Γερμανικά**

$\Rightarrow$ 10 + γ + 8 = 26 $\Rightarrow$ γ = 8 $\Rightarrow$ **8 μιλούν μόνο Γερμανικά**

Από την (1) έχουμε α + ψ = 22 $\Rightarrow$ α =22 – ψ,

άρα δεν μπορεί να βρεθεί πόσοι μιλούν **μόνο Αγγλικά**.

10. Οι φυσικοί αριθμοί 1, 2, 3, . . . , 2003 γράφονται κατά αυθαίρετη σειρά $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{2003}$.
Έχουμε $\beta_1 = 1\cdot\alpha_1, \beta_2 = 2\cdot\alpha_2, \beta_3 = 3\cdot\alpha_3, ..., \beta_{2003} = 2003\cdot\alpha_{20003}$
και Β είναι μεγαλύτερος από τους $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_{2003}$

α) Αν $\alpha_1 = 2003, \alpha_2 = 2002, \alpha_3 = 2001, ..., \alpha_{2002} = 2, \alpha_{2003} = 1$, να βρεθεί η τιμή του Β.

β) Να δείξετε ότι $B \geq 1002^2$.

ΛΥΣΗ:

α) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: Γεωμ. Μέσος $\leq$ Αριθμ. Μέσου και έχουμε:

$$\beta_v = v\cdot(2004 - v) \leq \left(\frac{v + 2004 - v}{2}\right)^2 = 1002^2$$

για v = 1, 2, 3, … 2003

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν v = 2004 – v $\Rightarrow$ v = 1002

$\Rightarrow$ B = B_{1002} = 1002.(2004 – 1002) = 1002^2.

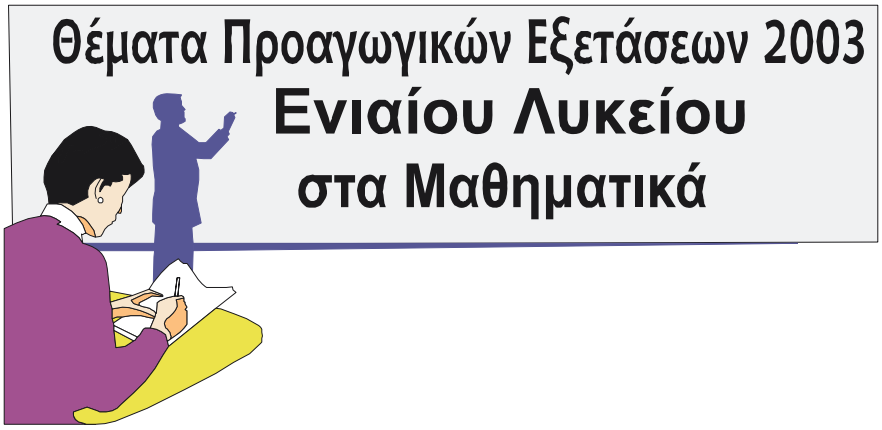
β) Μία αυθαίρετη σειρά των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, …, 2003 είναι:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{3,...,} \alpha_{2003.}$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 1002, 1003, 1004,…,2003 δεν μπορούν να τοποθετηθούν στις πρώτες θέσεις από 1 έως 1001 διότι έχουμε (2003 – 1002) + 1 = 1002 αριθμούς και 1001 θέσεις.

Άρα τουλάχιστον ένας από αυτούς τους αριθμούς έστω ο α_μ θα τοποθετηθεί σε μία θέση μ > 1001.

Άρα, $B \geq \mu\cdot\alpha_\mu \geq 1002\cdot1002 = 1002^2$



Παραθέσουμε τα θέματα των εξετάσεων στα Μαθηματικά της Β΄ και Γ΄ Λυκείου του Μαΐου και Ιουνίου 2003. *Δεν θα δώσουμε τις λύσεις τους εξαιτίας του μεγάλου μεγέθους τους και επειδή οι μαθητές μπορούν να τις βρουν εύκολα*.

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ο $\nu^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

Μονάδες 7

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν $\log_\alpha\theta = x$, τότε:
α. $\alpha^\theta = x$ **β.** $x^\alpha = \theta$ **γ.** $\alpha^x = \theta$

Μονάδες 3

Γ. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν S_ν συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου α_ν με λόγο $\lambda \neq 1$ και πρώτο όρο α_1, τότε είναι:

α. $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda-1}{\lambda^\nu-1}$ **β.** $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$ **γ.** $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{1-\lambda^\nu}{\lambda-1}$

Μονάδες 3

Δ. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Ο τύπος που εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας 2α είναι:

α. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$ **β.** $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ **γ.** $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Μονάδες 3

Ε. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες:*

α. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το ..... των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι ..... προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

γ. Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και $\alpha \neq 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα .....

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2ο

Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = (\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1)\eta\mu x$$

Μονάδες 12

και να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους

$$\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = -11 + 2\nu$ με πρώτο όρο α_1 καθώς και το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_ν είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$ και διαφορά $\omega = 2$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{12}+\alpha_{13}+...+\alpha_{21}$, όπου α_{12}, α_{13}, ..., α_{21} είναι διαδοχικοί όροι της προόδου α_ν.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου α_ν.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1).$$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f(x) και g(x). **Μονάδες 6**

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x). **Μονάδες 10**

γ. Να λύσετε την ανίσωση f(x) > 2g(x). **Μονάδες 9**

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω ένας κύκλος (O,R).

α. Στον κύκλο (O,R) να εγγράψετε τετράγωνο.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου α_4 το απόστημα του τετραγώνου. **Μονάδες 4**

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **"Σωστό"** αν η πρόταση είναι σωστή και **"Λάθος"** αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

Μονάδες 2

β. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 2

γ. Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) ορίζεται με τον τύπο: $\Delta^P_{(O,R)} = R^2 + OP^2$. **Μονάδες 2**

δ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Μονάδες 2

Γ. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 1 και ΒΓ = $\sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε:

α. τη γωνία $\hat{A}$ **Μονάδες 9**

β. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ **Μονάδες 9**

γ. τη διάμεσο ΒΜ = μ_β. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ τέτοιες, ώστε να ισχύει:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2.$$

Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε,

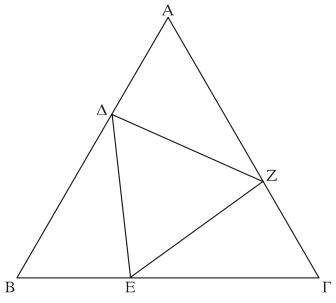
α. να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς α

Μονάδες 12

β. να αποδείξετε ότι $AM \cdot AE = \frac{3\alpha^2}{2}$ **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι: ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ = $\frac{1}{3}$α, όπως στο διπλανό σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α:

α. του τριγώνου ΑΔΖ **Μονάδες 9**

β. του τριγώνου ΔΕΖ **Μονάδες 7**

γ. του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ. **Μονάδες 9**

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} .$$

Μονάδες 7

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(–γ, 0), Ε(γ, 0) και σταθερό άθροισμα 2α είναι: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$.

