έκκεντρον

Μαθηματικό Ηλεκτρονικό Περιοδικό

Τεύχος 2ο – 1η Αυγούστου 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Επίλυση ανισώσεων με αξιοποίηση «εργαλείων» της ανάλυσης. Μέθοδοι - λυμένα παραδείγματα. σελ 01-44

2. Οι ανισώσεις στις Πανελλαδικές εξετάσεις σελ 45-46

3. Ευπαλίνειο Όρυγμα. Ένα θαύμα της μηχανικής σελ 47-58

1 Επίλυση ανισώσεων με αξιοποίηση «εργαλείων» της ανάλυσης. Μέθοδοι - λυμένα παραδείγματα.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται μέσα από ένα πλήθος λυμένων παραδειγμάτων οι βασικές τεχνικές για την επίλυση ανισώσεων με χρήση εργαλείων της ανάλυσης στο πλαίσιο των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ Γενικού Λυκείου. Είναι αυτονόητο ότι δεν μπορούν να περιγραφούν ή να κατηγοριοποιηθούν όλες οι μορφές, γίνεται όμως μια προσπάθεια για την παρουσίαση των ποιο βασικών από αυτές.

Η αξιοποίηση των ιδιοτήτων της άλγεβρας, οι προϋπάρχουσες γνώσεις επίλυσης ανισώσεων, οι αρχές της μαθηματικής λογικής, σε συνδυασμό με βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων μας δίνουν ιδιαίτερα ευέλικτες διαδικασίες και τεχνικές.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας γίνεται μια προσπάθεια κατηγοριοποίησης των ανισώσεων με βάση τη μορφή τους και περιγραφή ενός τρόπου ή μιας ιδέας για την αντιμετώπισή τους.

Κατά προτεραιότητα:

Ελέγχουμε για τη λύση της ανίσωσης με γνώσεις που αποκτήθηκαν σε προηγούμενες τάξεις για την επίλυση ανισώσεων πολυωνυμικών, Ρητών Άρρητων , Εκθετικών, Λογαριθμικών κλπ

Στη συνέχεια με χρήση «βοηθητικών» συναρτήσεων –που είτε δίδονται είτε τις «ανακαλύπτουμε»- και αξιοποίηση ιδιοτήτων όπως η μονοτονία, τα κοίλα τα ακρότατα, τα θεωρήματα ύπαρξης Bolzano, Rolle, Μέσης τιμής, το θεώρημα Fermat, κλπ., τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, αλλά και τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής οδηγούμαστε στη ζητούμενη λύση.

--*-*-*-*-*-*

Στις σελίδες του περιοδικού «έκκεντρον» δημοσιεύονται ολοκληρωμένες θεματικές εργασίες με περιεχόμενο από τα μαθηματικά στο πλαίσιο της σχολικής ύλης και με έμφαση στην ύλη του Γενικού Λυκείου ή από την ιστορία των επιστημών.

Ερωτήματα, προτάσεις, παρατηρήσεις, ή εργασίες για δημοσίευση γραμμένες σε word, μπορούν να αποστέλλονται στο mail επικοινωνίας

papagrigorakism@gmail.com

Επιμέλεια έκδοσης: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

Μαθηματικός M.Ed.

Χανιά

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΓΕΛ
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ
ΕΚΔΟΣΗ 1η 01/08/2017

1) Επίλυση με αλγεβρικές μεθόδους. Αξιοποιούμε όλες τις μεθόδους επίλυσης ανισώσεων, πολυωνυμικών, ρητών, άρρητων, τριγωνομετρικών, εκθετικών , λογαριθμικών κλπ

2) Μορφή: $F\left(f(x)\right) < F(g(x)) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(x\right) < g\left(x\right)$

Μετά από κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και εφόσον τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουν «την ίδια μορφή» θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση F που είναι γνήσια μονότονη , εκφράζουμε τα δύο μέλη αξιοποιώντας την F και στη συνέχεια λύνουμε την ισοδύναμη ανίσωση $f\left(x\right) < g\left(x\right)$ εφόσον η F είναι γνήσια αύξουσα

3) Μορφή: $F\left(x\right) < F(\alpha) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x < \alpha$

Έχουμε μεταφέρει όλους τους όρους στο πρώτο μέλος , θεωρούμε συνάρτηση F , στη συνέχεια αξιοποιούμε τη μονοτονία της F :

4) Μορφή: $F\left(k(x)\right) + F\left(m(x)\right) < F\left(p(x)\right) + F\left(q(x)\right)$

Όπου F γνήσια μονότονη συνάρτηση: Εντοπίζουμε Ρίζα(ες) και διακρίνουμε περιπτώσεις για το x και συγκρίνοντας μεταξύ τους τις παραστάσεις $k(x),\ m(x)$ με τις $p(x),\ q(x)$.

5) Μορφή: $F\left(k(x)\right) + F\left(m(x)\right) = 2F\left(\alpha\right)$

Όπου το α μπορεί να είναι:

- θέση μοναδικού ακροτάτου. Τότε $k\left(x\right) = \alpha$ και $m\left(x\right) = \alpha$ κλπ
- Το α είναι το μοναδικό κοινό σημείο επαφής εφαπτομένης σε κοίλη ή κυρτή συνάρτησης (αναγνωρίζεται καλύτερα από τη μορφή $F\left(x\right) = \left(x-\alpha\right)F'\left(\alpha\right) + F\left(\alpha\right)$)
- Το α είναι η μοναδική θέση ισότητας σε γνωστή ανισότητα (π.χ. $\ln t \le t-1$, $t > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t = 1$, $\left|\eta\mu x\right| \le \left|x\right|$, $x \in R$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$)

6) Μορφή: $f\left(x\right) < f^{-1}\left(x\right)$ με f γνήσια αύξουσα

Μια σκέψη να εργαστούμε είναι η παρακάτω:

$$f\left(x\right) < f^{-1}\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) < x \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) + f(x) < f\left(x\right) + x \Leftrightarrow F\left(f(x)\right) < F\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(x\right) < x$$

Μορφή: $f^{-1}\left(x\right) < \alpha \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x < f\left(\alpha\right)$ κλπ

7) Στην περίπτωση που έχουμε εξίσωση με ολοκληρώματα $\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f\left(t\right)dt < 0$, θεωρούμε ότι F είναι μια αρχική της f τότε $\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f\left(t\right)dt < 0 \Leftrightarrow F\left(g(x)\right) - F\left(\varphi(x)\right) < 0$ και ακολουθούμε τα προηγούμενα βήματα

8) Δίνεται ανισότητα και ζητείται να λυθεί ανίσωση. Εφόσον περιέχεται παράγωγος στην ανισότητα, τη μετασχηματίζουμε σε μονοτονία, εφαρμόζουμε τον ορισμό της μονοτονίας …κλπ

Μίλτος Παπαγρηγοράκης/ Αύγουστος 2017 - Χανιά

1

Επίλυση με αλγεβρικές μεθόδους .

Αξιοποιούμε τις ιδιότητες της άλγεβρας καθώς και γνώσεις μας σχετικά με την επίλυση πολυωνυμικών, ρητών, άρρητων, τριγωνομετρικών, εκθετικών , λογαριθμικών κλπ ανισώσεων

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4+x^2+x-2,\ x\in R$. Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{f\left(x^{\sqrt{x}}\right)+2}{x^{\sqrt{x}}}\le\dfrac{f(x)+2}{x}$ στο $(0,+\infty)$

Λύση

Ισοδύναμα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε ότι:

$$\frac{f\left(x^{\sqrt{x}}\right)+2}{x^{\sqrt{x}}}\le\frac{f(x)+2}{x}\Leftrightarrow\frac{x^{4\sqrt{x}}+x^{2\sqrt{x}}+x^{\sqrt{x}}}{x^{\sqrt{x}}}\le\frac{x^4+x^2+x}{x}\Leftrightarrow$$

$$\left(x^{\sqrt{x}}\right)^3+x^{\sqrt{x}}\le x^3+x\Leftrightarrow\left(x^{\sqrt{x}}-x\right)\left(\left(x^{\sqrt{x}}\right)^2+x^{\sqrt{x}}\,x+x^2+1\right)\le 0\ (2)$$

Επειδή για κάθε $x>0$ είναι $\left(x^{\sqrt{x}}\right)^2+x^{\sqrt{x}}\,x+x^2+1>0$ από την (2) έχουμε ότι

$$x^{\sqrt{x}}-x\le 0\Leftrightarrow x^{\sqrt{x}}\le x\Leftrightarrow\ln x^{\sqrt{x}}\le\ln x\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x-\ln x\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\ln x\le 0\ (3)$$

Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$0<x<1\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}<1\\ \ln x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-1<0\\ \ln x-1<0\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\ln x>0$$

$$x>1\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}>1\\ \ln x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-1>0\\ \ln x-1>0\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\ln x>0$$

Αν $x=1$ τότε στη (3) ισχύει η ισότητα

Επομένως μοναδική λύση της ανίσωσης είναι η $x=0$

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Αν $f(x)=\ln\left(\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right),\ x\in R$ τότε να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(\dfrac{e^{f(x)}+1}{e^{f(x)}}\right)<f(x)$

Λύση

Για κάθε $x\in R$ έχουμε ότι

$$\ln\left(\frac{2e^{f(x)}}{e^{f(x)}+1}\right)<f(x)\Leftrightarrow\frac{2e^{f(x)}}{e^{f(x)}+1}<e^{f(x)}\Leftrightarrow 2e^{f(x)}<e^{2f(x)}+e^{f(x)}\Leftrightarrow e^{f(x)}>1\Leftrightarrow$$

$$f(x)>0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right)>0\Leftrightarrow\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}>1\Leftrightarrow 2e^{x}>e^{x}+1\Leftrightarrow$$

$$e^{x}>1\Leftrightarrow x>0$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\ln x,\ x>0$.

Να λύσετε την ανίσωση $f(3x)+f(4x)<f(6x)+f(2)$

Λύση

Για κάθε $x>0$, ισοδύναμα παίρνουμε ότι:

$$f(3x)+f(4x)<f(6x)+f(2)\Leftrightarrow\ln(3x)+\ln(4x)<\ln(6x)+\ln 2\Leftrightarrow$$

$$\ln(12x^2)<\ln(12x)\Leftrightarrow 12x^2<12x\Leftrightarrow x(x-1)<0\Leftrightarrow x\in(0,1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.

Να λυθεί η ανίσωση $\varepsilon\varphi x>1$ όταν $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x-1$ είναι συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Οι ρίζες της εξίσωσης: $f(x)=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x-1=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

Ο πίνακας προσήμων της f είναι ο παρακάτω:

$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ π

Διάστημα	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
Αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f(x_0)$	-1	$\sqrt{3}-1$	-1
Πρόσημο της f	$-$	$+$	$-$

Επομένως λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι οι αριθμοί $x\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 5.

Να λυθεί η ανίσωση $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\ln x}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{\ln x}<2\sqrt{2}$ στο $\left(0,+\infty\right)$.

Λύση

Έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\ln x}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{\ln x}<2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{\ln x}+\left(\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1}\right)^{\ln x}<2\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\ln x}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{\ln x}<2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{2\ln x}-2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^{\ln x}+1<0$$

Η ανίσωση $\omega^2-2\sqrt{2}\omega+1<0$ έχει λύσεις τις $\frac{1}{\sqrt{2}+1}<\omega<\sqrt{2}+1$ οπότε θα είναι:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}<\left(\sqrt{2}+1\right)^{\ln x}<\left(\sqrt{2}+1\right)^{1}\Leftrightarrow-1<\ln x<1\Leftrightarrow\ln\frac{1}{e}<\ln x<\ln e\Leftrightarrow\frac{1}{e}<x<e$$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x\in\left(\frac{1}{e},e\right)$

έκκεντρον

2

ΣΥΝΘΕΣΗ

Μορφή: $F(f(x)) < F(g(x)) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < g(x)$

Μετά από κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και εφόσον τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουν «την ίδια μορφή» θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση F που είναι γνήσια μονότονη , εκφράζουμε τα δύο μέλη αξιοποιώντας την F και στη συνέχεια λύνουμε την ισοδύναμη ανίσωση $f(x) < g(x)$ εφόσον η F είναι γνήσια αύξουσα

Μορφή: $F(x) < F(\alpha) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x < \alpha$

Έχουμε μεταφέρει όλους τους όρους στο πρώτο μέλος , θεωρούμε συνάρτηση F , στη συνέχεια αξιοποιούμε τη μονοτονία της F :

Μορφή: $F(k(x)) + F(m(x)) < F(p(x)) + F(q(x))$

Όπου F γνήσια μονότονη συνάρτηση: Εντοπίζουμε Ρίζα(ες) και διακρίνουμε περιπτώσεις για το x και συγκρίνοντας μεταξύ τους τις παραστάσεις $k(x), m(x)$ με τις $p(x), q(x)$.

Μορφή: $F(k(x)) + F(m(x)) = 2F(\alpha)$

Όπου το α μπορεί να είναι:

- θέση μοναδικού ακροτάτου. Τότε $k(x) = \alpha$ και $m(x) = \alpha$ κλπ
- Το α είναι το μοναδικό κοινό σημείο επαφής εφαπτομένης σε κοίλη ή κυρτή συνάρτησης (αναγνωρίζεται καλύτερα από τη μορφή $F(x) = (x-\alpha)F'(\alpha) + F(\alpha)$)
- Το α είναι η μοναδική θέση ισότητας σε γνωστή ανισότητα (π.χ. $\ln t \le t-1$, $t > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t = 1$, $|\eta\mu x| \le |x|$, $x \in R$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$)

ΑΣΚΗΣΗ 6.

Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = 7^x$, $x \in R$ είναι «κάτω» από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2 + 7x + 1$, $x \in R$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = 7^x + x^2 - 7x - 1$, $x \in R$

Πρώτα θα λύσουμε την εξίσωση $7^x + x^2 - 7x - 1 = 0$ στο R

Παρατηρούμε ότι οι τιμές μηδέν και ένα είναι λύσεις της εξίσωσης $7^x + x^2 - 7x - 1 = 0$ αφού την επαληθεύουν.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow 7^x + x^2 - 7x - 1 = 0$ έχει τρείς διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες τις $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

Για τη συνάρτηση $h(x) = 7^x + x^2 - 7x - 1$ με $h'(x) = 7^x \ln 7 + 2x$ και $h''(x) = 7^x \ln^2 7 + 2$ ισχύει ότι $h(\rho_1) = h(\rho_2) = h(\rho_3) = 0$.

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\kappa \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\lambda \in (\rho_2, \rho_3)$ ώστε $h'(\kappa) = 0$ και $h'(\lambda) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $h'(x) = 0$ θα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο ρίζες .

Με εφαρμογή του Θ. Rolle για την h' στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$ έχουμε ότι υπάρχει $m \in [\kappa, \lambda]$ ώστε $h''(m) = 0$, που είναι άτοπο επειδή $h''(x) = 7^x \ln^2 7 + 2 > 0$

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι η αρχική εξίσωση έχει τρείς ρίζες, που σημαίνει ότι έχει ρίζες μόνο το μηδέν και το ένα.

Συνεπώς η συνάρτηση $h(x) = 7^x + x^2 - 7x - 1$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ και $(1, +\infty)$ διατηρεί πρόσημο και επειδή είναι

$$h(-1) = \frac{1}{7} + 1 + 7 - 1 > 0, \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{7} + \frac{1}{4} - \frac{7}{2} - 1 < 0, \quad h(2) = 7^2 + 2^2 - 14 - 1 > 0$$

Θα είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ και $h(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι «κάτω» από τη γραφική παράσταση της g μόνο όταν $x \in (0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 7.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R , για την οποία ισχύει ότι $f(1) < f'(x) < f(2)$ για κάθε $x \in R$.
Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq f(1)(x-1)$

Λύση

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1,2]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1)$ και επειδή $f(1) < f'(x) < f(2)$ θα είναι

$$f(1)<f'(\xi)<f(2)\Leftrightarrow f(1)<f(2)-f(1)<f(2)$$ οπότε $$f(2)-f(1)<f(2)\Leftrightarrow f(1)>0$$

Από τη σχέση $f(1)<f'(x)<f(2)$ προκύπτει ότι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για τη λύση της ανίσωσης $f(x)\geq f(1)(x-1)$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-f(1)(x-1)$, που είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f'(x)-f(1)>0$

Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα και η ανίσωση γίνεται:

$$f(x)\geq f(1)(x-1)\Leftrightarrow f(x)-f(1)(x-1)\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow x\geq 1$$

Που είναι οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη στο $(0,+\infty)$. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\sqrt{x}+1\right)f(x)\geq f\left(x\sqrt{x}\right)+xf\left(\sqrt{x}\right)$ (1)

Λύση

Για την επίλυση της ανίσωσης διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $x=1$ η ανίσωση επαληθεύεται

Αν $0<x<1$ τότε είναι $x\sqrt{x}<x<\sqrt{x}$

Σε καθένα από τα διαστήματα $\left[x\sqrt{x},x\right]$ και $\left[x,\sqrt{x}\right]$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχουν $\kappa\in\left(x\sqrt{x},x\right)$ και $\lambda\in\left(x,\sqrt{x}\right)$ ώστε

$$f'(\kappa)=\frac{f(x)-f\left(x\sqrt{x}\right)}{x-x\sqrt{x}},\ f'(\lambda)=\frac{f\left(\sqrt{x}\right)-f(x)}{\sqrt{x}-x}$$

Όμως

$$\kappa<\lambda\Leftrightarrow f'(\kappa)>f'(\lambda)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f\left(x\sqrt{x}\right)}{x-x\sqrt{x}}>\frac{f\left(\sqrt{x}\right)-f(x)}{\sqrt{x}-x}\Leftrightarrow$$

$$\left(x-x\sqrt{x}\right)\frac{f(x)-f\left(x\sqrt{x}\right)}{x-x\sqrt{x}}>\left(x-x\sqrt{x}\right)\frac{f\left(\sqrt{x}\right)-f(x)}{\sqrt{x}-x}\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f\left(x\sqrt{x}\right)>\sqrt{x}f\left(\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}f(x)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{x}\right)f(x)>\sqrt{x}f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(x\sqrt{x}\right)$$

Επομένως οι αριθμοί $0<x<1$ αποτελούν λύσεις της ανίσωσης

Αν $x>1$ τότε όποια με πριν προκύπτει ότι $\left(1+\sqrt{x}\right)f(x)<\sqrt{x}f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(x\sqrt{x}\right)$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί $x\in(0,1]$

ΑΣΚΗΣΗ 9.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$, $x>1$.