Μονάδες 2

δ. Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

Μονάδες 2

Γ. **α.** Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$, πότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α;

Μονάδες 5

β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $\alpha \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή
$\alpha^3 = 8k$ όπου $k \in \mathbb{Z}$ ή $\alpha^3 = 2k + 1$ όπου $k \in \mathbb{Z}$. **Μονάδες 12**

Β. Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2 + 1)$ είναι άρτιος. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο IR .

Μονάδες 8

Β. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ **Μονάδες 8**

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή Α(1,5) και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:
η παραβολή $y^2 = 2px$, και η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p>0$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία:

$$E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right) \text{ και } E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$$

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$. **Μονάδες 8**

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες. **Μονάδες 9**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.

Μονάδες 8

Β. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

Μονάδες 6

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων. **Μονάδες 6**

Δ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

γ. Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος **Μονάδες 5**

β. γυναίκα και όχι φιλόλογος **Μονάδες 5**

γ. άνδρας και φιλόλογος **Μονάδες 7**

δ. άνδρας ή φιλόλογος. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Α. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. $\mathbb{R}$ **β.** $(-1,1)$ **γ.** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ **δ.** $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -1} \left[(x+1) \cdot f(x) \right]$ **Μονάδες 6**

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)) με τον άξονα x΄x .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας. **Μονάδες 6**

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

Μονάδες 5

γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων; **Μονάδες 8**

δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα. **Μονάδες 6**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 8**

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; **Μονάδες 7**

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$. **Μονάδες 2**

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ. **Μονάδες 2**

γ. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει: $\int f'(x)dx = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 2**

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. **Μονάδες 2**

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και

$w = 3z - i \cdot \overline{z} + 4$, όπου $\overline{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$, $Im(w) = 3\beta - \alpha$.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) = f(1 + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, 0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ που έχει συνε-

χή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α,β), δ∈(α,β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ) < 0, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο διάστημα (α, β).

Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.(*)

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

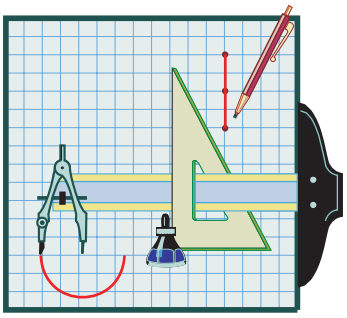
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

(*) Το θέμα 4γ είναι λανθασμένο. Το ζητούμενο δεν μπορεί να αποδειχθεί. Βλέπε και στα σχετικά κείμενα στο τεύχος 2 του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

Προτεινόμενες Ασκήσεις* Μαθηματικών Α΄, Β΄, Γ΄ Λυκείου



ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ: ΟΡΟΙ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ – ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ

Φίλοι αναγνώστες, συνεργάτες του περιοδικού, ο "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ" απευθύνεται σε μαθητές Α΄, Β΄, Γ΄ Λυκείου, σε συναδέλφους, αλλά και σε κάθε ενδιαφερόμενο. Η ύλη του λοιπόν πρέπει να προσαρμόζεται σ' αυτά τα όρια.

Όλες οι λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, μαζί με τις εκφωνήσεις τους, θα δημοσιευτούν σ' ένα ειδικό τεύχος. Στο τεύχος αυτό θα δημοσιευτούν και τα ονόματα των προτεινόντων και λυτών.

Στείλτε μας τις εργασίες σας ή τις προτεινόμενες ασκήσεις ή λύσεις των ασκήσεων που προτείναμε στη διεύθυνση ή fax ή e-mail που αναγράφονται στη σελίδα 2. Θα μας διευκολύνατε αν τα κείμενα σας είναι σε ηλεκτρονική μορφή (δισκέτες ή e-mail)

Για διευκόλυνσή μας, μη γράφετε σ' ένα φύλλο περισσότερες από μία άσκηση (μαζί με τη λύση της).

Οι εργασίες και οι ασκήσεις πρέπει να είναι, κατά το δυνατόν, πρωτότυπες. Αν έχουν δημοσιευτεί και αλλού, σας παρακαλούμε να μας το γνωρίζετε˙ αυτό δεν εμποδίζει τη δημοσίευσή τους και στο περιοδικό μας.

Μη ξεχνάτε να μας γράφετε τη διεύθυνση, το τηλέφωνο και την ηλεκτρονική διεύθυνσή σας (αν υπάρχει), για να μπορούμε να επικοινωνούμε μαζί σας.

Από τη Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

---

* *Οι ασκήσεις με αστερίσκο ✶ είναι πιο δύσκολες*

Α΄ Λυκείου

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α31. Αν α, β, γ είναι πραγματικός αριθμός με:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\gamma+\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta},$$

να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha+\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\alpha+\beta}=3$.

Στεργίου Μπάμπης, Μαθηματικός, Χαλκίδα

Α32. Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου, για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\gamma^2}+\frac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)}{\alpha^2}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha)}{\beta^2}=0$$

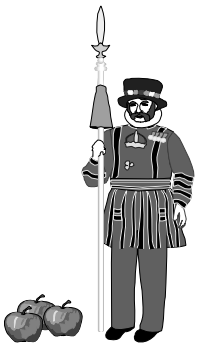
να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

Τσόπελας Ιωάννης, Μαθηματικός, Αμαλιάδα Ηλείας

Α33. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2-(\kappa+\lambda)x-1=0$ και τη συνάρτηση $f(x)=x-2$. Αν γνωρίζουμε ότι η εξίσωση έχει για ρίζες τους αριθμούς κ, λ και ότι $f(\kappa)=\lambda$, να προσδιοριστούν οι τιμές των κ και λ.

Γραμμένος Μίλτος, Μαθηματικός, Κέρκυρα

Α34. Ένας άνδρας μπήκε σε ένα κτήμα με μήλα, που είχε είσοδο από ένα διάδρομο με εφτά πύλες, που τις φύλαγαν εφτά φρουροί. Όταν έφευγε, για να τον αφήσουν να φύγει, έδωσε στον πρώτο τα μισά από όσα είχε και ακόμα ένα. Επίσης στον δεύτερο έδωσε τα μισά από όσα του έμειναν και ακόμα ένα. Συνέχισε έτσι, με αποτέλεσμα να φύγει από το κτήμα με ένα και μόνο μήλο... Πόσα μάζεψε από το κτήμα;



Από παλιό παραμύθι...

Για την επιλογή: ***Ρίζος Γιώργος, Μαθηματικός, Κέρκυρα***

Α35. Αν $2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu y=5$, να δειχθεί ότι: $3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu y=1$.

Πάλλα Φένια, Μαθήτρια Β΄Λυκείου, Βέροια

Α36. α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\geq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$.

β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $-\sqrt{2}\le \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le\sqrt{2}$.

Για ποιες τιμές του $x\in[0, 2\pi]$ ισχύει το " = " σε κάθε ανισότητα;

Κοραΐδου Ελένη, Μαθηματικός, Βέροια

✶**Α37.** Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\alpha^4+\beta^2+2\gamma^2=2(\alpha\beta+\gamma+\alpha\gamma-1)$$

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**Α38.** Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

α) $x^3+y^3\ge xy(x+y)$ για κάθε $x, y > 0$

β) $\dfrac{1}{1+\alpha+\beta}+\dfrac{1}{1+\beta+\gamma}+\dfrac{1}{1+\gamma+\alpha}\le 1$

Στεργίου Μπάμπης, Μαθηματικός, Χαλκίδα

✶**Α39.** Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί έτσι ώστε: $\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\alpha}\le\dfrac{1}{\beta}\le\alpha$, να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta+\gamma\ge\sqrt{6}$

Τσόπελας Ιωάννης, Μαθηματικός, Αμαλιάδα Ηλείας

✶**Α40.** Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha^2}{\beta+\gamma+2\alpha}+\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\beta^2}{\alpha+\gamma+2\beta}+\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\gamma^2}{\alpha+\beta+2\gamma}\le\alpha+\beta+\gamma$$

Στεργίου Μπάμπης, Μαθηματικός, Χαλκίδα

✶**Α41.** Μία κυρία έδωσε στις αποσκευές της ένα σακίδιο, μία βαλίτσα, ένα κουτί και ένα καλάθι. Η βαλίτσα ζυγίζει περισσότερο από το σακίδιο, το κουτί και το σακίδιο μαζί ζυγίζουν περισσότερο από τα άλλα δύο πράγματα. Το κουτί μαζί με το καλάθι ζυγίζουν όσο η βαλίτσα με το σακίδιο.

Να διατάξετε αυτά τα τέσσερα αντικείμενα, ανάλογα με το βάρος τους.

Από εξετάσεις ανωτέρων σχολών πρώην Σοβιετικής Ένωσης
Για την επιλογή: ***Ρίζος Γιώργος, Μαθηματικός, Κέρκυρα***

✶**Α42.** Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x, y, αν ισχύει:

$$9x^2y+3y^2+x=9xy.$$

Αντωνόπουλος Νίκος, Μαθηματικός, Ίλιον, Αθήνα

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α43. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του, Ζ και Η τα κέντρα βάρους των τριγώνων ΕΑΔ και ΕΒΓ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι: **α)** ZH // AB **β)** $ZH = \frac{1}{3}(AB + \Gamma\Delta)$

Γκαγκούσης Βασίλης, Μαθητής Γ΄ Λυκείου, Βέροια

Α44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε τη διχοτόμο ΒΖ και την κάθετη από το Α στη ΒΖ, που τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Αποδείξτε ότι: ΑΖ = ΓΔ.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

Α45. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται με τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδειχθεί ότι τα κέντρα Κ, Λ, Μ των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ, ΓΔΕ αντίστοιχα, βρίσκονται στον εγγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ.

β) Να αποδειχθεί ότι οι ΚΔ, ΛΕ, ΜΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ιωσηφίδης Γιώργος, Μαθηματικός, Βέροια

∗**Α46.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ της ΓΔ, τέτοια ώστε ΓΕ = ΔΖ. Να αποδειχθεί ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΒΕΖ βρίσκεται στη διαγώνιο ΑΓ.

Ιωσηφίδης Γιώργος, Μαθηματικός, Βέροια

∗**Α47.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της πλευράς ΓΔ. Να βρεθεί η θέση του Ε, ώστε η γωνία $\widehat{AEB}$ να είναι μέγιστη.

Παπαδόπουλος Μανώλης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας

Β΄ Λυκείου

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β65. Για τα πολυώνυμα $f(x)$ και g(x) ισχύουν:

- το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x) + g(x)$ δια $x - 1$ είναι 2,
- το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x) - g(x)$ δια $x - 1$ είναι 4.

Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)\cdot g(x)$ δια $x - 1$;

Γκαγκούση Βανέσσα, Μαθήτρια Β΄ Λυκείου, Βέροια

Β66. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 136, 129, 122, ...
Ποιος όρος της προόδου είναι πιο κοντά στο 0;

Τσιλίκας Χρήστος, Μαθητής Γ΄Λυκείου, Βέροια

Β67. Να αποδειχθεί ότι οι αριθμητικές πρόοδοι: $\begin{cases} 8, 11, 14, ... \\ \text{και} \\ 10, 16, 22, ... \end{cases}$ δεν έχουν κανέναν κοινό όρο.

Γολιδοπούλου Εύα, Μαθηματικός, Βέροια

Β68. Δίνονται οι αριθμητικές πρόοδοι: $\begin{cases} 3, 8, 13, 18, ... \\ \text{και} \\ 5, 8, 11, 14, ... \end{cases}$

Πόσοι όροι της δεύτερης περιέχονται μεταξύ του 21ου και του 40ου όρου της πρώτης;

Γολιδοπούλου Εύα, Μαθηματικός, Βέροια

Β69. Ονομάζουμε Α το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 3, 7, 11, 15, ... και Β το άθροισμα των ν επόμενων όρων της. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει $\omega \in \mathbb{N}^*$ ώστε το κλάσμα $\frac{B}{A}$ είναι ακέραιος.

Κοραΐδου Ελένη, Μαθηματικός, Βέροια

Β70. Δίνονται οι γεωμετρικές πρόοδοι 1, 4, 16, 64, ... και 3, 12, 48, ...
Με τους όρους σχηματίζουμε την ακολουθία 1, 3, 4, 12, 16, 48, ...
Ένας από τους όρους αυτής της ακολουθίας είναι ο αριθμός 1048576.
Να βρείτε τον προηγούμενο και τον επόμενο όρο της ακολουθίας.