Να λυθεί η εξίσωση $\left(5^x+1\right)^{\left(2^x+3x\right)}>\left(2^x+3x+1\right)^{\left(5^x\right)}$ στο $[0,+\infty)$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$, $x>1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\frac{(x-1)'\ln x-\frac{1}{x}(x-1)}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1+\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}>0$$

Επειδή από την ανισότητα $\ln t\le t-1,\ t>0$ για $t=\dfrac{1}{x}\ne 1$ παίρνουμε

$$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow -\ln x<\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1>0$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\left(5^x+1\right)^{\left(2^x+3x\right)}>\left(2^x+3x+1\right)^{\left(5^x\right)}\Leftrightarrow \ln\left(5^x+1\right)^{\left(2^x+3x\right)}>\ln\left(2^x+3x+1\right)^{\left(5^x\right)}\Leftrightarrow$$

$$\left(2^x+3x\right)\ln\left(5^x+1\right)>5^x\ln\left(2^x+3x+1\right)\Leftrightarrow \frac{5^x}{\ln\left(5^x+1\right)}<\frac{2^x+3x}{\ln\left(2^x+3x+1\right)}\Leftrightarrow$$

$$f\left(5^x+1\right)<f\left(2^x+3x+1\right)\Leftrightarrow 5^x+1<2^x+3x+1\Leftrightarrow 5^x-2^x-3x<0$$

Οι τιμές μηδέν και ένα αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $5^x-2^x-3x=0$ αφού την επαληθεύουν.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $5^x-2^x-3x=0$ έχει τρείς διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες τις $\rho_1<\rho_2<\rho_3$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=5^x-2^x-3x$, $x\in R$ με $f'(x)=5^x\ln 5-2^x\ln 2-3$ για την οποία ισχύει ότι $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$.

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\kappa\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\lambda\in(\rho_2,\rho_3)$ ώστε $f'(\kappa)=0$ και $f'(\lambda)=0$, δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=0$ θα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο ρίζες .

Όμως για την παράγωγο της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 5^x\ln 5-2^x\ln 2-3=0\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^x\ln 5-\ln 2-\frac{3}{2^x}=0\ (1).$$

Επειδή η συνάρτηση $g(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x \ln 5-\ln 2-\frac{3}{2^x}$ είναι γνησίως αύξουσα η εξίσωση $g(x)=0$ άρα και η $f'(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα, που είναι άτοπο .

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι η αρχική εξίσωση έχει τρείς ρίζες, που σημαίνει ότι έχει ρίζες μόνο το μηδέν και το ένα.

Συνεπώς η συνάρτηση $f(x)=5^x-2^x-3x$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ διατηρεί πρόσημο και επειδή είναι

$$f(-1)=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+3>0\,,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{5}-\sqrt{2}-\frac{3}{2}<0\,,\quad f(2)=5^2-2^2-6>0$$

Θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ και

$f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$

Άρα λύσεις της ανίσωσης $5^x-2^x-3x<0$ είναι οι $x\in(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 10.

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$, για κάθε $x>0$.

Α) Να αποδείξετε τη μονοτονία της f

Β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\left(2x^2+1\right)e^{2x^2-x-1}\right)<f(x+2)$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)e^{f(x)}<(e+1)e^{e+1}$ για $x>1$

Δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{\frac{x}{2}}<\sqrt{\frac{2\ln 2}{x}}$ στο $(0,+\infty)$

Λύση

Α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ επειδή $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$.

Β) Το πεδίο ορισμού της ανίσωσης είναι το $(-2,+\infty)$ και η ανίσωση γράφεται

$$f\left(\left(2x^2+1\right)e^{2x^2-x-1}\right)<f(x+2)\Leftrightarrow\left(2x^2+1\right)e^{2x^2-x-1}<x+2\Leftrightarrow$$

$$\ln\left[\left(2x^2+1\right)e^{2x^2-x-1}\right]<\ln(x+2)\Leftrightarrow\ln\left(2x^2+1\right)+2x^2-x-1<\ln(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(2x^2+1\right)+2x^2+1<\ln(x+2)+x+2\Leftrightarrow f\left(2x^2+1\right)<f(x+2)\Leftrightarrow 2x^2+1<x+2\Leftrightarrow$$

$$2x^2-x-1<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$$

Γ) Για κάθε $x>1$ έχουμε ότι:

$$f(x)e^{f(x)} < (e+1)e^{e+1} \Leftrightarrow \ln\left(f(x)e^{f(x)}\right) < \ln\left((e+1)e^{e+1}\right) \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) < \ln(e+1) + (e+1) \Leftrightarrow$$

$$f\left(f(x)\right) < f(e+1) \Leftrightarrow f(x) < e+1 \Leftrightarrow f(x) < f(e) \Leftrightarrow x < e$$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x \in (1,e)$

Δ) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$e^{\frac{x}{2}} < \sqrt{\frac{2\ln 2}{x}} \Leftrightarrow \ln e^{\frac{x}{2}} < \ln\sqrt{\frac{2\ln 2}{x}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\ln\frac{2\ln 2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\ln\frac{2\ln 2}{x} \Leftrightarrow x < \ln 2 + \ln(\ln 2) - \ln x \Leftrightarrow \ln x + x < \ln 2 + \ln(\ln 2) \Leftrightarrow$$

$$f(x) < f(\ln 2) \Leftrightarrow x < \ln 2$$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί $x \in (0, \ln 2)$

ΑΣΚΗΣΗ 11.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4+1}$, $x \in R$. Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $f\left(17(x^2+1)^5 - 32\right) \le f\left(32(x^2+1)^4\right)$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{x^8+1}{\left(x^4+1\right)^2} > 0$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

$$f\left(17(x^2+1)^5 - 32\right) \le f\left(32(x^2+1)^4\right) \Leftrightarrow 17(x^2+1)^3 - 32 \le 32(x^2+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$17(x^2+1)^5 \le 32(x^2+1)^4 + 32 \Leftrightarrow \frac{(x^2+1)^5}{(x^2+1)^4+1} \le \frac{32}{17} \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2+1\right) = f(2) \Leftrightarrow x^2+1 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 12.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R με σύνολο τιμών $f(R) = R$. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,-1)$, τότε

Α Να αποδείξετε τη μονοτονία της f

Β Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}\left(-2 + f^{-1}(5^x + 4 - 2^{x+1})\right) > 3$

Γ Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x) \le 5 + 4f(x)$

Δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(x - \ln\dfrac{2}{x} + 1\right) = -1$

Λύση

Α) Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίωςφθίνουσαστο R.

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in R$ έχουμε ότι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

και για $x_1 = 1,\ x_2 = 3$ θα έχουμε ότι $1 < 3 \Rightarrow f(1) < f(3) \Rightarrow 5 < -1$

που είναι άτοπο.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Β Η f ως γνησίως φθίνουσα είναι αντιστρέψιμη στο R. Για την ανίσωση έχουμε:

$$f^{-1}\left(-2+f^{-1}(5^x+4-2^{x+1})\right)>3 \Leftrightarrow f\left[f^{-1}\left(-2+f^{-1}(5^x+4-2^{x+1})\right)\right]>f(3)$$

$$\Leftrightarrow -2+f^{-1}(5^x+4-2^{x+1})>-1 \Leftrightarrow f^{-1}(5^x+4-2^{x+1})>1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(f^{-1}(5^x+4-2^{x+1})\right)>f(1) \Leftrightarrow 5^x+4-2^{x+1}>5 \Leftrightarrow 5^x-2^{x+1}>1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x-\frac{1}{2^x}>2$$

Η συνάρτηση $g(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x-\frac{1}{2^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα επομένως έχουμε

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x-\frac{1}{2^x}>2 \Leftrightarrow g(x)>g(1) \Leftrightarrow x<1$$

Γ Έχουμε ότι

$$f^2(x)\le 5+4f(x) \Leftrightarrow f^2(x)-5-4f(x)\le 0 \Leftrightarrow \left(f(x)-5\right)\left(f(x)+1\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$-1\le f(x)\le 5 \Leftrightarrow f(3)\le f(x)\le f(1) \Leftrightarrow 1\le x\le 3$$

Δ) Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f^{-1}\left(x-\ln\frac{2}{x}+1\right)=-1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(x-\ln\frac{2}{x}+1\right)\right)=f(-1) \Leftrightarrow x-\ln\frac{2}{x}+1=3 \Leftrightarrow$$

$$x-\ln\frac{2}{x}+1=3 \Leftrightarrow x-\ln\frac{2}{x}=2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x)=x-\ln\frac{2}{x},\ x>0$ που είναι γνησίως αύξουσα επειδή η παράγωγός της είναι $\kappa'(x)=1+\frac{1}{x}>0$, συνεπώς η ανίσωση γίνεται:

$$x-\ln\frac{2}{x}>2 \Leftrightarrow \kappa(x)>\kappa(2) \Leftrightarrow x>2$$

ΑΣΚΗΣΗ 13.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-e^{-x}$ με $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{f(x)}\left(f(x)+1+e\right)\right)>f(1)$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=1+e^{-x}>0$ και για την ανίσωση έχουμε:

$$f\left(e^{f(x)}\left(f(x)+1+e\right)\right)>f(1)\Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}\left(f(x)+1+e\right)>1\Leftrightarrow f(x)+1+e>e^{-f(x)}\Leftrightarrow f(x)-e^{-f(x)}>-1-e\Leftrightarrow$$

$$f\left(f(x)\right)>f(-1)\Leftrightarrow f(x)>-1\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x>0$$

ΑΣΚΗΣΗ 14.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(e^x+1\right)$, $x\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Β) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x^2-x-2\right)>f^{-1}\left(\ln\dfrac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1}\right)$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $e^{f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)}>e^2+e$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(e^x+1\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$f'(x)=1+\dfrac{e^x}{e^x+1}>0$, συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επειδή είναι συνεχής θα έχει σύνολο τιμών το $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

και $f''(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-e^xe^x}{e^x+1}=\dfrac{e^x}{e^x+1}>0$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R

Α) Για κάθε $x\in R$, ανίσωση γράφεται:

$$f^{-1}\left(x^2-x-2\right)>f^{-1}\left(\ln\frac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1}\right)\Leftrightarrow f\left[f^{-1}\left(x^2-x-2\right)\right]>f\left[f^{-1}\left(\ln\frac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1}\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$x^2-x-2>\ln\frac{e^{x+2}+1}{e^{x^2}+1}\Leftrightarrow x^2-x-2>\ln\left(e^{x+2}+1\right)-\ln\left(e^{x^2}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e^{x^2}+1\right)+x^2>\ln\left(e^{x+2}+1\right)+x+2\Leftrightarrow f\left(x^2\right)>f(x+2)\Leftrightarrow x^2>x+2\Leftrightarrow$$

$$x^2-x-2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$

Β) Ισοδύναμα η ανίσωση, για κάθε $x\in R$, γράφεται:

$$e^{f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)} > e^2+e \Leftrightarrow \ln e^{f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)} > \ln\left(e^2+e\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right) > \ln\left(e(e+1)\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right) > 1+\ln(e+1) \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right) > f(1) \Leftrightarrow \frac{2}{3}f'(x) > 1 \Leftrightarrow f'(x) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 15.

Αν $f(x) = x^5+5x-4$, $x \in R$, να λυθεί η ανίσωση $f^5(x)+5f(x) > 42$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα επειδή έχει $f'(x) = 5x^4+5 > 0$ και η ανίσωση γίνεται:

$$f^5(x)+5f(x) > 42 \Leftrightarrow f^5(x)+5f(x)-4 > 38 \Leftrightarrow$$

$$f(f(x)) > f(2) \Leftrightarrow f(x) > 2 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x > 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 16.

Αν $f(x) = e^{-x}+x-1$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) < f(x^2)+\ln x$ για $x > 0$

Λύση

Ισοδύναμα παίρνουμε ότι:

$$f(x) < f(x^2)+\ln x \Leftrightarrow f(x)+\ln x < f(x^2)+2\ln x \Leftrightarrow f(x)+\ln x < f(x^2)+\ln x^2 \Leftrightarrow g(x) < g(x^2)$$

όπου $g(x) = f(x)+\ln x$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = -e^{-x}+1$ και

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow x > 0,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Συνεπώς για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε ότι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ \ln x_1 < \ln x_2 \end{cases} \Rightarrow f(x_1)+\ln x_1 < f(x_2)+\ln x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε ισυδύναμα παίρνουμε

$$g(x) < g(x^2) \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x(1-x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

αφού $x > 0$, που είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < f(x^2)+\ln x$

ΑΣΚΗΣΗ 17.

Να λύσετε την ανίσωση $1+3^{2-x} < \frac{3^{x^2}+1}{4^{x^2+x-2}}$

Λύση

Για κάθε $x \in R$ έχουμε ότι:

$$1+3^{2-x}<\frac{3^{x^2}+1}{4^{x^2+x-2}}\Leftrightarrow 1+3^{2-x}<\frac{3^{x^2}+1}{4^{x^2}\cdot 4^{x-2}}\Leftrightarrow \frac{1+3^{2-x}}{4^{2-x}}<\frac{3^{x^2}+1}{4^{x^2}}\Leftrightarrow \frac{1}{4^{2-x}}+\frac{3^{2-x}}{4^{2-x}}<\frac{3^{x^2}}{4^{x^2}}+\frac{1}{4^{x^2}}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x$, $x\in R$ που είναι γνησίως φθίνουσα επειδή

$$f'(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x\ln\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^x\ln\frac{3}{4}<0\,.$$

Συνεπώς θα έχουμε ότι :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}\Leftrightarrow f(2-x)<f\left(x^2\right)\Leftrightarrow$$

$$x^2<2-x\Leftrightarrow x^2+x-2<0\Leftrightarrow x\in(-2,1)$$

Που είναι οι λύσεις της ανίσωσης

ΑΣΚΗΣΗ 18.

Να λύσετε την ανίσωση $\ln(\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x<\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$\ln(\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x<\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu x)+\ln e^{\eta\mu x}<\ln(\eta\mu x)+\ln e^{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\, e^{\eta\mu x}\right)<\ln\left(\eta\mu x\, e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\, e^{\eta\mu x}<\eta\mu x\, e^{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x}<\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x}\ (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{e^x}{x}$, $x>0$ με

$$h'(x)=\frac{e^x-xe^x}{x^2}=\frac{e^x(1-x)}{x^2}$$

Επομένως στο διάστημα $(0,1)$ η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$(1)\Leftrightarrow h(\eta\mu x)<h(\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow \eta\mu x>\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x>0$

Στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η $\kappa(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$ έχει μοναδική ρίζα το $\frac{\pi}{4}$

Και ισχύει ότι

$$\kappa\left(\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}>0$$

$$\kappa\left(\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

Σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση κ διατηρεί πρόσημο επειδή είναι συνεχής που δεν μηδενίζεται και επειδή $\kappa\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$, $\kappa\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$ θα είναι $\kappa(x)<0$ για κάθε $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\kappa(x)>0$ για κάθε $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 19.

Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^3}+2\ln x<e^x$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$, που είναι γνησίως αύξουσα επειδήγια κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ έχουμε ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}e^{x_1}<e^{x_2}\\ \ln x_1<\ln x_2\end{cases}\Rightarrow e^{x_1}+\ln x_1<e^{x_2}+\ln x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Για κάθε $x>0$, η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$e^{x^3}+2\ln x<e^x\Leftrightarrow e^{x^3}+3\ln x<e^x+\ln x\Leftrightarrow f(x^3)<f(x)\Leftrightarrow x^3<x\Leftrightarrow$$

$$x(x^2-1)<0\Leftrightarrow x\in(0,1).$$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x\in(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 20.

Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-x^2}>1+x^2-x$

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x$, με $A_g=R$.

Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε ότι $e^{x_1}<e^{x_2}$ επομένως

$$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Rightarrow e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$e^{x-x^2}>1+x^2-x\Leftrightarrow e^{x-x^2}+x-x^2>1\Leftrightarrow g(x-x^2)>g(0)\Leftrightarrow x-x^2>0\Leftrightarrow x\in(0,1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 21.

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=e^x+\ln\left(e^x+1\right)$, $x\in R$. Αν F είναι μια παράγουσα της f, να λύσετε στο R την ανίσωση $\dfrac{F(\eta\mu x+1)-F(\eta\mu x)}{e^x}\geq\dfrac{F(x+1)-F(x)}{e^{\eta\mu x}}$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R επειδή $f'(x)=e^x+\dfrac{e^x}{e^x+1}>0,\ x\in R$

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται :

$$\frac{F(\eta\mu x+1)-F(\eta\mu x)}{e^x}\geq\frac{F(x+1)-F(x)}{e^{\eta\mu x}}\Leftrightarrow$$

$$e^{\eta\mu x}\left(F(\eta\mu x+1)-F(\eta\mu x)\right)\geq e^x\left(F(x+1)-F(x)\right)\quad(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=F(x+1)-F(x)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο R επειδή

$H'(x)=F'(x+1)-F'(x)=f(x+1)-f(x)>0$

Οπότε η τελευταία ανίσωση γίνεται:

$$(1)\Leftrightarrow H(\eta\mu x)\geq H(x)\Leftrightarrow\eta\mu x\geq x$$

Η οποία είναι αληθής μόνο για $x=0$ λόγω της γνωστής ανισότητας $|\eta\mu x|\leq|x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$

Άρα λύση της ανίσωσης είναι η $x=0$

ΑΣΚΗΣΗ 22.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{3^{f(x)}}$, x ∈ R

Α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(e^{x^2-x}\right)>f\left(3^{f(x^2)-f(x)}\right)$ στο R

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(\sqrt{x}\right)>f(x)+\ln x$

Δ) Να λυθεί η ανίσωση $\left(x^2+3\right)\int_0^{4x}f(t)\,dt\geq 4x\int_0^{x^2+3}f(t)\,dt$ στο $(0,+\infty)$

Λύση

Α) Για κάθε $x\in R$ έχουμε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{3^{f(x)}}\Leftrightarrow f(x)\cdot 3^{f(x)}=e^x$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=xe^x$, $x\geq 0$ που είναι γνησίως αύξουσα επειδή $k'(x)=e^x+xe^x>0$.

Για την απόδειξη της μονοτονίας της f , θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1, x_2\geq 0$ με $x_1<x_2$ και θα έχουμε ότι

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow f(x_1)3^{f(x_1)}<f(x_2)3^{f(x_2)}\Rightarrow k\left(f(x_1)\right)<k\left(f(x_2)\right)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε ότι

$$f\left(e^{x^2-x}\right) > f\left(3^{f(x^2)-f(x)}\right) \Leftrightarrow e^{x^2-x} > 3^{f(x^2)-f(x)} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^x} > \frac{3^{f(x^2)}}{3^{f(x)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{x^2}}{3^{f(x^2)}} > \frac{e^x}{3^{f(x)}} \Leftrightarrow f\left(x^2\right) > f\left(x\right) \Leftrightarrow x^2 > x \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, 0\right) \cup \left(1, +\infty\right)$$

Γ) Το πεδίο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\left(0, +\infty\right)$. Για τη λύση της ανίσωσης διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Αν $x = 1$ η ανίσωση δεν αληθεύει

Αν $0 < x < 1$ τότε: $0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x < 0 \\ x < \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x < 0 \\ f\left(x\right) < f\left(\sqrt{x}\right) \end{cases} \Rightarrow \ln x + f\left(x\right) < f\left(\sqrt{x}\right)$

Αν $x > 1$ τότε: $x > 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x > 0 \\ x > \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x > 0 \\ f\left(x\right) > f\left(\sqrt{x}\right) \end{cases} \Rightarrow \ln x + f\left(x\right) > f\left(\sqrt{x}\right)$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης $f\left(\sqrt{x}\right) > f\left(x\right) + \ln x$ είναι οι αριθμοί x με $0 < x < 1$

Δ) Για κάθε $x \in \left(0, +\infty\right)$ η ανίσωση γίνεται:

$$\left(x^2+3\right)\int_0^{4x} f\left(t\right)dt \geq 4x\int_0^{x^2+3} f\left(t\right)dt \Leftrightarrow \frac{\int_0^{4x} f\left(t\right)dt}{4x} \geq \frac{\int_0^{x^2+3} f\left(t\right)dt}{x^2+3}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right) = \frac{\int_0^x f\left(t\right)dt}{x}$, $x > 0$ με $g'\left(x\right) = \frac{xf\left(x\right) - \int_0^x f\left(t\right)dt}{x^2}$

Για τον αριθμητή του κλάσματος έχουμε ότι είναι

$$xf\left(x\right) - \int_0^x f\left(t\right)dt > 0 \Leftrightarrow f\left(x\right) > \frac{\int_0^x f\left(t\right)dt}{x}$$

Για τη συνάρτηση $\kappa\left(u\right) = \int_0^u f\left(t\right)dt$, $u \in \left[0, +\infty\right)$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left[0, x\right]$, επομένως υπάρχει $\xi \in \left(0, x\right)$ ώστε

$$\kappa'\left(\xi\right) = \frac{\kappa\left(x\right) - \kappa\left(0\right)}{x - 0} \Leftrightarrow f\left(\xi\right) = \frac{\int_0^x f\left(t\right)dt}{x}$$

Θα έχουμε ότι $f\left(x\right) > \frac{\int_0^x f\left(t\right)dt}{x} \Leftrightarrow f\left(x\right) > f\left(\xi\right) \Leftrightarrow x > \xi$ που είναι αληθής επομένως είναι $g'\left(x\right) > 0$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Για την ανίσωση θα έχουμε ότι

$$\frac{\int_0^{4x} f(t)dt}{4x} \geq \frac{\int_0^{x^2+3} f(t)dt}{x^2+3} \Leftrightarrow g(4x) \geq g(x^2+3) \Leftrightarrow 4x \geq x^2+3 \Leftrightarrow x^2-4x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1,3]$$

Που είναι η λύσεις της ανίσωσης

ΑΣΚΗΣΗ 23.

Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε η συνάρτηση h με $h(x) = e^{-f(x)} - f^3(x) + 2$ να είναι γνησίως αύξουσα. Να βρείτε την μονοτονία της f και να λύσετε την ανίσωση:

$2^{f(x^2-x)-f(4-x)} > e^{f(x^2-x)-f(4-x)}$

Λύση

Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο R ,για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 > x_2$ έχουμε ότι:

$$h(x_1) > h(x_2) \Leftrightarrow e^{-f(x_1)} - f^3(x_1) + 2 > e^{-f(x_2)} - f^3(x_2) + 2 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = e^{-x} - x^3 + 2$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Τότε από την (1) παίρνουμε ότι:

$$(1) \Leftrightarrow k(f(x_1)) < k(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

Ισοδύναμα η ανίσωση γίνεται

$$2^{f(x^2-x)-f(4-x)} > e^{f(x^2-x)-f(4-x)} \Leftrightarrow \frac{2^{f(x^2-x)}}{2^{f(4-x)}} > \frac{e^{f(x^2-x)}}{e^{f(4-x)}} \Leftrightarrow \frac{2^{f(x^2-x)}}{e^{f(x^2-x)}} > \frac{2^{f(4-x)}}{e^{f(4-x)}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{e}\right)^{f(x^2-x)} > \left(\frac{2}{e}\right)^{f(4-x)} \Leftrightarrow f(x^2-x) < f(4-x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x > 4 - x \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 24.

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο R . Να λυθεί η ανίσωση

$f(x^2+x) - f(2x) < x^2 - x \quad (1)$

Λύση

Ισοδύναμα έχουμε:

$$f(x^2+x) - f(2x) < x^2 - x \Leftrightarrow f(x^2+x) - (x^2+x) < f(2x) - 2x \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, $x \in R$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα αφού για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \Rightarrow f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$$

Τότε η ανίσωση (2) γίνεται:

$$(2) \Leftrightarrow h(x^2+x) < h(2x) \Leftrightarrow x^2 + x < 2x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

που είναι οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης (1)

ΑΣΚΗΣΗ 25.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$, $x\in(0,+\infty)$. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)<f(x^2)+lnx$

Λύση

Η f είναι γνησίως αύξουσα αφού για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1<x_2\\e^{x_1}<e^{x_2}\end{cases}\Rightarrow e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Rightarrow e^{x_1}+x_1-1<e^{x_2}+x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε ότι

$$f(x)<f(x^2)+lnx\Leftrightarrow f(x)+\ln x<f(x^2)+2lnx\Leftrightarrow f(x)+\ln x<f(x^2)+lnx^2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\\ln x_1<\ln x_2\end{cases}\Rightarrow f(x_1)+\ln x_1<f(x_2)+\ln x_2\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Για κάθε $x>0$, η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x)<f(x^2)+lnx\Leftrightarrow f(x)+\ln x<f(x^2)+2lnx\Leftrightarrow f(x)+\ln x<f(x^2)+lnx^2\Leftrightarrow$$

$$h(x)<h(x^2)\Leftrightarrow x<x^2\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$$

ΑΣΚΗΣΗ 26.

Να λυθεί η ανίσωση : $e^{3x^2-1}-e^{3-x}>-3x^2-x+4$ στο R

Λύση

Η ανίσωση γράφεται :

$$e^{3x^2-1}-e^{3-x}>-3x^2-x+4\Leftrightarrow e^{3x^2-1}+(3x^2-1)>e^{3-x}+(3-x)\quad(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x+x$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, αφού είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$f'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in R$

Οπότε η δοθείσα ανίσωση (1) γράφεται :

$$(1)\Leftrightarrow f(3x^2-1)>f(3-x)\Leftrightarrow$$

$$3x^2-1>3-x\Leftrightarrow 3x^2+x-4>0\Leftrightarrow x<-\frac{4}{3}\ \text{ή}\ x>1$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

ΑΣΚΗΣΗ 27.

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=e^x-2$. Να αποδείξετε ότι τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ στο $(0,+\infty)$ και να λύσετε την ανίσωση $x^2f(x)>f(x^2)$ στο $(0,+\infty)$

Λύση

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{e^xx^2-(e^x-2)2x}{x^4}=\frac{e^xx^2-2xe^x+4x}{x^4}=\frac{xe^x-2e^x+4}{x^4}$$

Για τη συνάρτηση $k(x)=xe^x-2e^x+4$ $x\in(0,+\infty)$ ισχύει ότι

$$k'(x)=e^x+xe^x-2e^x=(x-1)e^x \text{ με } k'(x)<0 \text{ αν } x\in(0,1) \; k'(x)>0 \text{ αν } x\in(1,+\infty)$$

Η k είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $k(1)=4-e>0$. Συνεπώς θα είναι $k(x)\geq k(1)>0$, επομένως $g'(x)>0$ οπότε η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η ανίσωση γίνεται

$$x^2f(x)>f(x^2)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x^2}>\frac{f(x^2)}{x^4}\Leftrightarrow g(x)>g(x^2)\Leftrightarrow x>x^2\Leftrightarrow x\in(0,1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 28.

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(x)+f(y)=f(xy)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει η ισοδυναμία $x>0\Leftrightarrow f(x)>0$, να αποδείξετε τη μονοτονία της f και να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $f(e^x)>f(3e^{2x}+1)-f(e^{2x}+3)$, $x\in R$.

B) $3f(x)<f(7x-6)$

Λύση

Από τη σχέση $f(x)+f(y)=f(xy)$ για $x=y=1$ παίρνουμε ότι $f(1)=0$

Ενώ για $y=\dfrac{1}{x}$ έχουμε $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(1)\Leftrightarrow f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

Για την απόδειξη της μονοτονίας της f έχουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} > 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > f(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0 \Leftrightarrow f\left(x_2 \frac{1}{x_1}\right) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) + f\left(\frac{1}{x_1}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

A) Το πεδίο ορισμού της ανίσωσης είναι το R . Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f(e^x) > f(3e^{2x}+1) - f(e^{2x}+3) \Leftrightarrow f(e^x) + f(e^{2x}+3) > f(3e^{2x}+1) \Leftrightarrow$$

$$f\left(e^x(e^{2x}+3)\right) > f(3e^{2x}+1) \Leftrightarrow e^x(e^{2x}+3) > 3e^{2x}+1 \Leftrightarrow e^{3x}+3e^x-3e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x-1\right)^3 > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Που είναι οι λύσεις της ανίσωσης

B) Το πεδίο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\left(\frac{6}{7}, +\infty\right)$

Για κάθε $x \in \left(\frac{6}{7}, +\infty\right)$ έχουμε ότι

$$3f(x) < f(7x-6) \Leftrightarrow f(x) + f(x) + f(x) < f(7x-6) \Leftrightarrow f(x^3) < f(7x-6) \Leftrightarrow$$

$$x^3 < 7x - 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3) < 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1,2)$$

Λόγω του ότι πρέπει $x \in \left(\frac{6}{7}, +\infty\right)$, λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί $x \in (1,2)$

ΑΣΚΗΣΗ 29.

Να λύσετε την ανίσωση $\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + x\sqrt{1+x^2}\right) < -x^2$ στο $(0, +\infty)$ (1)

Λύση

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ και θα έχουμε:

$$\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + x\sqrt{1+x^2}\right) < -x^2 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\frac{x + x\sqrt{1+x^2}}{x^2} < -1 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) < -1 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) < -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} < x + \sqrt{x^2+1} \qquad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Οπότε: $(2) \Leftrightarrow f(x) < f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x < \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \in (0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 30.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=x+\ln x,\ x>0$ ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα

A) Να λυθεί η ανίσωση $\ln\frac{2x}{x^2+1}>\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ στο $(0,+\infty)$

B) Να λύσετε την ανίσωση $f'\left(\left(x^3+2x\right)e^{x^3+x-2}\right)<f'(x+2)$ στο $(-2,+\infty)$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ και $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $(0,+\infty)$

A) Η ανίσωση στο $(0,+\infty)$ γίνεται:

$$\ln\frac{2x}{x^2+1}>\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\Leftrightarrow\ln\frac{2x}{x^2+1}>\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}\Leftrightarrow\ln\frac{2x}{x^2+1}>1-\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{x^2+1}+\ln\frac{2x}{x^2+1}>1\Leftrightarrow f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)>f(1)\Leftrightarrow\frac{2x}{x^2+1}>1\Leftrightarrow x^2+1>2x\Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

B) Η ανίσωση για $x\in(-2,+\infty)$ ισοδύναμα γίνεται:

$$f'\left(\left(x^3+2x\right)e^{x^3+x-2}\right)<f'(x+2)\Leftrightarrow\left(x^3+2x\right)e^{x^3+x-2}>x+2\Leftrightarrow$$

$$\ln\left[\left(x^3+2x\right)e^{x^3+x-2}\right]>\ln(x+2)\Leftrightarrow\ln\left(x^3+2x\right)+x^3+x-2>\ln(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(x^3+2x\right)+x^3+2x>\ln(x+2)+x+2\Leftrightarrow f\left(x^3+2x\right)>f(x+2)\Leftrightarrow$$

$$x^3+2x>x+2\Leftrightarrow x^3+2x-x-2>0\Leftrightarrow x^3+x-1-1>0\Leftrightarrow$$

$$(x-1)\left(x^2+x+2\right)>0\Leftrightarrow x>1$$

ΑΣΚΗΣΗ 31.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$, $x\in R$. Να λύσετε την ανίσωση

$$f\left((2-2x+x^2)(\sqrt{x^2+1})^3\right)>f\left((x^2+2)(1-x)^3\right)$$

Λύση

A) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$, με το ίσον

να ισχύει μόνο στο μηδέν. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Για κάθε $x\in R$ η ανίσωση γίνεται:

$$f\left((2-2x+x^2)(\sqrt{x^2+1})^3\right)>f\left((x^2+2)(1-x)^3\right)\Leftrightarrow$$

$$(2-2x+x^2)(\sqrt{x^2+1})^3 > (x^2+2)(1-x)^3 \Leftrightarrow$$

$$\left(1+(1-x)^2\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 > \left(x^2+1+1\right)(1-x)^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+1} > \frac{(1-x)^3}{(1-x)^2+1} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2+1}\right) > f\left(1-x\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 1-x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+1}+x > 1$$

Η συνάρτηση $k(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ είναι γνησίως αύξουσα επομένως

$$\sqrt{x^2+1}+x > 1 \Leftrightarrow f\left(x\right) > f\left(0\right) \Leftrightarrow x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 32.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, $x \in R$. Να λύσετε την ανίσωση

$$f\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)\left((1-x)^2+1\right)}\right) > f\left((1-x)\sqrt{x^2+2}\right)$$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>0 \text{ και } f''(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}>0$$

Επειδή ισχύει ότι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$ θα είναι $\sqrt{x^2+1}+x>0$ οπότε και $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο R.