Αντωνόπουλος Νίκος, Μαθηματικός, Ίλιον, Αθήνα
(Από την "Άλγεβρα Β΄ Λυκείου", Β΄τόμος, εκδ. ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ)

Β71. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
Αν για τους αριθμούς α, β, γ ισχύει η ισότητα:
$(\alpha + \beta + \gamma + 1)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha - 2\beta + 3) = 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ως ρίζα τον αριθμό 1.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει και τις τρεις ρίζες πραγματικές, όταν ισχύει: $\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 \geq \beta + 1$ και αντιστρόφως.

Αντωνόπουλος Νίκος, Μαθηματικός, Ίλιον, Αθήνα
(Από τα "Κριτήρια Αξιολόγησης Β΄ Λυκείου", εκδ. ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ)

✶**Β72.** Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{|x-1|+1}-\sqrt{|x+1|-4}=1$.

Κοραΐδου Ελένη, Μαθηματικός, Βέροια

✶**Β73.** Έστω επτά αριθμοί: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_7 \in [-1, 1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο από αυτούς, έστω x, y, τέτοιοι ώστε:

$$x\cdot y+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**Β74. α)** Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο 2ου βαθμού, το οποίο:

- διαιρούμενο δια $x-1$ δίνει υπόλοιπο 1,
- διαιρούμενο δια $x-2$ δίνει υπόλοιπο 2,
- διαιρούμενο δια $x-3$ δίνει υπόλοιπο 3.

β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειρα πολυώνυμα 3ου βαθμού με τις παραπάνω ιδιότητες.
Αν P(x) και Q(x) είναι δύο τέτοια πολυώνυμα, αποδείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)\cdot Q(x)$ δια $(x-1)(x-2)(x-3)$ είναι το x^2.

Ιωσηφίδης Γιώργος, Μαθηματικός, Βέροια

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β75. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α) οι αριθμοί:

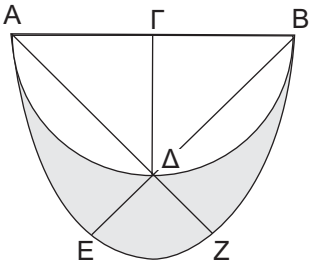
$$x=\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma},\ y=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2+\alpha\beta},\ \omega=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}$$

είναι μέτρα πλευρών τριγώνου.

β) οι αριθμοί $x=\sqrt{\beta^2+\gamma^2},\ y=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2},\ \omega=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ είναι μέτρα πλευρών οξυγωνίου τριγώνου.

Κουρουμλίδου Χριστίνα, Μαθήτρια Β΄ Λυκείου, Βέροια

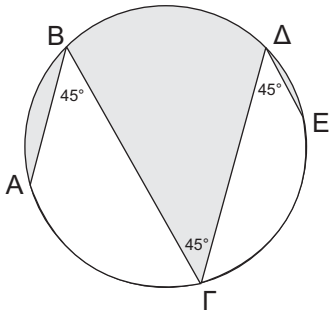
Β76. Θεωρούμε ημικύκλιο με κέντρο Γ και διάμετρο ΑΒ και έστω ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τόξο $\overset{\frown}{AE}=45^\circ$ και με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τόξο $\overset{\frown}{BZ}=45^\circ$. Με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΕ = ΔΖ γράφουμε το τόξο $\overset{\frown}{EZ}$.



Αν η ακτίνα του ημικυκλίου είναι ρ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;", ασκ. 114

Β77. Θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή του διπλανού σχήματος, της οποίας όλες οι κορυφές βρίσκονται πάνω σε κύκλο και οι γωνίες: $\widehat{AB\Gamma}, \widehat{B\Gamma\Delta}$ και $\widehat{\Gamma\Delta E}$ είναι ίσες με 45°. Να αποδείξετε ότι η πολυγωνική αυτή γραμμή χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο ισοδύναμα χωρία.

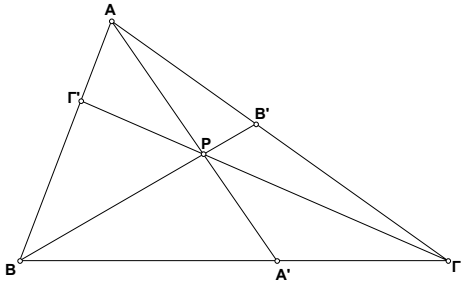


Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;", ασκ. 138

Β78. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τετράγωνο ΒΓΔΕ, εξωτερικά του τριγώνου. Έστω Μ το μέσο του ΔΕ. Αν $AE = 5\sqrt{58}$, $A\Delta = 5\sqrt{65}$, $AM = \frac{5\sqrt{221}}{2}$, αποδείξτε ότι $\widehat{BA\Gamma} = 90°$.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

Β79. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Β΄ και Γ΄ στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε: $\frac{A\Gamma'}{\Gamma'B} = \frac{1}{2}$ και $\frac{AB'}{B'\Gamma} = \frac{3}{4}$.
Να δειχθεί ότι: $\frac{AP}{PA'} = \frac{5}{4}$



New York State Math League, 1975, Θέμα 12(*)
Για την επιλογή: ***Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια***

Β80. Δίνεται τετράγωνο πλευράς α, κέντρου Ο, και ένα σημείο Μ πάνω στην ΟΔ. Η ευθεία ΑΜ τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Ν και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο Ρ.

(*) **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** *Τα 4 γεωμετρικά θέματα (**Β79, ✶Β86, ✶Β87, ✶Β88),** που επέλεξε ο Γιάννης Απλακίδης, μπορούν να λυθούν και σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράφει ο Λεωνίδας Θαρραλίδης στο άρθρο του, στον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ 2, σελ. 73-81.*

α) Να αποδείξτε ότι η ΜΑ είναι μέση ανάλογος της ΜΝ και ΜΡ.

β) Έστω Ι το μέσο της ΝΡ. Να αποδείξτε ότι ο κύκλος που έχει κέντρο Ι και ακτίνα ΙΓ εφάπτεται στην ΜΓ στο Γ.

γ) Υποθέτουμε ότι $\frac{ΜΔ}{ΜΒ}=\frac{1}{3}$. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα μήκη των ΓΝ, ΓΡ,

Σαμαρά Ζωή, Μαθηματικός, Νάουσα

✶**Β81.** Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με β > γ και ΑΔ το ύψος του, ΑΕ η διχοτόμος του και ΑΜ η διάμεσός του. Ας είναι R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΒΕ και ΑΒΜ αντίστοιχα. Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε οι R_1, R_2, R_3 να αποτελούν μήκη πλευρών τριγώνου.

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**Β82.** Σε κάθε τρίγωνο να δειχθεί ότι:

$$R^2 \geq \frac{1}{4\alpha^2}\left(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right),$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**Β83.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ, Ε σημεία της υποτείνουσας, τα οποία την τριχοτομούν.

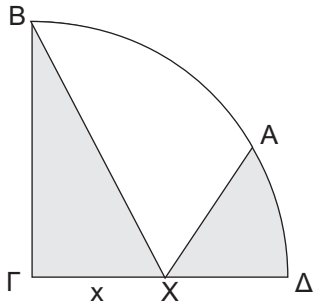
α) Αποδείξτε ότι: $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = 5ΔΕ^2$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 + ΔΕ^2$ ως συνάρτηση της πλευράς α.

γ) Να αποδείξτε ότι ο αριθμός $\frac{ΑΔ}{ΑΕ}$ περιέχεται στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

Αντωνόπουλος Νίκος, Μαθηματικός, Ίλιον, Αθήνα

✶**Β84.** Δίνεται τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{ΓΒΔ}$ ακτίνας 1, σημείο Α του τόξου $\overset{\frown}{ΒΔ}$, ώστε $\overset{\frown}{ΒΓΑ}=60°$ και σημείο Χ της ΓΔ τέτοιο, ώστε ΓΧ = x. Αν το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος είναι το μισό του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου, να υπολογίσετε την τιμή του x.



Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια

Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;", ασκ. 10

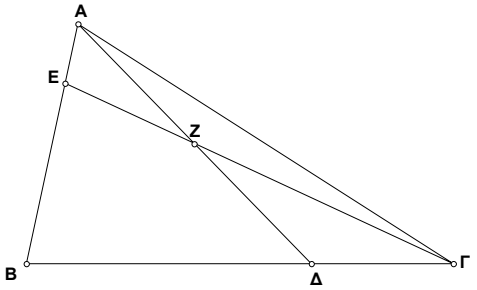
✶**B85.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $\sqrt{61}$ και σημείο Ο, τέτοιο ώστε ΟΑ = 9, ΟΒ = 5.

α) Αποδείξτε ότι $\widehat{AOB} = 60°$

β) Υπολογίστε το ΟΓ.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

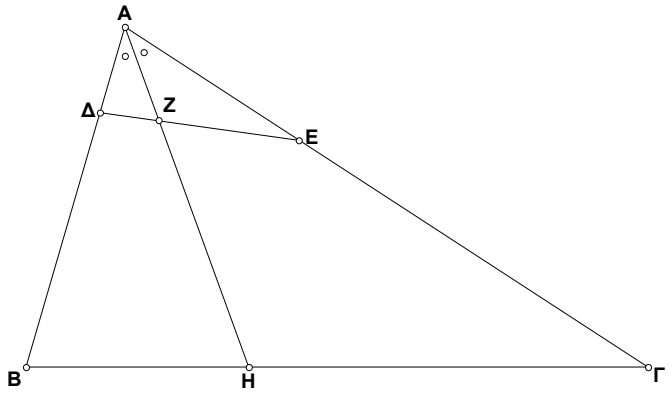
✶**B86.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ε σημείο στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} = \frac{1}{2}$. Τα τμήματα ΑΔ και ΓΕ τέμνονται στο Ζ.



Να δειχθεί ότι: $\frac{EZ}{Z\Gamma} + \frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{3}{2}$.

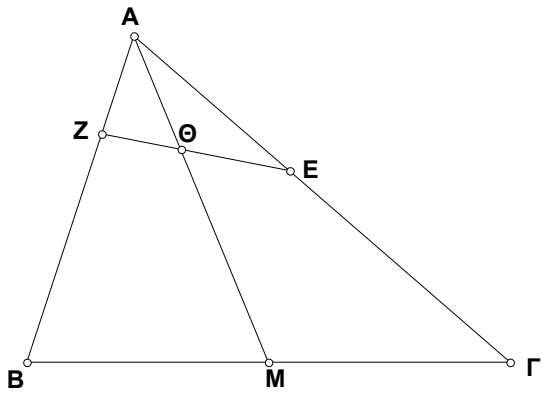
Annual High School Mathematics Examinations, 1965, Θέμα 37
Για την επιλογή: ***Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια***

✶**B87.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με:
ΑΔ = 1, ΑΕ = 2,
ΒΔ = 3 και
ΕΓ = 4. Αν η διχοτόμος της Α τέμνει τη ΔΕ στο Ζ και τη ΒΓ στο Η, να δειχθεί ότι: $\frac{AZ}{AH} = \frac{5}{18}$.



American Regions Mathematics League, 1992, Θέμα 8
Για την επιλογή: ***Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια***

✶**B88.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 12, ΑΓ = 16 και Μ το μέσο της ΒΓ. Στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ θεωρώ τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα με ΑΕ = 2ΑΖ. Αν τα τμήματα ΑΜ και ΕΖ τέμνονται στο Θ, να δειχθεί ότι: $\frac{ΕΘ}{ΘΖ}=\frac{3}{2}$.



Annual High School Mathematics Examinations, 1975, Θέμα 28
Για την επιλογή: ***Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια***

✶**B89.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΑ΄, ΓΑΒ΄ και ΑΒΓ΄ έξω από το τρίγωνο. Φέρνουμε από τις κορυφές Α, Β, Γ τις $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ κάθετες αντίστοιχα προς τις Β΄Γ΄, Γ΄Α΄ και Α΄Β΄. Να αποδείξετε ότι οι $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Χρυσοστομίδης Θεόφιλος, Μαθηματικός, Βέροια

✶**B90.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία $Δ\in ΒΓ$, $Ε\in ΓΑ$, $Ζ\in ΑΒ$, ώστε οι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ να διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ. Να αποδειχθεί ότι αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $\frac{ΑΚ}{ΚΔ}\cdot\frac{ΒΚ}{ΚΕ}\cdot\frac{ΓΚ}{ΚΖ}=8$ **(ii)** $\frac{ΑΚ}{ΚΔ}+\frac{ΒΚ}{ΚΕ}+\frac{ΓΚ}{ΚΖ}=6$

τότε, το Κ είναι το κέντρο βάρους του ΑΒΓ.