Για κάθε $x \in R$ η ανίσωση γίνεται:

$$f\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)\left((1-x)^2+1\right)}\right) > f\left((1-x)\sqrt{x^2+2}\right) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2+1}\sqrt{(1-x)^2+1}\right) > f\left((1-x)\sqrt{x^2+2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+1}\sqrt{(1-x)^2+1} > (1-x)\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}} > \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+1}} \Leftrightarrow 1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+1}} > 1+\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$f'\left(\sqrt{x^2+1}\right) > f'(1-x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 1-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+1}+x > 1 \Leftrightarrow f\left(x\right) > f\left(0\right) \Leftrightarrow x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 33.

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)+e^{f(x)}=1-e^x$ (1) για κάθε $x\in R$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x+e^x$, $x\in R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1<x_2\\e^{x_1}<e^{x_2}\end{cases}\Rightarrow x_1+e^{x_1}<x_2+e^{x_2}\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Για τη μονοτονία της f έχουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2}\Rightarrow 1-e^{x_1}>1-e^{x_2}\Rightarrow$$

$$f(x_1)+e^{f(x_1)}>f(x_2)+e^{f(x_2)}\Rightarrow h(f(x_1))>h(f(x_2))\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα

Από την (1) για $x=0$ έχουμε: $f(0)+e^{f(0)}=1-e^0\Leftrightarrow h(f(0))=h(0)\Leftrightarrow f(0)=0$

Η ανίσωση γίνεται:

$$f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x>0$$

ΑΣΚΗΣΗ 34.

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+f(x)+2x=0$ για κάθε $x\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R και περιττή, να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ καθώς και το πρόσημο της f

Β) Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in R$ για τους οποίους ισχύει ότι $f(\alpha^2+\beta^2)+f(2\alpha-4\beta+5)\le 0$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x)+3x>0$

Δ) Να λυθεί η ανίσωση $2x\cdot f^3(x)+f^2(x)+1>0$

Λύση

Α) Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\le f(x_2)$ και θα έχουμε

$$f(x_1)\le f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)\le f(x_2)\\f^3(x_1)\le f^3(x_2)\end{cases}\Rightarrow f^3(x_1)+f(x_1)\le f^3(x_2)+f(x_2)\Rightarrow$$

$$-2x_1\le -2x_2\Rightarrow x_1\ge x_2$$

Το οποίο είναι άτοπο. Άρα η είναι γνησίως φθίνουσα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^3+x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και περιττή.

Από την ισότητα $f^3(x)+f(x)+2x=0$ παίρνουμε ότι:

$$\begin{cases} f^3(x)+f(x)+2x=0 \\ f^3(-x)+f(-x)-2x=0 \end{cases} \Rightarrow -\left(f^3(x)+f(x)\right)=f^3(-x)+f(-x) \Rightarrow$$

$$-h\left(f(x)\right)=h\left(f(-x)\right) \Rightarrow h\left(-f(x)\right)=h\left(f(-x)\right) \Rightarrow -f(x)=f(-x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

Για $x=0$ παίρνουμε $f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow h\left(f(0)\right)=h(0) \Leftrightarrow f(0)=0$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, για το πρόσημο της έχουμε ότι:

Αν $x>0$ είναι $f(x)<0$ ενώ αν $x<0$ είναι $f(x)>0$

Για $x=1$ παίρνουμε

$$f^3(1)+f(1)=-2 \Leftrightarrow h\left(f(1)\right)=h(-1) \Leftrightarrow f(1)=-1$$

Για $x=-1$ παίρνουμε

$$f^3(-1)+f(-1)=2 \Leftrightarrow h\left(f(-1)\right)=h(1) \Leftrightarrow f(-1)=1$$

Β)

Για κάθε $\alpha,\beta \in R$ έχουμε

$$f\left(\alpha^2+\beta^2\right)+f(2\alpha-2\beta+5)\le 0 \Leftrightarrow f\left(\alpha^2+\beta^2\right)\le -f(2\alpha-2\beta+5) \Leftrightarrow$$
$$f\left(\alpha^2+\beta^2\right)\le f(-2\alpha+2\beta-5) \Leftrightarrow f\left(\alpha^2+\beta^2\right)\le f(-2\alpha+2\beta-5) \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2\le -2\alpha+2\beta-5 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha-4\beta-5\le 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+1)^2+(\beta-2)^2\le 0 \Leftrightarrow a=-1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta=2$$

Γ)

$$f^3(x)+3x>0 \Leftrightarrow f^3(x)+2x+x>0 \Leftrightarrow x>f(x) \Leftrightarrow h(x)>h\left(f(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$x^3+2x>f^3(x)+f(x) \Leftrightarrow x^3+2x>-2x \Leftrightarrow x^3+4x>0 \Leftrightarrow x\left(x^2+4\right)>0 \Leftrightarrow x>0$$

Δ) Για τη λύση της ανίσωσης στο διάστημα $(-\infty,0)$ επειδή $f(x)<0$ έχουμε

$$2x\cdot f^3(x)+f^2(x)+1>0 \Leftrightarrow \frac{2x\cdot f^3(x)+f^2(x)+1}{f^3(x)}>0 \Leftrightarrow 2x+\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f^3(x)}>0 \Leftrightarrow$$

$$h\left(\frac{1}{f(x)}\right)>-2x \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{f(x)}\right)>h\left(f(x)\right) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}>f(x) \Leftrightarrow -1<f(x)<1 \Leftrightarrow$$

$$f(1)<f(x)<f(-1) \Leftrightarrow -1<x<1$$

Άρα λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x\in(-1,0)$

ΑΣΚΗΣΗ 35.

Να λύσετε την ανίσωση $\alpha^{\beta\gamma}\beta^{\alpha\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\ge e^{\frac{3\alpha\beta\gamma}{e}}$ με αγνώστους τα $\alpha,\beta,\gamma\in(0,+\infty)$

Λύση

Η ανίσωση γίνεται:

$$\alpha^{\beta\gamma}\beta^{\alpha\gamma}\gamma^{\alpha\beta} \geq e^{\frac{3\alpha\beta\gamma}{e}} \Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{\beta\gamma}\beta^{\alpha\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\right) \geq \ln e^{\frac{3\alpha\beta\gamma}{e}} \Leftrightarrow \ln a^{\beta\gamma} + \ln\beta^{\alpha\gamma} + \ln\gamma^{\alpha\beta} \geq \frac{3\alpha\beta\gamma}{e} \Leftrightarrow$$

$$\beta\gamma\ln a + \alpha\gamma\ln\beta + \alpha\beta\ln\gamma \geq \frac{3\alpha\beta\gamma}{e} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\alpha} + \frac{\ln\beta}{\beta} + \frac{\ln\gamma}{\gamma} \geq \frac{3}{e}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Επειδή $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1,+\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$,

γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $x = e$ το $f(e) = \dfrac{1}{e}$.

Επομένως θα είναι $\dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = e$

Συνεπώς είναι $\dfrac{\ln\alpha}{\alpha} \leq \dfrac{1}{e}$, $\dfrac{\ln\beta}{\beta} \leq \dfrac{1}{e}$, $\dfrac{\ln\gamma}{\gamma} \leq \dfrac{1}{e}$ με τις ισότητες μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma = e$

Άρα ισχύει $\dfrac{\ln a}{\alpha} + \dfrac{\ln\beta}{\beta} + \dfrac{\ln\gamma}{\gamma} \leq \dfrac{3}{e}$ με την ισότητα μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma = e$

Επομένως η δοθείσα ανίσωση είναι αληθής μόνο όταν $\dfrac{\ln a}{\alpha} + \dfrac{\ln\beta}{\beta} + \dfrac{\ln\gamma}{\gamma} = \dfrac{3}{e}$ δηλαδή όταν

$\alpha = \beta = \gamma = e$ που αποτελούν τη λύση της ανίσωσης

ΑΣΚΗΣΗ 36.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - \ln x,\ x > 0$

A) Να λύσετε την ανίσωση $x^6 > x^5 + \ln x$, $x > 0$ (1)

B) Να λύσετε την ανίσωση $\displaystyle\int_{|x-1|}^{1} \frac{f^3(t)}{2}dt < \frac{|x-1|-1}{2}$

Λύση

A) Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$x^6 > x^5 + \ln x \Leftrightarrow x^6 - 6\ln x > x^5 - 5\ln x \Leftrightarrow x^6 - \ln x^6 > x^5 - \ln x^5 \ (2)$$

Η συνάρτηση $f(x) = x - \ln x,\ x > 0$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Η f' είναι αρνητική στο $(0,1)$, θετική στο $(1,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής θα είναι γνήσια φθίνουσα

στο $(0,1]$, γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 1$

Αν $x = 1$ η (2) αληθεύει ως ισότητα

Αν $0 < x < 1 \Leftrightarrow x^5 > x^6 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^5) < f(x^6) \Leftrightarrow x^5 - \ln x^5 < x^6 - \ln x^6$, ενώ

Αν $x>1 \Leftrightarrow x^5 < x^6 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^5\right) < f\left(x^6\right) \Leftrightarrow x^5 - \ln x^5 < x^6 - \ln x^6$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

B) $\int_{|x-1|}^{1} \frac{f^3(t)}{2} dt < \frac{|x-1|-1}{2} \Leftrightarrow \int_{|x-1|}^{1} \frac{f^3(t)}{2} dt < \frac{1}{2} \int_{1}^{|x-1|} 1\, dt \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{|x-1|}^{1} \left(f^3(t)-1\right) dt < 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Αν $|x-1|=1$ η ανίσωση είναι αδύνατη

Αν $|x-1|<1$ τότε επειδή $f(t) \geq 1 \Leftrightarrow f^3(t) \geq 1 \Rightarrow \int_{|x-1|}^{1} f^3(t) - 1 dt > 0$ και η ανίσωση είναι αδύνατη

Αν $|x-1|>1$ τότε επειδή $f(t) \geq 1 \Leftrightarrow f^3(t) \geq 1 \Rightarrow \int_{|x-1|}^{1} f^3(t) - 1 dt < 0$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι $|x-1|>1 \Leftrightarrow x-1<-1$ ή $x-1>1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 37.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to R$ με $f(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x+1}$

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) + f\left(e^x - 1\right) + f\left(\sqrt{x}\right) \leq \frac{9}{2}$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x) = \frac{e^x e^x + e - e^x e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{e}{\left(e^x+1\right)^2} > 0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και ως συνεχής στο $[0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών

$f([0,+\infty)) = \left[f(0), \lim_{x\to\infty} f(x)\right) = \left[\frac{3}{2}, 2\right)$ και παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x=0$ το $f(0) = \frac{3}{2}$

Επομένως ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{2}$ και $f\left(e^x-1\right) \geq \frac{3}{2}$ και $f\left(\sqrt{x}\right) \geq \frac{3}{2}$ με το ίσον να αληθεύει μόνο όταν $x=0$

και $e^x - 1 = 0$ και $\sqrt{x} = 0$, συνεπώς με πρόσθεση των παραπάνω ανισοτήτων κατά μέλη, ισχύει

$f(x) + f\left(e^x-1\right) + f\left(\sqrt{x}\right) \geq \frac{9}{2}$ με την ισότητα μόνο όταν $x=0$

Άρα η ανισότητα $f(x) + f\left(e^x-1\right) + f\left(\sqrt{x}\right) \leq \frac{9}{2}$ αληθεύει μόνο όταν $x=0$

ΑΣΚΗΣΗ 38.

A) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$

B) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{x}{e^x-x}+\dfrac{\ln x+x}{xe^x-\ln x-x}=\dfrac{2}{e-1}$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $(1-e)f(x)+1=(1-e)(x-e)^4$

Λύση

A) Ισχύει ότι $\ln x\le x-1<x$ οπότε $x-\ln x>0$ για κάθε $x>0$

Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο όταν $\begin{cases}x>0\\ \ln x-x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$

Και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x-\ln x)-\ln x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$

Ακόμη είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<e$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο e το $f(e)=\dfrac{1}{e-1}$

B) Για κάθε $x>0$, η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$\frac{x}{e^x-x}+\frac{\ln x+x}{xe^x-\ln x-x}<\frac{2}{e-1}\Leftrightarrow f(e^x)+f(xe^x)<\frac{2}{e-1}$$

Επειδή ισχύει $f(e^x)\le\dfrac{1}{e-1}$ και $f(xe^x)\le\dfrac{1}{e-1}$, ισχύει $f(e^x)+f(xe^x)\le\dfrac{2}{e-1}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\begin{cases}e^x=e\\ xe^x=e\end{cases}\Leftrightarrow x=1$. Επομένως λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι οι $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

- Για τη λύση της εξίσωσης $xe^x=e$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x)=xe^x$, $x>0$ που είναι γνησίως αύξουσα επειδή $\kappa'(x)=e^x+xe^x>0$. Θα έχουμε ότι $xe^x=e\Leftrightarrow\kappa(x)=\kappa(1)\Leftrightarrow x=1$

Γ) ισοδύναμα έχουμε ότι

$$(1-e)f(x)+1>(1-e)(x-e)^4\Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{1-e}<(x-e)^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)<\frac{1}{e-1}+(x-e)^4 \Leftrightarrow f(x)<f(e)+(x-e)^4 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Αν $x=e$ η (1) δεν είναι αληθής

Αν $0<x\neq e$ τότε ισχύει $\begin{cases} f(x)<f(e) \\ 0<(x-e)^2 \end{cases} \Rightarrow f(x)<f(e)+(x-e)^2$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι $0<x\neq e$

ΑΣΚΗΣΗ 39.

A) Να βρείτε τα πρόσημα των συναρτήσεων $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$ και $g(x)=\frac{x-2}{5^x},\ x\in R$

B) Να λύσετε την ανίσωση $3^x+4^x\leq 5^x+x-2$

Λύση

A) Θα βρούμε τη μονοτονία της f .

Για κάθε $x_1,x_2\in R$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} \\ \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Παρατηρούμε ότι $f(2)=0$. Συνεπώς για το πρόσημο της f έχουμε ότι:

$x<2\Rightarrow f(x)>f(2)\Rightarrow f(x)>0$ ενώ: $x>2\Rightarrow f(x)<f(2)\Rightarrow f(x)<0$

Για τη $g(x)=\frac{x-2}{5^x},\ x\in R$, επειδή $5^x>0$ έχουμε ότι: $g(2)=0$ και:

$x<2\Leftrightarrow x-2<0\Leftrightarrow g(x)<0$ ενώ:

$x>2\Leftrightarrow x-2>0\Leftrightarrow g(x)>0$

B) Ισοδύναμα έχουμε:

$$3^x+4^x\leq 5^x+x-2\Leftrightarrow \frac{3^x}{5^x}+\frac{4^x}{5^x}-1\leq\frac{x-2}{5^x}\Leftrightarrow$$

$$f(x)\leq g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\leq 0$$

Για $x=2$ ισχύει η ισότητα

Για $x<2\Rightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ -g(x)>0 \end{cases} \Rightarrow f(x)-g(x)>0$

Για $x>2\Rightarrow \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)<0 \\ -g(x)<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)-g(x)<0$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές $x\in[2,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 40.

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(1)=1$ και η συνάρτηση $g(x)=xf(x)-1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)+f(x^7)<f(x^5)+f(x^9)$

Λύση:

Α) Για κάθε $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}g(x_1)>g(x_2)\\ \dfrac{1}{x_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(x_1)+1>g(x_2)+1\\ \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\end{cases}\Rightarrow\frac{g(x_1)+1}{x_1}>\frac{g(x_2)+1}{x_2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β) Για $x=1$ η ισότητα είναι αληθής. Για κάθε $x\neq 1$ έχουμε ότι:

$$\text{Αν } 0<x<1\Rightarrow\begin{cases}x>x^5\\ x^7>x^9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)<f(x^5)\\ f(x^7)<f(x^9)\end{cases}\Rightarrow f(x)+f(x^7)<f(x^5)+f(x^9)$$

$$\text{Ενώ αν } x>1\Rightarrow\begin{cases}x<x^5\\ x^7<x^9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(x^5)\\ f(x^7)>f(x^9)\end{cases}\Rightarrow f(x)+f(x^7)>f(x^5)+f(x^9)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x\in(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 41.