Ιωσηφίδης Γιώργος, Μαθηματικός, Βέροια

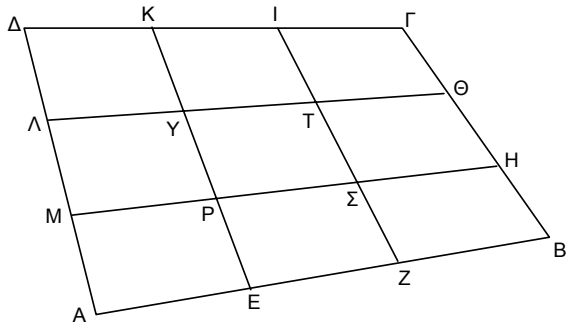
✶**B91.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Έστω Η το μέσο της πλευράς ΒΓ. Η ΑΗ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Θ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΒΘΓ ως συνάρτηση του R.

Ιωσηφίδης Γιώργος, Μαθηματικός, Βέροια

✶**B92.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στρέφουμε το τρίγωνο γύρω από το Α κατά 45° και έστω ΑΒ΄Γ΄ η νέα θέση του. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο τριγώνων ΑΒΓ και ΑΒ΄Γ΄ ως συνάρτηση της πλευράς α.

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

✶**Β93.** Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ διαιρούμε τις πλευρές σε τρία ίσα μέρη και ενώνουμε τα αντίστοιχα σημεία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδειχθεί ότι:



α) ΜΡ = ΡΣ = ΣΗ

β) εμβ.(ΡΣΤΥ) = $\frac{1}{9}$ εμβ.(ΑΒΓΔ)

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

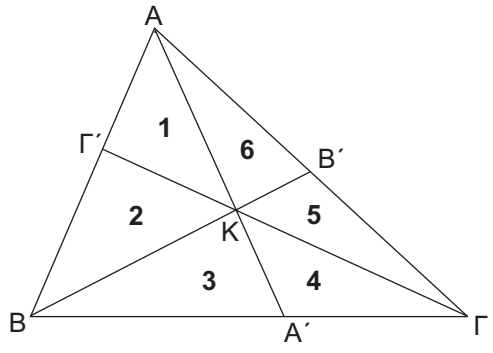
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: *Η λύση της άσκησης αυτής καλύπτεται από την αντίστοιχη θεωρία ΠΛΕΓΜΑΤΑ, που δημοσιεύεται σ' αυτό το τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ. Εδώ, όμως ζητούμε μία κλασική απόδειξη.*

✶**Β94.** Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Σχηματίζουμε εξωτερικά του τετραπλεύρου τα τετράγωνα ΑΒΚΙ, ΒΓΜΛ, ΓΔΞΝ και ΔΑΘΗ. Να αποδειχθεί ότι:

(ΑΛΜ) + (ΑΝΞ) + (ΓΙΚ) + (ΓΘΗ) = (ΒΗΘ) + (ΒΝΞ) + (ΔΙΚ) + (ΔΜΛ).

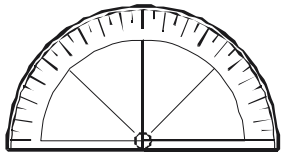
Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

✶**Β95.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Κ, μέσα στο τρίγωνο. Οι ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα Α΄, Β΄, Γ΄ αντίστοιχα. Δημιουργούνται έτσι έξι τρίγωνα, όπως στο σχήμα.



Αν O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 είναι τα περίκεντρα των αντίστοιχων τριγώνων, να αποδειχθεί ότι:
εμβ. $(O_1O_3O_5)$ = εμβ.$(O_2O_4O_6)$.

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια



ΜΑΘ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β96. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$, με $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\gamma}| = 2$ και έστω το διάνυσμα:

$\vec{\beta} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma}$. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right) + \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 180°$, υπολογίστε:

α) τις γωνίες: $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right) = \theta$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \varphi$

β) το μέτρο $|\vec{\beta}|$

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

Β97. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και λ_2 αντίστοιχα.

α) Υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον x΄x.

β) Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60°$ και το $\vec{\alpha}$ έχει αρνητική τετμημένη, βρείτε:

i) τον αριθμό λ_2

ii) το λόγο $\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, έτσι ώστε $\left(\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right) \perp \vec{\alpha}$.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

✶**Β98.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0, 0), Β(36, 15) και Γ(κ, λ), με κ, λ∈ℤ. Να βρείτε το ελάχιστο m του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ και να προσδιορίσετε τρίγωνο ΑΒΓ, με (ΑΒΓ) = m.

Αντωνόπουλος Νίκος, Μαθηματικός, Ίλιον, Αθήνα

✶**Β99.** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, μ για τους οποίους να ισχύουν συγχρόνως:

$$\kappa\lambda\mu - \mu = \underbrace{111\ldots1}_{2002\ \psi\eta\phi\acute{\iota}\alpha}, \quad \kappa\lambda\mu - \kappa = \underbrace{111\ldots1}_{2003\ \psi\eta\phi\acute{\iota}\alpha}, \quad \kappa\lambda\mu - \lambda = \underbrace{111\ldots1}_{2004\ \psi\eta\phi\acute{\iota}\alpha}$$

Αντωνόπουλος Νίκος, Μαθηματικός, Ίλιον, Αθήνα
(Από τα "Κριτήρια Αξιολόγησης Β΄ Λυκείου, Θετική Κατεύθυνση", εκδ. ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ)

✶**Β100.** Δίνεται η ευθεία (ε): 3x – y = 1 και το σημείο Α(4, 1). Το σημείο Μ κινείται στην ευθεία (ε).

α) Βρείτε την απόσταση του Μ από το Α, ως συνάρτηση της τετμημένης x του Μ.

β) Προσδιορίστε το x, ώστε η απόσταση ΑΜ να είναι ελάχιστη.

γ) Με τη βοήθεια των παραπάνω, βρείτε την απόσταση του Α από την ευθεία (ε).

δ) Με τη βοήθεια των βημάτων α, β, γ, αποδείξτε ότι η απόσταση του σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε): $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο: $d = \dfrac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

Παπαδόπουλος Μανώλης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας

✶**Β101.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\theta = \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60^\circ$.

Έστω $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Υπολογίστε τα μέτρα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και το είδος της γωνίας τους.

β) Έστω $\vec{r} = \kappa \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, με $\kappa \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε την τιμή του κ, έτσι ώστε:

i) $\vec{r} \perp \vec{u}$ **ii)** $\text{συν}\left(\widehat{\vec{u}, \vec{r}}\right) = -\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

✶**Β102.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α και τα σημεία Ε και Θ των πλευρών του ΒΓ και ΓΔ, τέτοια ώστε: ΒΕ = ΔΘ = α.
Αν Η το μέσο της πλευράς ΓΔ, να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΕΗΘ είναι εγγράψιμο.

Ιωσηφίδης Γιώργος, Μαθηματικός, Βέροια

Γ΄ Λυκείου

ΜΑΘ. ΓΕΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda^2 x^2 - \lambda x^3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να οριστεί η τιμή του λ ώστε η f να έχει τοπικό μέγιστο για x = 1.

Σαμαρά Ζωή, Μαθηματικός, Νάουσα

Γ58. Ένα ζάρι είναι κατασκευασμένο έτσι, ώστε η πιθανότητα εμφάνισης της έδρας x είναι ανάλογη του x. Να βρεθεί η πιθανότητα κατά τη ρίψη του ζαριού να φέρουμε άρτιο αριθμό.

Παπαδοπούλου Κάλλια, Μαθήτρια Γ΄ Λυκείου, Βέροια

Γ59. Έστω η υπερβολή (C): $y = \frac{6}{x}$ και ο δειγματικός χώρος Ω = {(x, y)∈C: x, y∈ℤ}, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
A = {(x, y)∈Ω: η εφαπτομένη της C στο (x, y) είναι παράλληλη προς την ευθεία 3x + 2y – 1 = 0}.
B = {(x, y)∈Ω: το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C στο (x, y) και τους δύο άξονες είναι ίσο με 12}.
Γ = {(x, y)∈Ω: η εφαπτομένη στο (x, y) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°}.
Να βρεθούν οι πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ).

Σισμανίδου Ειρήνη, Μαθήτρια Γ΄ Λυκείου, Βέροια

Γ60. Η μεταβλητή X παίρνει μόνο δύο διαφορετικές τιμές x_1 και x_2 με συχνότητες v_1 και v_2 αντίστοιχα. Αν οι συχνότητες αλλάξουν μεταξύ τους, η μέση τιμή $\bar{x}$ της X δεν αλλάζει. Αποδείξτε ότι $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

∗**Γ61.** Έστω $\bar{x}$ η μέση τιμή της μεταβλητής του διπλανού πίνακα.

α) Αποδείξτε ότι ισχύει: $3,7 < \bar{x} < 5,3$

β) Αν $\bar{x} = 5$, να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x_i	f_i%
2	10
3	10
4	
6	

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά
Από το βιβλίο του ιδίου: "Μαθηματικά 2ου Κύκλου ΤΕΕ",
εκδ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ, Χ. Βαφειάδη

∗**Γ62.** Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος, A, B δύο ενδεχόμενά του και A΄ το συμπληρωματικό του A.
Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών, δίνεται ότι:

$$(P(A))^2 + (P(A'))^2 = P(B)$$ και $P(B) = 2x - x^2 - \frac{1}{2}$, όπου x∈ℝ.

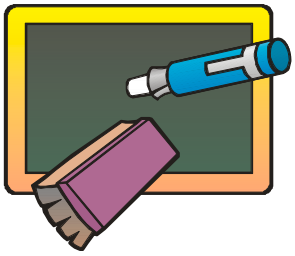
Να βρεθούν οι πιθανότητες P(A), P(B) και ο x.

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

∗**Γ63.** Οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_v$ μιας μεταβλητής X έχουν συχνότητες $x_1, x_2, ..., x_v$ αντίστοιχα, χωρίς, όμως, να γνωρίζουμε ποια είναι η αντιστοιχία των

τιμών με τις συχνότητες. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη μέση τιμή της X συμβαίνει όταν αντιστοιχίσουμε σε κάθε τιμή της X συχνότητα ίση με την τιμή της, δηλαδή όταν η τιμή x_i έχει συχνότητα x_i για κάθε $i\in\{1, 2, ..., v\}$.

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια



ΜΑΘ. ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1 - \mu(x - 1)$. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η C_f εφάπτεται με τον άξονα x΄x.

Σαμαρά Ζωή, Μαθηματικός, Νάουσα

Γ65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\mu x^2+x+4}{x}$. Να βρεθεί η τιμή του μ για την οποία η f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x + 1$.

Σαμαρά Ζωή, Μαθηματικός, Νάουσα

Γ66. α) Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων του $z\in\mathbb{C}$ που ικανοποιεί τη σχέση $|z^2 + 4| = |z - 2i|$.

β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=|z-1-2i|$

Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια

Γ67. Δίνεται ο μιγαδικός $w=\dfrac{z-1}{z-2i}$, $z\in\mathbb{C}$ και $z\neq 2i$.

α) Αν $w\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι οι εικόνες M(w) του w βρίσκονται στην ευθεία (ε): $y = -2x + 2$, εκτός του σημείου A(0, 2).

β) Αν $w\in\mathbb{I}$, οι εικόνες M(w) ανήκουν σε κύκλο.

Αναστασίου Κωνσταντίνος, Μαθητής Γ΄ Λυκείου, Bielefeld, Γερμανία

∗**Γ68.** Να βρεθεί η f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$x\cdot e^x f'(x) + f(x)(x\cdot e^x - e^x) = 1, \qquad \text{με } f(1) = \frac{1}{e}.$$

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

∗**Γ69.** Για τη συνεχή συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x-1)\int_0^x f(t)\,dt + x = x\cdot f(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση $g(x) = x\int_0^x f(t)\,dt + x + 1$, $x\in\mathbb{R}$, ισχύει: $g'(x) = g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

∗**Γ70.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\sum_{i=0}^{v-1}(\alpha+i)^x = (\alpha+v)^x$, $\alpha\in(0, +\infty)$, $v\in\mathbb{N}$, έχει μία και μοναδική λύση.

Κωστάκος Γρηγόριος, Μαθηματικός, Αθήνα

∗**Γ71.** Θεωρούμε συνάρτηση f:[α, β] $\to \mathbb{R}$, αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη με την f' συνεχή, και τους μιγαδικούς:

$$z = \alpha + \beta i \text{ και } w = f(\alpha) + f(\beta)i,$$

για τους οποίους ισχύει ότι: $z\cdot w\in\mathbb{I}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha\cdot f(\alpha) = \beta\cdot f(\beta)$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx$.

Γραμμένος Μίλτος, Μαθηματικός, Κέρκυρα

∗**Γ72.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, α], (α > 1), παραγωγίσιμη στο (0, α) και είναι $f(1) = f(\alpha)$. Αν είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x\in[0, \alpha]$, να δειχθεί ότι υπάρχουν $x_1, x_2\in(0, \alpha)$, τέτοιοι ώστε:

$$f'(x_1)\cdot f(x_2) = \alpha f(x_1) f'(x_2).$$

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

∗**Γ73.** Για τη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f'(x) = \dfrac{e^x}{x^2+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

β) Να συγκριθούν οι αριθμοί: $A = f(2) + f(3)$, $B = f(1) + f(4)$.