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ που είναι γνησίως αύξουσα στο R. Να λύσετε την ανίσωση

$f(\ln x)+f(\ln x+1)<f(1-x)+f(2-x)$ (1)

Λύση

Το πεδίο ορισμού της ανίσωσης είναι το $(0,+\infty)$

Θα συγκρίνουμε τις παραστάσεις $\ln x$ και $1-x$ καθώς και $\ln x+1$ και $2-x$

Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει ότι $\ln x<0$ και $1-x>0$ επομένως $\ln x<1-x$

Αντίστοιχα για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει ότι $\ln x>0$ και $1-x<0$ επομένως $\ln x>1-x$

Έτσι έχουμε ότι:

Για $x=1$ ισχύει η ισότητα στη σχέση (1) και για

$$x\in(0,1)\Rightarrow\begin{cases}\ln x<1-x\\ \ln x+1<2-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(\ln x)<f(1-x)\\ f(\ln x+1)<f(2-x)\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(\ln x)+f(\ln x+1)<f(1-x)+f(2-x)$$

$$x\in(1,+\infty)\Rightarrow\begin{cases}\ln x>1-x\\ \ln x+1>2-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(\ln x)>f(1-x)\\ f(\ln x+1)>f(2-x)\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(\ln x)+f(\ln x+1)>f(1-x)+f(2-x)$$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί $x\in(0,1)$

ΑΣΚΗΣΗ 42.

Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

A) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x)+f(4^x)>f(3^x)+f(5^x)$

B) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x)+f(e^{4x})<f(e^{3x})+f(e^{6x})$

Λύση

A) Αν $x=0$ τα δύο μέλη γίνονται ίσα

Αν $x<0$ τότε:

$$x<0\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^x>1\\ \left(\frac{4}{5}\right)^x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x>3^x\\ 4^x>5^x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(2^x)>f(3^x)\\ f(4^x)>f(5^x)\end{cases}\Rightarrow f(2^x)+f(4^x)>f(3^x)+f(5^x)$$

Αν $x>0$ τότε:

$$x>0\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^x<1\\ \left(\frac{4}{5}\right)^x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x<3^x\\ 4^x<5^x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(2^x)<f(3^x)\\ f(4^x)<f(5^x)\end{cases}\Rightarrow f(2^x)+f(4^x)<f(3^x)+f(5^x)$$

Άρα λύσεις της ανίσωσης είναι x με $x\in(0,+\infty)$

B) Αν $x=0$ ισχύει $f(e^0)+f(e^{4\cdot0})=f(e^{3\cdot0})+f(e^{6\cdot0})$

Αν $x<0$ τότε:

$$x<0\Rightarrow\begin{cases}x>3x\\ 4x>6x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^x>e^{3x}\\ e^{4x}>e^{6x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(e^x)>f(e^{3x})\\ f(e^{4x})>f(e^{6x})\end{cases}\Rightarrow f(e^x)+f(e^{4x})>f(e^{3x})+f(e^{6x})$$

Αν $x>0$ τότε:

$$x>0\Rightarrow\begin{cases}x<3x\\ 4x<6x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^x<e^{3x}\\ e^{4x}<e^{6x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(e^x)<f(e^{3x})\\ f(e^{4x})<f(e^{6x})\end{cases}\Rightarrow f(e^x)+f(e^{4x})<f(e^{3x})+f(e^{6x})$$

Επομένως:οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι x με $x\in(0,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 43.

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)}+f(x)=x$ για κάθε $x\in R$

Α) Να αποδείξετε τη μονοτονία της f

Β) Να λύσετε στο R τις ανισώσεις: $f(x)>0$ και $f(x)>1$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)f(4x)+f(2x)f(3x)>f(x)f(3x)+f(2x)f(4x)$ στο R

Λύση

Α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x+x$, $x\in R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα επειδή $h'(x)=e^x+1>0$

Για την απόδειξη της μονοτονίας της f, θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ και θα έχουμε ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{f(x_1)}+f(x_1)<e^{f(x_2)}+f(x_2)\Rightarrow h(f(x_1))<h(f(x_2))\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\ .$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Β) Για $x=1$ από τη σχέση $e^{f(x)}+f(x)=x$ παίρνουμε ότι

$$e^{f(1)}+f(1)=1\Leftrightarrow e^{f(1)}+f(1)=e^0+0\Leftrightarrow h(f(1))=h(0)\Leftrightarrow f(1)=0$$

Για τη λύση της ανίσωσης έχουμε:

$$f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow x>1$$

Για $x=e+1$ από τη σχέση $e^{f(x)}+f(x)=x$ παίρνουμε ότι

$$e^{f(e+1)}+f(e+1)=e+1\Leftrightarrow h(f(e+1))=h(1)\Leftrightarrow f(e+1)=1$$

Και για τη λύση της ανίσωσης έχουμε:

$$f(x)>1\Leftrightarrow f(x)>f(e+1)\Leftrightarrow x>e+1$$

Γ) Για κάθε $x\in R$, η ανίσωση γίνεται:

$$f(x)f(4x)+f(2x)f(3x)>f(x)f(3x)+f(2x)f(4x)\Leftrightarrow$$
$$f(x)f(4x)+f(2x)f(3x)-f(x)f(3x)-f(2x)f(4x)>0\Leftrightarrow$$
$$f(x)[f(4x)-f(3x)]-f(2x)[f(4x)-f(3x)]>0\Leftrightarrow$$
$$[f(x)-f(2x)][f(4x)-f(3x)]>0\ (1)$$

Για τη λύση της τελευταίας ανίσωσης διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $x=0$ τότε η (1) δεν είναι αληθής αφού προκύπτει ότι $0>0$

Αν $x>0$ τότε:

$$x>0\Rightarrow\begin{cases}x<2x\\3x<4x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)<f(2x)\\f(3x)<f(4x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)-f(2x)<0\\f(4x)-f(3x)>0\end{cases}\Rightarrow[f(x)-f(2x)][f(4x)-f(3x)]<0$$

Αν $x<0$ τότε:

$$x<0\Rightarrow\begin{cases}x>2x\\3x>4x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(2x)\\f(3x)>f(4x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)-f(2x)>0\\f(4x)-f(3x)<0\end{cases}\Rightarrow\left[f(x)-f(2x)\right]\left[f(4x)-f(3x)\right]<0$$

Επομένως η ανίσωση είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΗ 44.

Η συνάρτηση $g:R\to R$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $g(x)+g(-x)=x$ για κάθε $x\in R$. Να λύσετε την ανίσωση $g\left(3^x+4^x\right)+g\left(-5^x\right)>x$

Λύση

Για κάθε $x\in R$, ισοδύναμα έχουμε:

$$g\left(3^x+4^x\right)+g\left(-5^x\right)>x\Leftrightarrow g\left(3^x+4^x\right)+x-g\left(5^x\right)>x\Leftrightarrow$$

$$g\left(3^x+4^x\right)>g\left(5^x\right)\Leftrightarrow 3^x+4^x>5^x\Leftrightarrow\frac{3^x+4^x}{5^x}>1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ που είναι γνησίωςφθίνουσαεπειδή για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}\\\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται $f(x)>f(2)\Leftrightarrow x>2$

ΑΣΚΗΣΗ 45.

Να λυθεί η ανίσωση $3^{\log x}+4^{\log x}+5^{\log x}>6^{\log x}$

Λύση

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$, ισοδύναμα έχουμε:

$$3^{\log x}+4^{\log x}+5^{\log x}>6^{\log x}\Leftrightarrow\frac{3^{\log x}+4^{\log x}+5^{\log x}}{6^{\log x}}>1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{6}\right)^{\log x}+\left(\frac{4}{6}\right)^{\log x}+\left(\frac{5}{6}\right)^{\log x}>1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση που είναι γνησίως φθίνουσα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{6}\right)^x+\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x$ που είναι γνησίωςφθίνουσαεπειδή για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε ότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{6}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{6}\right)^{x_2} \\ \left(\frac{4}{6}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{6}\right)^{x_2} \\ \left(\frac{5}{6}\right)^{x_1} > \left(\frac{5}{6}\right)^{x_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{6}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{6}\right)^{x_1} + \left(\frac{5}{6}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{6}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{6}\right)^{x_2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται $f(\log x) > f(3) \Leftrightarrow \log x < 3 \Leftrightarrow x \in (0,1000)$

ΑΣΚΗΣΗ 46.

Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 \ln x < e$ στο $(0,+\infty)$

Λύση

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε ότι $2x^2 \ln x < e \Leftrightarrow \ln x < \frac{e}{2x^2} \Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{2x^2} < 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{2x^2},\ x > 0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα επειδή για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ x_1^2 < x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ \frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ -\frac{1}{2x_1^2} < -\frac{1}{2x_2^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\ln x_1 - \frac{1}{2x_1^2} < \ln x_2 - \frac{1}{2x_2^2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Τότε η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$2x^2 \ln x < e \Leftrightarrow \ln x < \frac{e}{2x^2} \Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{2x^2} < 0 \Leftrightarrow f(x) < f\left(\sqrt{e}\right) \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x \in \left(0, \sqrt{e}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 47.

Να λυθεί στο R η ανίσωση $4^x - 3^x > 1$

Λύση

Ισοδύναμα έχουμε ότι $4^x - 3^x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x - 1 - \frac{1}{3^x} > 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{4}{3}\right)^x-1-\frac{1}{3^x}$, $x\in R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ θα είναι:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{4}{3}\right)^{x_1}<\left(\frac{4}{3}\right)^{x_2}\\ 3^{x_1}<3^{x_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{4}{3}\right)^{x_1}<\left(\frac{4}{3}\right)^{x_2}\\ \frac{1}{3^{x_1}}>\frac{1}{3^{x_2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{4}{3}\right)^{x_1}<\left(\frac{4}{3}\right)^{x_2}\\ -\frac{1}{3^{x_1}}<-\frac{1}{3^{x_2}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x_1}-\frac{1}{3^{x_1}}<\left(\frac{4}{3}\right)^{x_2}-\frac{1}{3^{x_2}}\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{x_1}-1-\frac{9}{3^{x_1}}<\left(\frac{4}{3}\right)^{x_2}-1-\frac{9}{3^{x_2}}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Για την ανίσωση έχουμε ότι:

$$4^x-3^x>1\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^x-1-\frac{1}{3^x}>0\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow x>1$$

Που είναι η λύσεις της ανίσωσης

3

Ανισώσεις με αντίστροφη συνάρτηση

Μορφή: $f(x)<f^{-1}(x)$ με f γνήσια αύξουσα

Μια σκέψη να εργαστούμε είναι η παρακάτω:

$$f(x)<f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(f(x))<x\Leftrightarrow f(f(x))+f(x)<f(x)+x\Leftrightarrow F(f(x))<F(x)\Leftrightarrow f(x)<x$$

Μορφή: $f^{-1}(x)<\alpha\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x<f(\alpha)\ldots$κλπ

ΑΣΚΗΣΗ 48.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln(x-1)+x$, $x\in(1,+\infty)$

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x+1)-1>f^{-1}(e^2+3)$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x$

Λύση

Α) Επειδή για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε $f'(x)=\frac{1}{x-1}+1>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη.

Επίσης $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ln(x-1)+x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(ln(x-1)+x)=+\infty$

Η f ως συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$, έχει σύνολο τιμών το

$\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=R$ που είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Β) Θα υπολογίσουμε το $f^{-1}(e^2+3)$ για αυτό έχουμε

$$f^{-1}(e^2+3)=a\Leftrightarrow e^2+3=f(a)\Leftrightarrow f(e^2+1)=f(a)\Leftrightarrow a=e^2+1$$

Άρα $f^{-1}(e^2+3)=e^2+1$, και για κάθε $x\in R$ η ανίσωση γίνεται

$$f^{-1}(x+1)-1>f^{-1}(e^2+3)\Leftrightarrow f^{-1}(x+1)-1>e^2+1\Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(x+1)>e^2+2\Leftrightarrow x+1>f(e^2+2)\Leftrightarrow$$

$$x+1>\ln(e^2+2-1)+e^2+2\Leftrightarrow x>\ln(e^2+1)+e^2+1$$

Γ) Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε ότι

$$f^{-1}(x)>x\Leftrightarrow f(f^{-1}(x))>f(x)\Leftrightarrow x>f(x)\Leftrightarrow$$

$$x>ln(x-1)+x\Leftrightarrow ln(x-1)<0\Leftrightarrow ln(x-1)<\ln 1\Leftrightarrow x<2 \text{ άρα } x\in(1,2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 49.

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{3x+2}>\dfrac{x^3-2}{3}$ στο $(0,+\infty)$ (1)

Λύση

Από τη μορφή της ανίσωσης παρατηρούμε ότι τα δύο μέλη της είναι συναρτήσεις αντίστροφες.

Πράγματι. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-2}{3}$, $x\in(0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη .

Για την εύρεση της αντίστροφης θέτουμε $\begin{cases}y=\dfrac{x^3-2}{3}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y+2=x^3\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt[3]{3y+2}\\ x>0\\ 3y+2>0\end{cases}$

Επομένως $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{3x+2},\ x>-\dfrac{2}{3}$, και η ανίσωση για κάθε $x\in(0,+\infty)$ γίνεται

$$\sqrt[3]{3x+2}>\frac{x^3-2}{3}\Leftrightarrow f(x)>f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(f(x))>x\Leftrightarrow f(f(x))+f(x)>f(x)+x \qquad (2)$$

Η συνάρτηση $h(x)=f(x)+x=\dfrac{x^3-2}{3}+x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R επομένως η

$$(2)\Leftrightarrow h(f(x))>h(x)\Leftrightarrow f(x)>x\Leftrightarrow\frac{x^3-2}{3}>x\Leftrightarrow x^3-3x-2>0\Leftrightarrow$$

$$x^3-x-2x-2>0\Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x+1)>0\Leftrightarrow(x+1)^2(x-2)>0\Leftrightarrow x>2$$

Που είναι οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης

ΑΣΚΗΣΗ 50.

Έστω συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1,\ \ x\in R$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο R

B) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+f\left(e^x-x-1\right)\le 0$

Λύση

A) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R επειδή $f'(x)=e^x+1>0,\ \ x\in R$.

Επίσης η f είναι συνεχής με $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ επομένως έχει σύνολο τιμών το R.

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη της έχει πεδίο ορισμού το R.

Για τη μονοτονία της f^{-1}, θεωρούμε οποιαδήποτε $y_1,y_2\in R$ με $y_1<y_2$ και θα έχουμε ότι:

υπάρχουν $x_1,x_2\in R$ ώστε $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ και θα ισχύει ότι:

$$y_1<y_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow x_1<x_2\Rightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$$

επομένως η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο R

B) Θεωρούμε τησυνάρτηση $h(x)=f^{-1}(x)+f(x),x\in R$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

(απόδειξη εύκολη με τον ορισμό).

Επειδή $f(0)=0$ θα είναι και $f^{-1}(0)=0$ οπότε η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+f\left(e^x-x-1\right)\le 0\Leftrightarrow h\left(e^x-x-1\right)\le h(0)\Leftrightarrow e^x-x-1\le 0$$

Η τελευταία ανίσωση είναι αληθής μόνο στο μηδέν επειδή από την ανισότητα

$\ln t\le t-1$ για $t=e^x$ παίρνουμε ότι $e^x-x-1\ge 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $x=0$

Άρα λύση της δοθείσας ανίσωσης είναι η $x=0$

Σημείωση:

Η ανίσωση $f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+f\left(e^x-x-1\right)\le 0$ θα μπορούσε να δοθεί σε διαφορετική μορφή όπως π.χ.

$e^{x+1}f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+e^{(e^x)}\le\left(2+x-e^x\right)e^{x+1}$ η οποία με απλούς μετασχηματισμούς έρχεται στη μορφή

$f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+f\left(e^x-x-1\right)\le 0$ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$e^{x+1}f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+e^{(e^x)}\le\left(2+x-e^x\right)e^{x+1}\Leftrightarrow f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+e^{(e^x)}e^{-x-1}\le 2+x-e^x\Leftrightarrow$$

$$f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+e^{(e^x-x-1)}+e^x-x-1-1\le 0\Leftrightarrow$$

$$f^{-1}\left(e^x-x-1\right)+f\left(e^x-x-1\right)\le 0$$

4 Στην περίπτωση που έχουμε εξίσωση με ολοκληρώματα $\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t)dt < 0$, θεωρούμε ότι F είναι μια αρχική της f τότε $\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t)dt < 0 \Leftrightarrow F(g(x)) - F(\varphi(x)) < 0$ και ακολουθούμε τα προηγούμενα βήματα

Χρήσιμη επίσης είναι η ισοδυναμία $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) = 0, x \in [\alpha,\beta] \ \ \acute{\eta} \ \ \alpha = \beta\right)$ η οποία χρειάζεται να αποδειχτεί πριν χρησιμοποιηθεί

ΑΣΚΗΣΗ 51.

Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 + xe^x\right) - \frac{x}{2}$, $x \in [0,1]$. Να λύσετε την ανίσωση

$$\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{12} + \int_0^1 f^2(x)dx \ (1)$$

Λύση

Η (1) ισοδύναμα γίνεται

$$\frac{1}{12} + \int_0^1 f^2(x) - xf(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{12} + \int_0^1 \left(f^2(x) - 2\frac{x}{2}f(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{12} + \int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{4}dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx \leq 0$$

Επειδή είναι $\left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$ θα ισχύει ότι $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx \geq 0$ συνεπώς θα είναι

$$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1 + xe^x\right) - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + xe^x\right) - x = 0 \ (2).$$

Η (2) έχει προφανή ρίζα το μηδέν.

Έστω ότι (2) δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 μία από τις οποίες είναι το μηδέν

Στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ για τη συνάρτηση $F(x) = \ln\left(1 + xe^x\right) - x$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θ.

Rolle, οπότε θα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^\xi + \xi e^\xi}{1 + \xi e^\xi} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{e^\xi + \xi e^\xi - 1 - \xi e^\xi}{1 + \xi e^\xi} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^\xi - 1 - \xi e^\xi}{1 + \xi e^\xi} = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$$

Που είναι άτοπο επειδή το ξ ανήκει σε ανοικτό διάστημα με άκρο το μηδέν.

Επομένως μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι το μηδέν.

ΑΣΚΗΣΗ 52.

Να λύσετε την ανίσωση $\int_{e^x+1}^{x^2+2} \frac{\ln t}{e^t+1} dt > 0$

Λύση

Έστω F μια παράγουσα της $y = \frac{\ln t}{e^t+1}$.

Τότε $F'(t) = \frac{\ln t}{e^t+1}$ με $F'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln t}{e^t+1} > 0 \Leftrightarrow t > 1$ και η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Επειδή για κάθε $x \in R$ είναι $x^2+2 > 1$ και $e^x+1 > 1$ θα έχουμε

$$\int_{e^x+1}^{x^2+2} \frac{\ln t}{e^t+1} dt > 0 \Leftrightarrow F(x^2+2) > F(e^x+1) \Leftrightarrow x^2+2 > e^x+1 \Leftrightarrow (x^2+1)e^{-x} > 1$$

Αν $h(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$ τότε $h'(x) = \left[(x^2+1)e^{-x}\right]' = 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x}$

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο R και θα έχουμε ότι

$$(x^2+1)e^{-x} > 1 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow x < 0$$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης $\int_{e^x+1}^{x^2+2} \frac{\ln t}{e^t+1} dt > 0$ είναι οι $x \in (-\infty, 0)$

ΑΣΚΗΣΗ 53.

Να λύσετε την ανίσωση $\int_1^{x^2+1} e^{t^2}+1 dt - \int_1^2 e^{t^2}+1 dt < x^2-1$, $x \in R$

Λύση

Έστω F αρχική της $y = e^{t^2}+1$ στο R τότε έχουμε ότι

$$\int_1^{x^2+1} e^{t^2}+1 dt - \int_1^2 e^{t^2}+1 dt < x^2-1 \Leftrightarrow \int_1^{x^2+1} e^{t^2}+1 dt - x^2 < \int_1^2 e^{t^2}+1 dt - 1 \Leftrightarrow$$

$$F(x^2+1) - F(1) - x^2 < F(2) - F(1) - 1 \Leftrightarrow F(x^2+1) - x^2 < F(2) - 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = F(x) - x$, $x \in R$ με $H'(x) = e^{x^2}+1-1 = e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in R$.

Η συνάρτηση H είναι γνησίως αύξουσα επομένως η ανίσωση γίνεται:

$F(x^2+1) - x^2 < F(2) - 1 \Leftrightarrow H(x^2) < H(1) \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

ΑΣΚΗΣΗ 54.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ να λύσετε την ανίσωση

$$\int_x^{x^2} f(t)dt < 0$$

Λύση

Έστω F αρχική της f στο R .

Τότε $F'(x) = f(x) > 0$ συνεπώς η F είναι γνησίως αύξουσα και έχουμε:

$$\int_x^{x^2} f(t)dt < 0 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) < 0 \Leftrightarrow F(x^2) < F(x) \Leftrightarrow x^2 < x \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 55.

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in R$

A)* Να λύσετε την ανίσωση $\int_{e^x}^{e^x+1} f(t)dt < \int_{1-x}^{2-x} f(t)dt$

B) Να λυθεί η ανίσωση $f(e^x) + f(x-1) \geq f(x+1) + f(\ln x)$, $x \in (0,+\infty)$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = x + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο R και γνησίως αύξουσα αφού είναι

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0, \ x \in R$$

A) Για τη λύση της ανίσωσης $\int_{e^x}^{e^x+1} f(t)dt < \int_{1-x}^{2-x} f(t)dt$, θεωρούμε τη συνάρτηση F , αρχική της f στο R και η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$F(e^x+1) - F(e^x) < F(2-x) - F(1-x) \ (2)$$

Έστω $H(x) = F(x+1) - F(x)$ με $H'(x) = f(x+1) - f(x) > 0$. Τότε

$$(2) \Leftrightarrow H(e^x) < H(1-x) \Leftrightarrow e^x < 1-x \Leftrightarrow e^x + x < 1$$

Όμως η συνάρτηση $h(x) = e^x + x$ είναι γνησίως αύξουσα, επειδή $h'(x) = e^x + 1 > 0$ επομένως έχουμε $e^x + x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow x < 0$

B) Η ταυτότητα $\ln t \leq t-1$, $t > 0$ για $t = e^x > 0$, $x \in R$ δίνει

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} e^x \geq x+1 \\ x-1 \geq \ln x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f\left(e^x\right) \geq f\left(x+1\right) \\ f\left(x-1\right) \geq f\left(\ln x\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f\left(e^x\right)+f\left(x-1\right) \geq f\left(x+1\right)+f\left(\ln x\right)$$

Επομένως η ανίσωση

$$f\left(e^x\right)+f\left(x-1\right) \geq f\left(x+1\right)+f\left(\ln x\right)$$

είναι αληθής για κάθε $x > 0$

ΑΣΚΗΣΗ 56.

Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής γνησίως αύξουσα στο R και παίρνει μόνο θετικές τιμές. Να λύσετε την ανίσωση $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{4x} f(t)dt < \int_0^{3x} f(t)dt + \int_0^{6x} f(t)dt$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ που είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x) > 0$, συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως:

Αν $x = 0$ ισχύει ότι: $\int_0^0 f(t)dt + \int_0^{4\cdot 0} f(t)dt = \int_0^{3\cdot 0} f(t)dt + \int_0^{6\cdot 0} f(t)dt$

Αν $x < 0$ τότε:

$$x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 3x \\ 4x > 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) > F(3x) \\ F(4x) > F(6x) \end{cases} \Rightarrow F(x)+F(4x) > F(3x)+F(6x)$$

Αν $x > 0$ τότε:

$$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 3x \\ 4x < 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) < F(3x) \\ F(4x) < F(6x) \end{cases} \Rightarrow F(x)+F(4x) < F(3x)+F(6x)$$

Επομένως: οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι x με $x \in (0,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 57.

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x + \ln\left(e^x + 1\right)$

A) Να λύσετε την εξίσωση $\int_3^{2f'(x)} f^2(t)\,dt = 0$

B)* Να λύσετε την εξίσωση $e^{f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)} = e^2 + e$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(e^x+1\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο R και γνησίως αύξουσα αφού είναι

$$f'(x)=1+\frac{e^x}{e^x+1}>0,\ x\in R$$

Α) Θεωρούμε τη συνάρτηση F , αρχική της f^2 με $F'(x)=f^2(x)>0$, συνεπώς η F είναι γνησίως αύξουσα , οπότε ισοδύναμα έχουμε

$$\int_3^{2f'(x)} f^2(t)\,dt=0 \Leftrightarrow F\left(2f'(x)\right)=F(3) \Leftrightarrow 2f'(x)=3 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow f'(x)=f'(0) \Leftrightarrow x=0$$

Αφού η $f'(x)=1+\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in R$ είναι γνησίως φθίνουσα επειδή $f''(x)<0$

Β) Ισοδύναμα έχουμε:

$$e^{f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)}=e^2+e \Leftrightarrow \ln e^{f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)}=\ln\left(e^2+e\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)=1+\ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)=f(1) \Leftrightarrow \frac{2}{3}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow f'(x)=f'(0) \Leftrightarrow x=0$$

5 Δίνεται ανισότητα - να λυθεί ανίσωση

Εφόσον περιέχεται παράγωγος στην ανισότητα, συνήθως τη μετασχηματίζουμε σε μονοτονία και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον ορισμό της μονοτονίας …κλπ όπως στο παράδειγμα.

ΑΣΚΗΣΗ 58.

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στο R με $f(0)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)<f(x)$ για κάθε $x\in R$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>e^x$.

Λύση:

$$f'(x)<f(x) \Leftrightarrow f'(x)-f(x)<0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)<0 \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'<0$$

Συνεπώς η συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα επομένως έχουμε:

$x<0 \Rightarrow h(x)>h(0) \Rightarrow e^{-x}f(x)>1 \Rightarrow f(x)>e^x$

$x>0 \Rightarrow h(x)<h(0) \Rightarrow e^{-x}f(x)<1 \Rightarrow f(x)<e^x$

$x=0 \Rightarrow f(x)=e^x$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι $x<0$

Επιμέλεια: Μ. Παπαγρηγοράκης

έκκεντρον

2 *Οι ανισώσεις στις Πανελλαδικές εξετάσεις*

Άσκηση 1. 2010

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνήσια αύξουσα στο R. Να λύσετε στο R την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_{6}^{4} f(t)dt<0 \quad (1)$

ΛΥΣΗ

Αν F είναι αρχική της f τότε

$$(1)\Leftrightarrow \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt<\int_{4}^{6} f(t)dt \Leftrightarrow F\left(x^2+2x+3\right)-F\left(x^2+2x+1\right)<F(6)-F(4) \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{H}(x)=F(x+2)-F(x)$ που είναι γνήσια αύξουσα επειδή

$\mathrm{H}'(x)=f(x+2)-f(x)>0$,

Τότε: $(2)\Leftrightarrow H(x^2+2x+1)<H(4)\Leftrightarrow x^2+2x+1<4\Leftrightarrow$

$$x^2+2x-3<0\Leftrightarrow x\in(1,3)$$

Άσκηση 2. 2013

Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R. Να λύσετε την ανίσωση στο R

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \qquad (1)$$

Λύση

Αν F είναι αρχική της f τότε

$$(1)\Leftrightarrow F\left(8x^2+6\right)-F\left(8x^2+5\right)>F\left(2x^4+6\right)-F\left(2x^4+5\right) \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{H}(x)=F(x+1)-F(x)$ με $\mathrm{H}'(x)=f(x+1)-f(x)>0$

Τότε: $(2)\Leftrightarrow H(8x^2+5)>H(2x^4+5)\Leftrightarrow 8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^4-8x^2<0\Leftrightarrow 2x^2(x^2-4)<0\underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x^2-4<0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<2\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$$

Άσκηση 3. 2013

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x\in R$. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $f\left(5(x^2+1)^3-8\right)\le f\left(8(x^2+1)^2\right)$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3 2x}{x^2+1}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{x^2+1}=\frac{x^4+3x^2}{x^2+1}=\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{x^2+1}\geq 0$$

Η f είναι γνήσια αύξουσα στο R, επειδή είναι συνεχής στο R και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$f\left(5(x^2+1)^3-8\right)\leq f\left(8(x^2+1)^2\right)\Leftrightarrow 5(x^2+1)^3-8\leq 8(x^2+1)^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2+1}\leq\frac{8}{5}\Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)\leq f(2)\Leftrightarrow x^2+1\leq 2\Leftrightarrow x^2\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$$

Άσκηση 4. 2014

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$, $x\in R$. Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}$, $x\in R$

Λύση

Η $h(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R,

με $h'(x)=\frac{1}{e^x+1}$ και $h''(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$ για κάθε $x\in R$,

οπότε στρέφει τα κοίλα κάτω (είναι κοίλη).

Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα για κάθε $x\in R$

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow \ln\left(e^{h(2h'(x))}\right)<1-\ln(e+1)$$
$$\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)$$

Αφού η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R (έχει παράγωγο θετική), θα είναι

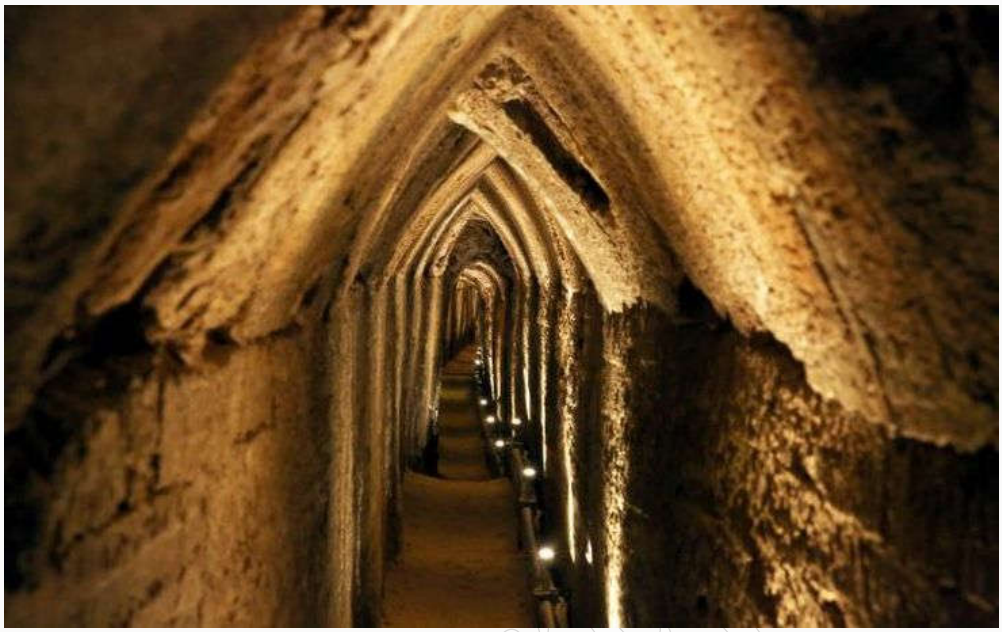
$$2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)\Leftrightarrow x>0$$

Αφού η $h'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Επιμέλεια: Μ. Παπαγρηγοράκης

3 Το Ευπαλίνειο Όρυγμα της Σάμου - ένα αξεπέραστο θαύμα της μηχανικής

Φτιάχτηκε τον 6ο π.Χ. αιώνα, είχε μήκος 1,03 χλμ. και ξεκινούσε από δύο αντίθετες πλευρές, που συναντήθηκαν χωρίς καμία απόκλιση



Έχετε σταθεί ποτέ μπροστά σε κάποιο ανθρώπινο δημιούργημα και να αναρωτιέστε «πώς είναι δυνατόν να το έφτιαξαν τόσο τέλειο»; Και δεν μιλάμε για κάποιο σύγχρονο αλλά για κάποιο που δημιουργήθηκε αιώνες πριν.

Μια τέτοια περίπτωση είναι το Ευπαλίνειο Όρυγμα της Σάμου. Ένα αξεπέραστο θαύμα της μηχανικής και της τοπογραφίας το οποίο δημιουργήθηκε τον 6ο αιώνα π.Χ. και ακόμα και σήμερα προκαλεί τον θαυμασμό τόσο για το σχεδιασμό του όσο και για την αρτιότητα της εκτέλεσης του έργου.