γ) Αν είναι $f(0) = 1$, να δειχθεί ότι $f(x) \geq \dfrac{1}{2}x + 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

∗**Γ74.** Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f: (0, +∞)→ℝ, για την οποία ισχύει $f(x) > 0$, για κάθε $x\in(0, +\infty)$ και η συνάρτηση $g(x) = x\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞).

Να δειχθεί ότι: $f(x)\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq\left[f(1)\right]^2$, για κάθε x > 0.

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

∗**Γ75.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^1\left(\int_1^x\dfrac{e^t-1}{t}dt\right)dx$.

Κωστάκος Γρηγόριος, Μαθηματικός, Αθήνα

∗**Γ76.** Να βρεθεί η f: $\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$x\cdot f'(x) - (x^2 + 2)\cdot f(x) + x^2 + 2 = 0,$$

με $f(x) > 1$ και $f(2) = 5$.

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

∗**Γ77.** Έστω ο μιγαδικός z.

α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A = z^2 - 5zi - 4$

β) Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων του $z\in\mathbb{C}$ όταν ισχύει:

$$|z^2 - zi| + |z - 4i| = |z| + |z^2 - 5zi - 4|$$

γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $B = |2z - 6 - 2i|$

Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια

∗**Γ78.** Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w

α) Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των z και w όταν ικανοποιούν τις σχέσεις $|z + 2 - i| - 1 = 0$ και $|w - 1 - i| = 1$ αντίστοιχα.

β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$

γ) Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της παράστασης

$$A = |z + 1 - i| + |w + 1 - i|$$

δ) Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $B = |z| + |w|$

Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια

∗**Γ79.** Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g:[0, +∞)→ℝ. Αν ισχύουν:

$f(x) = 2e\int_0^x t\,e^{t^2-f(t)}dt + 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ και $g(1) = \dfrac{\pi}{4}$, τότε:

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να αποδείξετε ότι $g\left(\frac{1}{f(x)}\right)+f(x)\geq\frac{\pi}{4}+1$

γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της g′, στο οποίο η κλίση της είναι ελάχιστη.

Αντωνόπουλος Νίκος, Μαθηματικός, Ίλιον, Αθήνα
(Από τα "Κριτήρια Αξιολόγησης Γ΄ Λυκείου, Θετική Κατεύθυνση", εκδ. ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ)

∗**Γ80.** Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)\,dt-\int_{x+1}^{x+2}f(t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_x^{x+1}f(t)\,dt+\int_{x+2}^{x+3}f(t)\,dt>2\int_{x+1}^{x+2}f(t)\,dt$$

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

∗**Γ81.** Για τη συνεχή συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)+f(x+1)+f(x+2)=6x+6,\text{ για κάθε }x\in\mathbb{R}.$$

Να δειχθεί ότι:

α) $f(x+3)=f(x)+6$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) η συνάρτηση $g(x)=\int_x^{x+3}f(t)\,dt-6x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ) $\int_0^1 f(x+\kappa)\,dx=\int_\kappa^{\kappa+1}f(x)\,dx$, $(\kappa\in\mathbb{R})$.

δ) $\int_0^3 f(x)\,dx=9$

ε) $\int_x^{x+3}f(t)\,dt=6x+9$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

στ) $\int_0^{2004}f(t)\,dt=2004^2$

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

∗**Γ82.** Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β]. Αν η παράγωγος συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο [α, β], να αποδειχθεί ότι για κάθε x, y∈[α, β], με x < y, και για κάθε λ∈(0, 1), ισχύει:

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)<\lambda\cdot f(x)+(1-\lambda)\cdot f(y).$$

Κωστάκος Γρηγόριος, Μαθηματικός, Αθήνα

∗**Γ83.** Έστω η συνάρτηση f: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, με $f''(x) = 2f(x)\cdot f'(x)$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και

$$f'(0) = 1 + f(0) = 1.$$

α) Εξετάστε την f ως προς τη μονοτονία και και λύστε την εξίσωση:

$$f(x) = 0.$$

β) Αποδείξτε ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

γ) Αποδείξτε ότι: $\int_0^1 f^2(t)\,dt = f(1) - 1$

Τσιτούρης Αλέξανδρος, Μαθηματικός, Ν. Σμύρνη, Αθήνα

∗**Γ84.** Δίνονται οι μιγαδικοί α, β, γ, z με ίσα μέτρα και α + β + γ = z.
Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι ίσος με το z.

Στεργίου Μπάμπης, Μαθηματικός, Χαλκίδα

Παροράματα 2ου τεύχους ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

Έχουμε εντοπίσει τα παρακάτω παροράματα στο 2ο τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ. Ζητώντας συγγνώμη από τους αναγνώστες, τα επισημαίνουμε, ώστε να γίνουν οι απαραίτητες διορθώσεις.

Σελ. 28, στη 2η σειρά της Πρότασης, αντί: **ΓΟΒ** να γραφεί: **ΓΟΑ**

Σελ. 40, αντί $\mathbf{x = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{2}}, & \text{αν } y \geq -1 \\ -\sqrt[3]{\dfrac{y+1}{2}}, & \text{αν } y < -1 \end{cases}}$, να γραφεί: $\mathbf{x = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{2}}, & \text{αν } y \geq -1 \\ -\sqrt[3]{-\dfrac{y+1}{2}}, & \text{αν } y < -1 \end{cases}}$

Σελ. 40,

αντί $\mathbf{f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}, & \text{αν } x \geq -1 \\ -\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}, & \text{αν } x < -1 \end{cases}}$, να γραφεί: $\mathbf{f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}, & \text{αν } x \geq -1 \\ -\sqrt[3]{-\dfrac{x+1}{2}}, & \text{αν } x < -1 \end{cases}}$

Σελ. 96, 3η σειρά:

αντί: $\mathbf{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}$, να γραφεί: $\mathbf{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0}$

Σελ. 105, προτελευταία σειρά: αντί: $\mathbf{\sigma_{3v} \geq 3P^{2v}}$, να γραφεί: $\mathbf{\sigma_{3v} \geq 3P^{v}}$

Σελ. 118, 4η σειρά:

αντί: $\mathbf{\widehat{ΔΙΓ} = \widehat{ΑΖΓ} = \widehat{ΔΚΒ} = ω}$, να γραφεί: $\mathbf{\widehat{ΙΔΓ} = \widehat{ΖΑΓ} = \widehat{ΚΔΒ} = ω}$