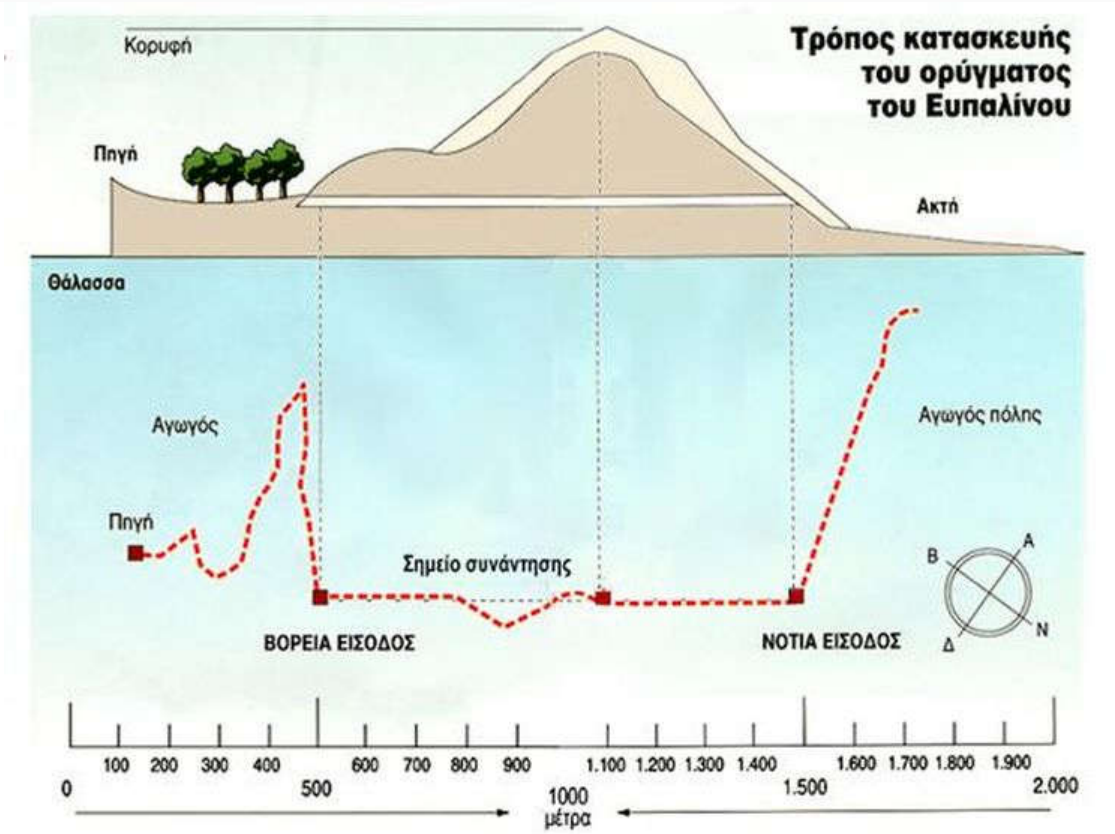
Δεν είναι τυχαίο, άλλωστε, πως τον Ιούνιο του 2015, η Διεθνής Ένωση Σηράγγων (ITA – AITES) ανακήρυξε το Ευπαλίνειο Όρυγμα της Σάμου ως «Παγκόσμιο Σηραγγολογικό Τοπόσημο» (International Tunneling Landmark). Μιλάμε για ένα έργο που ήδη από το 1992 έχει περιληφθεί στον κατάλογο των μνημείων παγκόσμιας πολιτιστικής κληρονομιάς της UNESCO.

Η σύλληψη μιας ιδέας… ανεφάρμοστης

Ας κάνουμε μια βουτιά μέσα στον χρόνο και ας μεταφερθούμε στον 6ο αιώνα π.Χ. (γύρω στα 550). Τότε που ο αρχιτέκτονας Ευπαλίνος από τα Μέγαρα ξεκίνησε την δημιουργία ενός «αμφίστομου ορύγματος» -όπως χαρακτηριστικά το αναφέρει ο Ηρόδοτος- το οποίο θα «έδινε» νερό, με ασφάλεια και υψηλές προδιαγραφές υγιεινής στην αρχαία πόλη της Σάμου, δηλαδή το σημερινό Πυθαγόρειο.

Αυτό βέβαια ήταν μια εξαιρετική ιδέα αλλά για τα δεδομένα της εποχής μάλλον… ανεφάρμοστη. Ο Ευπαλίνος, ωστόσο, είχε έτοιμο ένα σχέδιο που θα τον τοποθετούσε με χρυσά γράμματα ανάμεσα στους σπουδαίους της αρχαίας Ελλάδας.

Το έργο που οραματίστηκε ήταν τρομερά σύνθετο τεχνικά καθώς εκτός από αυτό κάθε αυτό το όρυγμα θα περιλάμβανε μια δεξαμενή, έναν προσαγωγό και έναν υπόγειο αστικό αγωγό. Η αφετηρία του θα βρισκόταν σε μια φυσική πηγή κοντά στη σημερινή περιοχή των Αγιάδων.


Τρόπος κατασκευής του ορύγματος του Ευπαλίνου
Κορυφή
Πηγή
Ακτή
Θάλασσα
Αγωγός
Αγωγός πόλης
Πηγή
Σημείο συνάντησης
ΒΟΡΕΙΑ ΕΙΣΟΔΟΣ
ΝΟΤΙΑ ΕΙΣΟΔΟΣ
A
B
Γ
N
100 200 300 400 500 600 700 800 900 1.100 1.200 1.300 1.400 1.500 1.600 1.700 1.800 1.900 2.000
0
1000
μέτρα

Topographische Skizze
der Stadt
SAMOS
Ernst Fabricius 1884.
TIGANI

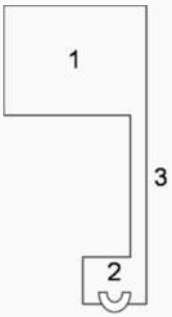
Την εντολή για την δημιουργία αυτού του έργου την είχε δώσει στον Ευπαλίνο, ο τύραννος της Σάμου, Πολυκράτης, ο οποίος ήθελε το υδραγωγείο να είναι υπόγειο για να μην είναι ορατό από τυχόν εισβολείς που θα έκοβαν την παροχή νερού στην πόλη σε περίπτωση πολιορκίας...

Με βάση θα μέσα τα οποία είχε στη διάθεση του ο Ευπαλίνος αυτό ήταν ένα έργο που δεν θα μπορούσε να γίνει. Ο σπουδαίος μηχανικός, ωστόσο, με απλά όργανα μέτρησης αλλά και πολύπλοκους μαθηματικούς υπολογισμούς, αποφάσισε την ταυτόχρονη διάνοιξη μιας σήραγγας και από τις δυο πλαγιές του βουνού!

«Αμφίστομον όρυγμα» το αναφέρει ο πολυταξιδεμένος Ηρόδοτος, που εντυπωσιάστηκε βλέποντάς το. «Ανέφερα πολλά δε για τους Σαμίους, γιατί έχουν κάνει τρία από τα μεγαλύτερα έργα από όλους τους Έλληνες. Σε όρος με ύψος εκατόν πενήντα οργιές, έφτιαξαν υπόγειο όρυγμα που το είχαν αρχίσει ταυτόχρονα από δυο πλευρές. Το μεν μήκος του ορύγματος είναι επτά στάδια, το δε ύψος και πλάτος είναι οκτώ πόδια το καθένα. Καθ' όλο το μήκος του δε, έχει ανοιχτεί ένα άλλο όρυγμα, σε βάθος είκοσι πήχεων, με πλάτος τριών ποδιών, μέσα από το οποίο το νερό διοχετεύεται μέσα από σωλήνες από μεγάλη πηγή μέχρι την πόλη. Ο αρχιτέκτονας δε του ορύγματος αυτού ήταν ο Ευπαλίνος, γιος του Ναυστρόφου από τα Μέγαρα», αναφέρει, σε ελεύθερη μετάφραση, ο αρχαίος Έλληνας ιστορικός.

Ιστορικά στοιχεία

Τομή που δείχνει τις δυο σήραγγες (1)-η κύρια σήραγγα, (2)-η μικρότερη για τον αγωγό του νερού και (3) κάθετο όρυγμα πρόσβασης



Η κατασκευή του ορύγματος έγινε με εντολή του τυράννου Πολυκράτη και εκτιμάται ότι η κατασκευή του κράτησε 10 χρόνια. Ο σχεδιαστής και μηχανικός του έργου ήταν ο Ευπαλίνος, γιος του Ναυστρόφου από τα Μέγαρα. Το άνοιγμα της σήραγγας είναι περίπου 1.80x1.80 μ. και το μήκος της 1036 μέτρα. Μερικά μέτρα κάτω από την κύρια σήραγγα έχει σκαφτεί μια μικρότερη, από την οποία περνούσε το νερό.

Εκτιμάται ότι ο σκοπός του ορύγματος ήταν όχι μόνο να μεταφερθεί νερό από την πηγή πίσω από το βουνό προς στην πρωτεύουσα της Σάμου (το σημερινό Πυθαγόρειο), αλλά αυτό να γίνει με τρόπο που δεν ήταν ανιχνεύσιμος από επιδρομείς, οι οποίοι θα μπορούσαν εύκολα, αν έβλεπαν τον επιφανειακό αγωγό, να τον καταστρέψουν και να στερήσουν την πόλη από τον βασικότερο πόρο της. Από το όρυγμα λοιπόν το νερό οδηγούνταν μέσα από το τείχος της πόλης.

Ο λόγος για τον οποίο υπάρχουν δυο παράλληλες σήραγγες, είναι ότι κατά το χρόνο σχεδιασμού και υλοποίησης του έργου η πηγή βρισκόταν σε ορισμένο ύψος (υψηλότερο από το επίπεδο της στοάς), αλλά μετά την κατασκευή της κύριας στοάς, η πηγή άρχισε να αναβλύζει χαμηλότερα, συνεπώς δε μπορούσε πλέον με φυσική ροή να οδηγηθεί στη στοά αυτή. Για το λόγο αυτό έγινε αναγκαία η διάνοιξη μιας βοηθητικής, μικρότερης σήραγγας, σε χαμηλότερο επίπεδο. Η μικρότερη σήραγγα διανοίχτηκε μέσα από την κύρια στοά, με τη βοήθεια κάθετων ορυγμάτων.

Ο Ηρόδοτος, η μοναδική πηγή που έχουμε για το Ευπαλίνειο όρυγμα, περιγράφει και την κύρια αλλά και τη βοηθητική σήραγγα.

Το κείμενο του Ηροδότου

Η μοναδική αναφορά στο Ευπαλίνειο όρυγμα είναι αυτή του Ηροδότου (Γ,60):

Ἐμήκυνα δὲ περὶ Σαμίων μᾶλλον, ὅτι σφι τρία ἐστὶ μέγιστα ἁπάντων Ἑλλήνων ἐξεργασμένα, ὄρεός τε ὑψηλοῦ ἐς πεντήκοντα καὶ ἑκατὸν ὀργυιάς, τούτου ὄρυγμα κάτωθεν ἀρξάμενον, ἀμφίστομον. [2] τὸ μὲν μῆκος τοῦ ὀρύγματος ἑπτὰ στάδιοι εἰσί, τὸ δὲ ὕψος καὶ εὖρος ὀκτὼ ἑκάτερον πόδες. διὰ παντὸς δὲ αὐτοῦ ἄλλο ὄρυγμα εἰκοσίπηχυ βάθος ὀρώρυκται, τρίπουν δὲ τὸ εὖρος, δι᾽ οὗ τὸ ὕδωρ ὀχετευόμενον διὰ τῶν σωλήνων παραγίνεται ἐς τὴν πόλιν ἀγόμενον ἀπὸ μεγάλης πηγῆς. [3] ἀρχιτέκτων δὲ τοῦ ὀρύγματος τούτου ἐγένετο Μεγαρεὺς Εὐπαλῖνος Ναυστρόφου.

Σε ελεύθερη μετάφραση:

Ανέφερα πολλά δε για τους Σαμίους, γιατί έχουν κάνει τρία από τα μεγαλύτερα έργα από όλους τους Έλληνες. Σε όρος με ύψος εκατόν πενήντα οργιές, έφτιαξαν υπόγειο όρυγμα που το είχαν αρχίσει ταυτόχρονα από δυο πλευρές. Το μεν μήκος του ορύγματος είναι επτά στάδια, το δε ύψος και πλάτος είναι οκτώ πόδια το καθένα. Καθ' όλο το μήκος του δε, έχει ανοιχτεί ένα άλλο όρυγμα, σε βάθος είκοσι πήχεων, με πλάτος τριών ποδιών, μέσα από το οποίο το νερό διοχετεύεται μέσα από σωλήνες από

μεγάλη πηγή μέχρι την πόλη. Ο αρχιτέκτονας δε του ορύγματος αυτού ήταν ο Ευπαλίνος, γιος του Ναυστρόφου από τα Μέγαρα.

Σύγκριση μεγεθών που αναφέρει ο Ηρόδοτος:

- Όρος με ύψος 150 οργιές. Το όρος αυτό έχει ύψος περίπου 225 μέτρα.
- Υπολογιζόμενο μήκος της οργιάς σε μέτρα 1,50 μέτρα
- Μήκος του ορύγματος: 7 στάδια. Το μήκος του είναι 1036 μέτρα.
- Το κάθε στάδιο είχε 100 οργιές. Το μέγεθος που αναφέρεται από τον Ηρόδοτο, 7 στάδια, αντιστοιχεί σε 700 οργιές, δηλαδή με βάση το υπολογιζόμενο μήκος οργιάς (1,5 μέτρο), το μήκος του ορύγματος υπολογίζεται σε 1050 μέτρα.
- Ύψος και πλάτος 8 πόδια. Το ύψος και πλάτος του είναι περίπου 1,8 μέτρα κατά μέσο όρο.
- Η κάθε οργιά είχε 6 πόδια. Με βάση το υπολογιζόμενο μήκος οργιάς (1,5 μέτρο) το κάθε πόδι ήταν 0,25 μέτρα, και το ύψος και πλάτος του ορύγματος υπολογίζεται σε 2 μέτρα

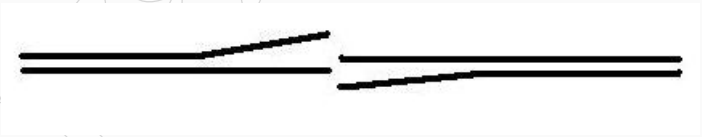
Οι τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Ευπαλίνος

Ο Ευπαλίνος χρησιμοποίησε έξυπνες τεχνικές για να σιγουρευτεί ότι οι δυο σήραγγες θα ενωνόντουσαν ακόμη και αν υπήρχαν λάθη στις μετρήσεις του.

Σχηματικά:

Στο οριζόντιο επίπεδο:

Στο κατακόρυφο επίπεδο:



Η δημιουργία ενός θαύματος

Με αυτά και με αυτά, δύο συνεργεία, λαξεύοντας με σφυριά και καλέμια τον βράχο, τον σκληρό ασβεστόλιθο, ξεκινούν το μακρύ «ταξίδι» στο τέλος του οποίου θα συναντιόντουσαν στη μέση της διαδρομής.

Πριν ξεκινήσει το σκάψιμο, ωστόσο, ο Ευπαλίνος δίνει εντολή να χαραχτεί η διαδρομή του ορύγματος στην επιφάνεια του εδάφους ώστε να μπορεί παρακολουθεί την πρόοδο του έργου. Όταν έγινε και αυτό, ξεκίνησε το άνοιγμα της σήραγγας που είχε διαστάσεις 1.80μ. ύψος και 1.80μ. πλάτος.

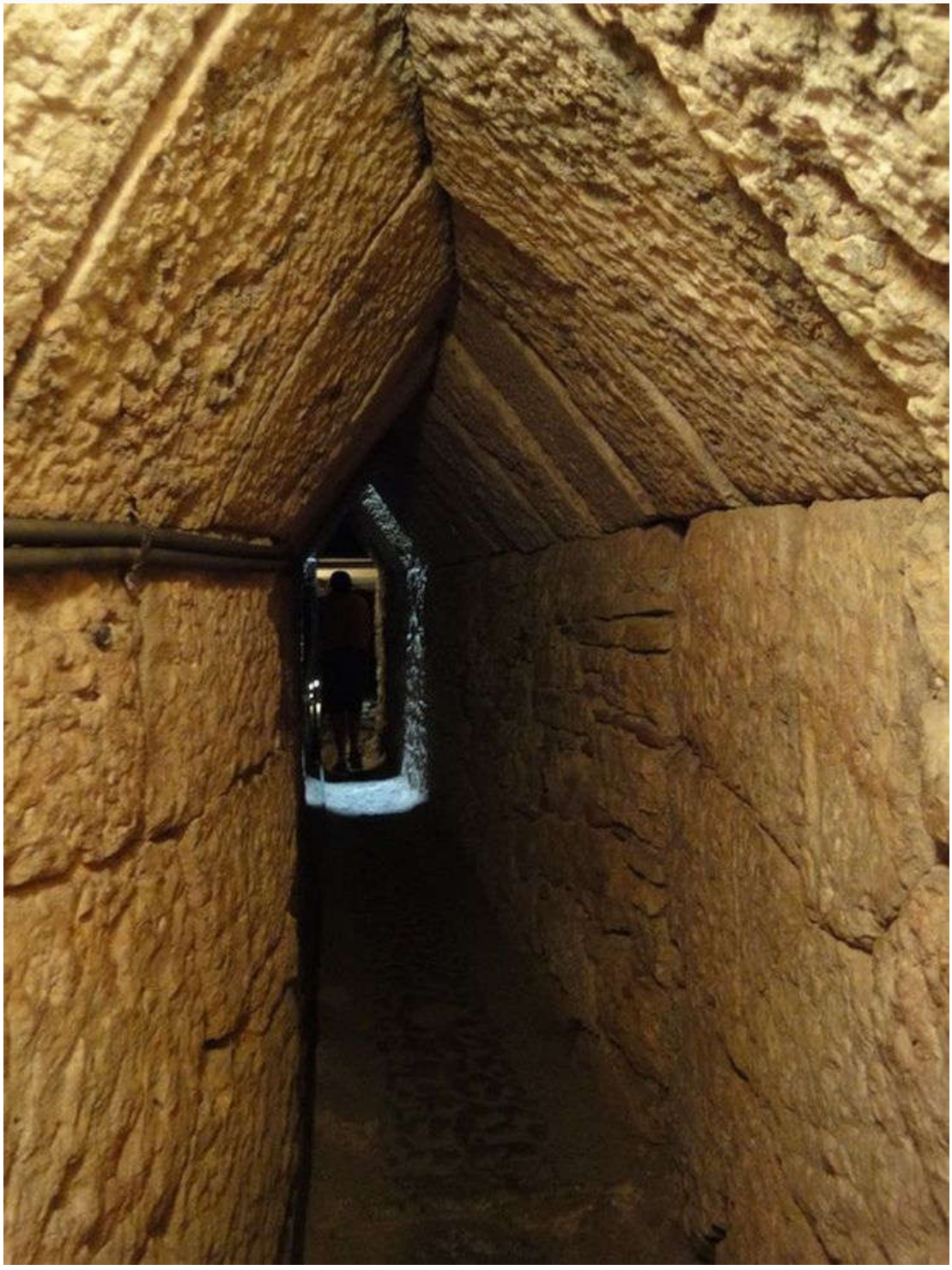
Πλάι σε αυτό που θα λέγαμε κεντρικό διάδρομο κατασκευάστηκε μια τάφρος, σε βάθος 70 πόντων, προκειμένου να περνάει το νερό, μέσα από κεραμικούς σωλήνες που τοποθετήθηκαν με σχολαστικότητα, αφού αυτοί θα υδροδοτούσαν την πόλη.

Η μικρότερη αυτή σήραγγα δεν φτιάχτηκε τυχαία. Η ύπαρξή της κρίθηκε αναγκαία καθώς όταν ολοκληρώθηκε το έργο, η πηγή στις Αγιάδες βρέθηκε σε χαμηλότερο επίπεδο από τη σήραγγα. Έτσι ο Ευπαλίνος έδωσε μια ελαφρά κλίση και εξασφάλισε την απρόσκοπτη ροή του νερού μέσα στη στοά προς το Πυθαγόρειο.

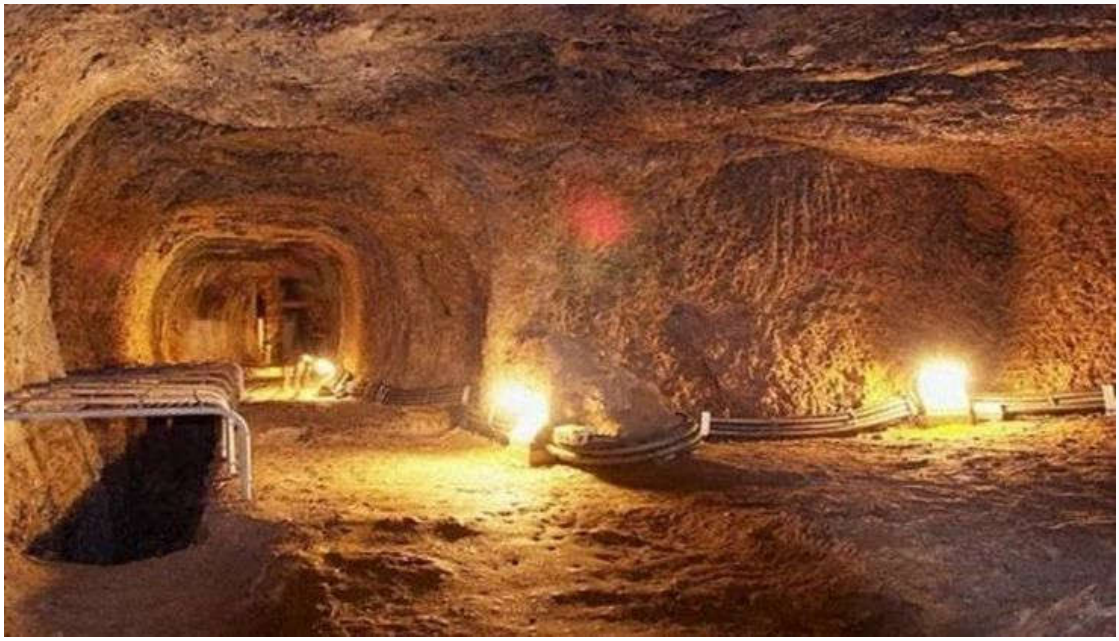
Όπως είναι απόλυτα φυσιολογικό κατά τη διάρκεια της κατασκευής του έργου ο Ευπαλίνος αντιμετώπισε διάφορα προβλήματα- προκλήσεις. Μια από αυτές, πιθανότατα η σημαντικότερη, ήταν η αστάθεια των πετρωμάτων σε κάποια σημεία της σήραγγας και η οποία θα είχε ως αποτέλεσμα οι δυο πλευρές να μην συναντηθούν ποτέ. Ο σπουδαίους μηχανικός, όμως, είχε προνοήσει για ένα τέτοιο ενδεχόμενο και είχε πάρει τα… μέτρα του!

Αξιολόγηση του έργου

Για τον αγωγό σύνδεσης με την πηγή χρειάστηκε να εξορυχθούν περίπου 1500 κυβικά μέτρα (κ.μ.) φυσικού βράχου, για το όρυγμα με την τάφρο και το τελικό κανάλι σχεδόν 5000 κ.μ. και για τον αγωγό μέσα στην πόλη άλλα 1000 κ.μ. Όλες μάλιστα οι εργασίες αυτές έγιναν με σφυρί και καλέμι. Για τις συμπληρωματικές εργασίες του έργου θα πρέπει πίσω στη σήραγγα να μεταφέρθηκαν περίπου 300 κ.μ. λίθοι, αλλά και σχεδόν 5000 πήλινοι σωλήνες οι οποίοι κατασκευάστηκαν στον τροχό και μεταφέρθηκαν στον πυθμένα του καναλιού. Σε σχέση με τη λειτουργία του αγωγού, παρουσιάστηκε καθώς φαίνεται ένα βασικό πρόβλημα. Καθώς το νερό της πηγής περιείχε υψηλό ποσοστό ασβεστίου, μέσα σε μερικά χρόνια οι σωλήνες του αγωγού γέμισαν με πουρί, με αποτέλεσμα για να αποκατασταθεί η σωστή λειτουργία, να χρειαστεί να ανοιχτούν οι σωλήνες του αγωγού στο επάνω μέρος σε όλο το μήκος τους, παραμένοντας στη θέση μόνο το ένα τρίτο της διατομής τους σαν αυλάκι, που από καιρό σε καιρό έπρεπε να καθαρίζεται. Ο Ευπαλίνος κατάφερε να υλοποιήσει ένα ιδιαίτερα τολμηρό εγχείρημα, μετά από διεξοδική προφανώς επιτόπια έρευνα, αλλά και μέσα από σημαντικούς θεωρητικούς υπολογισμούς. Το όρυγμα θα πρέπει σαφώς να σχεδιάστηκε "στο χαρτί", όπου και θα πρέπει να αναπτύχθηκαν όλα τα στάδια εργασίας του, αλλά και οι τροποποιήσεις που έγιναν.



Υπολόγισε και έδωσε κλίση στη διαδρομή του ενός κλάδου με τέτοιο τρόπο που θα ήταν μαθηματικά βέβαιο ότι θα συναντούσε κάποια στιγμή τον άλλο κλάδο. Ο νότιος κλάδος πήρε κλίση 17 μοιρών προς τα δεξιά και στη συνέχεια έστριψε αριστερά κατά 21 μοίρες και συνάντησε τον βόρειο κλάδο, σχεδόν χωρίς καμία απόκλιση.



Η τριγωνική διάνοιξη της βόρειας σήραγγας έχει και αυτή το σκοπό της. Ο Ευπαλίνος δεν το έκανε για… ομορφιά και χάρη αλλά προκειμένου να μηδενίσει τις πιθανότητες να σημειωθεί κάποια υποχώρηση του εδάφους από το νερό και επιπλέον, να υπάρχει βάθος ώστε να κατασκευαστεί η επένδυση της στοάς.

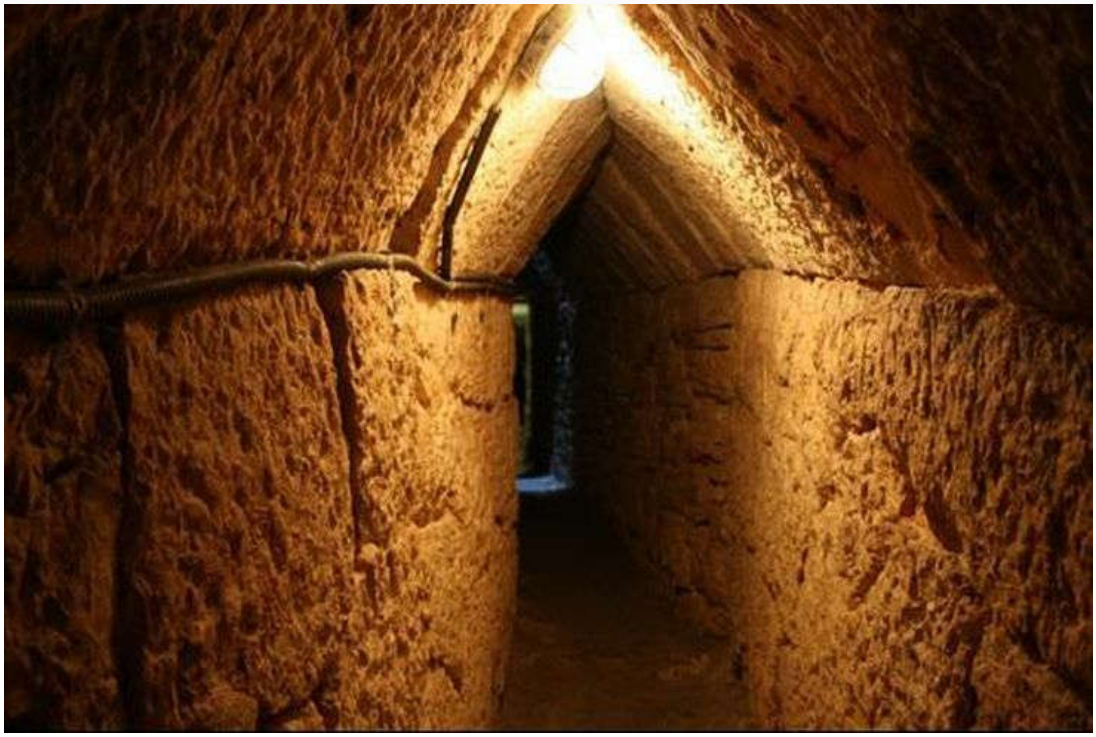
Παρακολουθείστε στο https://www.youtube.com/watch?v=AJTwxCaOODM το εκπληκτικό βίντεο που περιγράφει την κατασκευή του Ευπαλίνειου Ορύγματος και επιμελήθηκε ο ομότιμος καθηγητής του ΕΜΠ, Θεοδόσης Τάσιος.

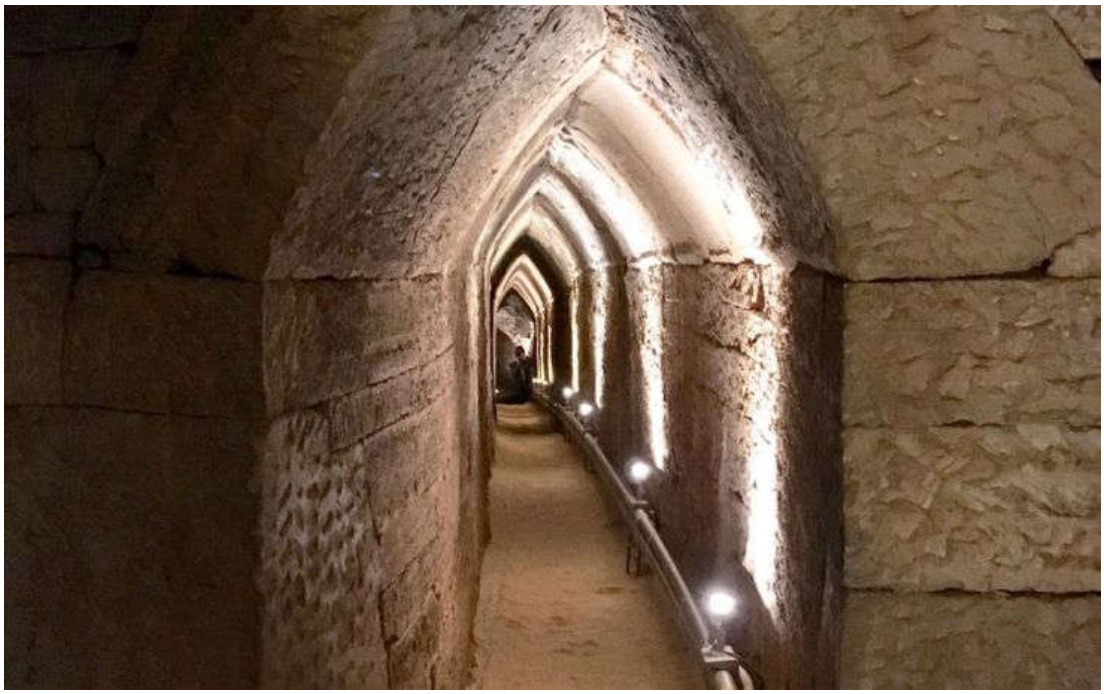
Το Ευπαλίνειο Όρυγμα σήμερα

Για περίπου 10 χρόνια, τα δυο συνεργεία άνοιγαν τη σήραγγα με βαριοπούλες, σφήνες και καλέμια. Χρειάστηκε να εξορυχθούν 12.500 τόνοι βράχου, να τοποθετηθούν 5.000 πήλινοι σωλήνες και να δαπανηθούν πολλά χρήματα από το κρατικό ταμείο, ώστε, άφθονο νερό να αρχίσει να ρέει στις κρήνες της πόλης!

Η αρχή της τήρησης των αναλογιών που εισήγαγε ο Ευπαλίνος επιστρατεύτηκε την περίοδο της Αναγέννησης και ακολουθείται και σήμερα στην κατασκευή των σηράγγων. Μέσα στη σήραγγα ο Ευπαλίνος έγραψε τη λέξη «παράδεγμα», που σημαίνει υπόδειγμα.

Η λειτουργία του υδραγωγείου συνεχίστηκε για περίπου 1.100 χρόνια. Στους βυζαντινούς χρόνους η σήραγγα χρησιμοποιήθηκε ως καταφύγιο των κατοίκων κατά τη διάρκεια επιδρομών. Στη συνέχεια εγκαταλείφθηκε. Ανασκάφθηκε από το Γερμανικό Αρχαιολογικό Ινστιτούτο, τη δεκαετία του 1970. Από τότε και μέχρι τις μέρες μας, επισκέψιμα ήταν, για λόγους ασφαλείας, μόνο 130 μέτρα.





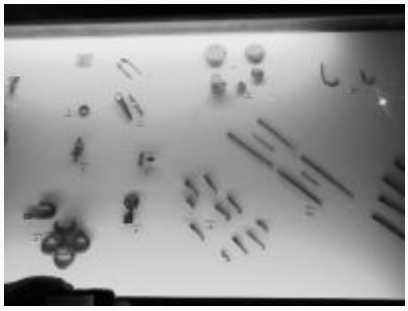
Ήδη από το 1992 το μνημείο έχει περιληφθεί στον κατάλογο των μνημείων παγκόσμιας πολιτιστικής κληρονομιάς της UNESCO. Το όρυγμα είναι επισκέψιμο σε όλο του το μήκος καθώς ολοκληρώθηκαν οι εργασίες αποκατάστασης και συντήρησης του μνημείου.

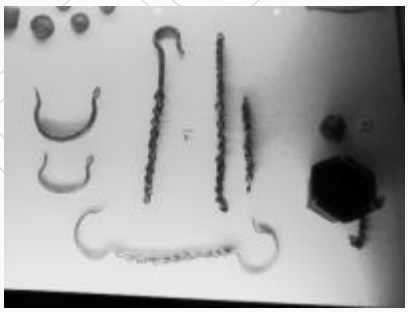
Συμπέρασμα

Η ακρίβεια του έργου είναι ασύλληπτη ακόμα και με τα σημερινά μέσα. Στον Υπόγειο Μητροπολιτικό Σιδηρόδρομο Αθηνών (μετρό) υπάρχουν αποκλίσεις της τάξεως του μέτρου, ενώ στο Ευπαλίνειο Όρυγμα οι αποκλίσεις είναι της τάξεως των εκατοστών! Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι η νότια σήραγγα (η ομάδα ανασκαφής της οποίας δεν χρειάστηκε να αποκλίνει της πορείας της όπως η βόρεια ομάδα) ταυτίζεται σχεδόν απόλυτα με την ιδανική ευθεία σε όλο το μήκος της (401,8 μέτρα).

Η πρώτη φωτογραφία που τραβήχτηκε το 1970 από τον Hermann Kienast

Αντικείμενα που βρέθηκαν στο όρυγμα





Πηγές: http://www.newsbeast.gr/
https://el.wikipedia.org
http://local.e-history.gr